

# Examen de mécanique des fluides

Promotion 139, 14 juin 2022

## Partie A (8 points)

Durée 1h. Sans document, ni calculatrice.

Note: les calculs analytiques seront ici développés en lois d'échelle et les calculs numériques en ordre de grandeur.

1. Quel doit être le rayon d'un parachute pour limiter la chute d'un parachutiste de 100 kg à une vitesse de 5 m/s? **1pt**
2. Une manière peu coûteuse de mesurer la viscosité d'un liquide consiste à laisser tomber une colonne de liquide de longueur  $L$  à l'intérieur d'un tube capillaire vertical de rayon  $R$  (Fig. 1a). On considèrera par exemple une huile 50 fois plus visqueuse que l'eau, d'une masse volumique comparable à celle de l'eau, avec  $L \sim 2$  cm et  $R \sim 100$   $\mu$ m.
  - Si on néglige la dissymétrie entre le ménisque avant et le ménisque arrière, quel est le profil de pression le long de la colonne de liquide qui chute? (on supposera que le liquide mouille parfaitement le tube). **0.5pt**
  - Quelle est la loi, sans préfacteur, de la vitesse de chute en fonction des paramètres physiques du problème? Evaluer l'ordre de grandeur de cette vitesse. **0.5pt**

En réalité la colonne laisse un film d'épaisseur  $e$  derrière elle, ce qui rompt la symétrie des ménisques (Fig. 1b).

- Quel est l'impact de ce film sur le profil de la pression le long de la colonne? **0.5pt**
- Comment évolue alors la vitesse de chute du liquide en fonction de  $L$ ? **0.5pt**

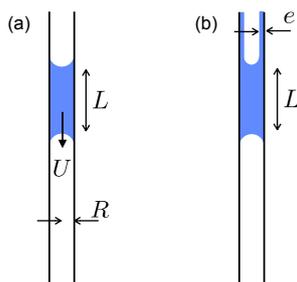


Figure 1: Chute d'une colonne de liquide dans un tube capillaire: (a) ménisques symétriques, (b) on prend en compte le film de liquide déposé à l'arrière de la goutte.

3. Lorsqu'on marche avec un mug de thé à la main, le liquide se met généralement à balloter et finit par déborder (Fig. 2a). On peut interpréter ce ballotement comme une onde de surface stationnaire dont la longueur d'onde est le diamètre de la tasse. Pas besoin de savoir par coeur la relation de dispersion d'une onde, on peut facilement la retrouver en loi d'échelle. On considère une oscillation de petite amplitude  $A$ .

- Que vaut l'énergie potentielle de gravité lorsque la déformation de la surface est maximale? **0.5pt**
  - Quelle profondeur de liquide mise en mouvement? En déduire l'énergie cinétique du liquide. **0.5pt**
  - En déduire l'expression de la fréquence de ballotement du liquide dans un mug de rayon  $R \sim 5$  cm rempli d'une hauteur d'eau  $H \sim 10$  cm. Évaluez sa valeur numérique et comparez-la à la fréquence typique d'un marcheur. Est-il normal que le liquide finisse par déborder? **0.5pt**
4. Une expérience classique pour illustrer "l'effet Bernoulli" consiste à faire léviter une balle de ping-pong avec un sèche cheveux (Fig. 2b). Pour une configuration donnée, la balle a une position d'équilibre et si on la perturbe (légèrement), elle revient à sa position d'équilibre. Mais en fait, comment ça marche?
- Décrire schématiquement la distribution de la vitesse à la sortie du sèche cheveux? Si vous n'en avez aucune idée, soufflez sur votre main, c'est le même type d'écoulement. **0.5pt**
  - Comment expliquer que la balle se stabilise à une distance fixe par rapport au sèche-cheveux? **0.5pt**
  - Comment expliquer l'origine de la force transverse qui ramène la balle vers l'axe du jet? **0.5pt**
5. Quand on lance très rapidement une maquette d'avion très légère (Fig. 2c), l'avion peut partir en looping avant d'adopter une trajectoire plus classique de planeur (Fig. 2d). On cherche à déterminer dans quelle limite ce départ en looping est observé.
- Quelles sont les différentes forces qui agissent sur l'avion? **0.5pt**
  - Comment se comparent ces forces au démarrage si la vitesse de lancement est élevée et la maquette légère? **0.5pt**
  - Comment expliquer la trajectoire en looping? **0.5pt**
  - Donner l'expression du rayon du looping (on rappelle l'expression de l'accélération centrifuge en mécanique du point  $a = U^2/R$ ). **0.5pt**

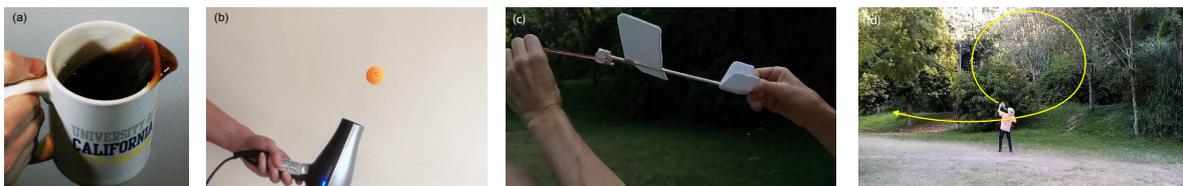


Figure 2: (a) Ballotement d'un liquide à l'intérieur d'un mug. (b) Balle de ping-pong en lévitation au-dessus d'un sèche-cheveux. (c) et (d) Avion catapulté avec un élastique qui effectue un looping avant d'adopter une allure de vol plus habituelle (<https://youtu.be/CLwMQsoEOi0>).

*Propriétés de l'air et de l'eau:*

- air : masse volumique  $1.2 \text{ kg/m}^3$ , viscosité dynamique  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
- eau : masse volumique  $10^3 \text{ kg/m}^3$ , viscosité dynamique  $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

*Équation de Navier & Stokes:* 
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

**Solution:**

1. *Parachute:*  $Re \gg 1$ ,  $C_x \frac{1}{2} \rho_{air} U^2 S = mg$ . On prend  $C_x \sim 1$ . On obtient  $S \sim 80 \text{ m}^2$ , soit un rayon  $R \sim 5 \text{ m}$ .
2. *Chute dans un tube capillaire:* La pression aux 2 extrémités de la colonne de liquide est identique et vaut  $P_{atm} - 2\gamma/R$ . Il n'y a donc pas de gradient de pression à l'intérieur de la colonne. Cependant cette dernière est soumise à son poids. Dans l'équation de Stokes (hypothèse  $Re \ll 1$ , il nous reste donc  $\eta \Delta U \sim \rho g$ . Dans le Laplacien, c'est  $1/R^2$  qui domine donc  $U \sim \rho g R^2 / \eta$  (indépendant de  $L$ ). Ici cela nous donne une vitesse de l'ordre de 2 mm/s. Si on laisse un film à l'arrière de la colonne, le rayon du ménisque à l'arrière est de l'ordre de  $R - e$ , on a ainsi une pression plus faible en haut de la colonne qu'en bas qui tend à ralentir la colonne. Le gradient correspondant  $\gamma(1/(R - e) - 1/R)/L$  se soustrait à  $\rho g$  et est d'autant plus important que  $L$  est petit.
3. *Ballotement:* On reprend le calcul qu'on a vu pour les vagues avec  $\lambda \sim R$  et se place dans la limite eau profonde ( $H \gg R$ ). Comme  $R$  est grand devant la longueur capillaire, on ne prend en compte que la gravité. On équilibre donc une énergie potentielle de gravité avec l'énergie cinétique du liquide. Si l'amplitude des oscillations est  $A$ , le volume soulevé est de l'ordre de  $AR^2$  et l'énergie de gravité  $\rho g AR^2 A$ . La profondeur mise en jeu par le mouvement du liquide est de l'ordre de  $R$  (on l'a montré en cours), ce qui correspond à un volume  $R^3$  et une énergie cinétique  $\rho R^3 (A\omega)^2$ . On obtient ainsi le résultat des ondes gravitaires  $\omega \sim (g/R)^{1/2}$ . En ordre de grandeur, on a  $\omega \sim 10 \text{ rad/s}$ , ce qui donne 1-2 Hz pour la fréquence. Justement c'est la fréquence typique d'un marcheur, d'où le passage en résonance.
4. *Bernoulli:* Le jet est très rapide sur son axe et ralentit progressivement sur les côtés. Il tend également à ralentir le long de son axe.  
On a 2 types de forces: une force de traînée dans l'axe qui diminue lorsque qu'on s'éloigne du jet (d'où une position d'équilibre par rapport à la gravité). Une pression plus faible au coeur du jet que sur les côtés (loi de Bernoulli), ce qui attire la balle vers l'axe du jet.
5. *Looping:* L'avion est soumis à forces, son poids, la force de traînée et la force de portance. Si l'avion va très vite ( $\rho_{air} U^2 S \gg mg$ ) alors le poids est négligeable. La force de portance qui est perpendiculaire à la vitesse tends à lui imposer une trajectoire circulaire. On équilibre alors  $\frac{1}{2} C_p \rho_{air} U^2 S$  avec  $mU^2/R$ . On obtient alors  $R = 2m/C_p \rho_{air} S$ . Evidemment la force de traînée ralentit progressivement l'avion et vient finalement équilibrer les 2 autres forces, comme dans le cas du planeur vu en cours.

## Partie B (12 points)

Durée 2h, document autorisé : photocopié.

### 1. Écoulement dans un double vitrage (4pt)

Un double vitrage est constitué de deux vitres parallèles séparées par un espacement  $d$  très petit devant les autres dimensions. Nous considérons ici une configuration où la structure est verticale, la face de gauche soumise à une température  $T_1$  et la face opposée à la température  $T_2$  (Fig. 3). On suppose  $T_2 > T_1$ .

En absence d'écoulement, on s'attendrait à ce que le profil de température à travers l'espacement suive une loi linéaire,

$$T(x) = T_0 + \frac{\Delta T}{d}x$$

avec  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$  et  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Supposons que la masse volumique de l'air qui sépare les vitres dépende linéairement de la température:

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)],$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique à  $T_0$  et  $\alpha$  une constante numérique positive. La variation spatiale de la masse volumique suit donc:

$$\rho(x) = \rho_0 \left[ 1 - \alpha \Delta T \frac{x}{d} \right]$$

Pour déterminer l'écoulement de l'air, nous supposons néanmoins que la masse volumique de l'air est constante ( $\rho_0$ ) sauf dans le terme lié à la gravité,  $\rho(x)g$  (approximation de Boussinesq). Nous négligerons également la variation de la viscosité avec la température.

L'air de droite étant plus chaud que celui de gauche, il en résulte un mouvement ascendant sur la moitié droite de l'interstice et par conservation du débit un mouvement descendant dans la moitié gauche. La question est de savoir quelle est la vitesse caractéristique de cette circulation.

1. Avant de considérer la dynamique, considérons le cas statique où tout le fluide serait uniformément à la température  $T_0$ . Quelle serait alors la répartition spatiale de la pression dans l'interstice? **0.5pt**
2. Compte-tenu de la géométrie, quels termes de l'équation de Navier & Stokes pouvons-nous négliger pour décrire l'écoulement stationnaire? **0.5pt**
3. Étant donnée la géométrie de l'écoulement, la vitesse est partout verticale sauf aux bords supérieur et inférieur du vitrage (mais nous ne décrivons pas cette région). Que pouvons-nous dire sur le profil de la pression selon l'axe  $x$ ? **0.5pt**
4. Le double vitrage étant une cavité scellée, il est raisonnable de supposer que la répartition de la pression en présence du gradient de température est la même que celle obtenue dans la configuration statique avec une température homogène  $T_0$ . Montrer que dans ce cas, la vitesse du fluide suit la loi: **0.5pt**

$$\eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \rho_0 \alpha g \Delta T \frac{x}{d} = 0$$

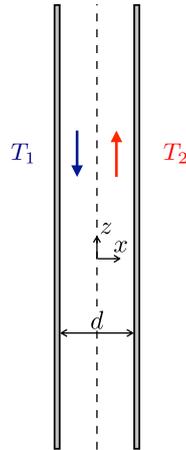


Figure 3: Coupe schématique d'un double vitrage: deux vitres verticales sont séparées par une mince couche d'air d'épaisseur  $d$ .

5. Intégrer l'équation avec les conditions aux limites adéquates. **0.5pt**

En déduire la vitesse moyenne de l'écoulement sur une demi-épaisseur de la fenêtre. **0.5pt**

Application numérique avec  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta_0 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$ ,  $\alpha = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ ,  $d = 5 \text{ mm}$ . **0.5pt**

6. Vous avez peut-être une gourde "thermos" devant vous pour vous désaltérer. Cette gourde comporte une enveloppe intérieure séparée de l'enveloppe extérieure par du vide (modèle haut de gamme) ou par une mousse de polystyrène expansé (modèle meilleur marché), mais pas par de l'air libre. Pour quelle raison du point de vue thermique fabrique-t-on ces objets de la sorte? **0.5pt**

**Solution:**

1. L'hydrostatique impose  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  et  $-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g = 0$ . On a donc une solution de la forme  $p = p_0 - \rho_0 g z$

2. On a un écoulement unidirectionnel donc  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est négligeable. On cherche un état stationnaire, du coup on ne prend pas  $\partial u / \partial t$  en compte. Il reste ainsi  $-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0$ .

3. Comme en hydrostatique  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ . Ainsi  $p$  ne dépend que de  $z$ .

4. Si on garde la distribution de pression de la situation homogène,  $\partial p / \partial z$  se simplifie avec  $\rho_0 g$  dans le  $\rho(x)$ , ce qui conduit à l'équation recherchée.

5. On intègre 2 fois avec comme conditions aux limites  $u_z(x = \pm d/2) = 0$ . Ce qui conduit à:

$$u_z(x) = \frac{\rho_0 \alpha g \Delta T}{6 \eta d} x \left( \frac{d^2}{4} - x^2 \right)$$

Pour avoir la vitesse moyenne on intègre  $\frac{2}{d} \int_0^{d/2} v_z dx$ , ce qui conduit à

$$\bar{u}_z = \frac{\rho_0 \alpha g \Delta T d^2}{96 \eta}$$

AN:  $\bar{u}_z \simeq 1 \text{ mm/s}$ . 6. La convection favorise les échanges thermiques. Si on a un bon

vide, ce n'est plus le cas. Une mousse bloque également la convection.

## 2. Anémomètre rotatif (4pt)

Les stations météorologiques utilisent très souvent des anémomètres rotatifs (Fig. 4) pour mesurer la vitesse du vent et ses fluctuations. L'appareil comprend essentiellement trois coupelles coniques montées sur un axe tournant vertical. On supposera qu'il est soumis à une vitesse horizontale  $U$ .

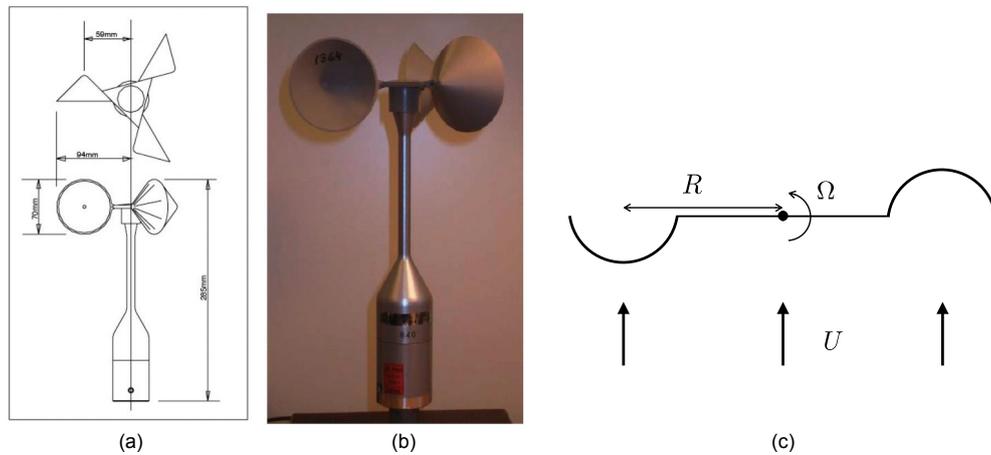


Figure 4: Schéma (a) et photographie (b) d'un anémomètre à trois coupelles. Schéma simplifié d'un anémomètre à deux coupelles (c).

Les caractéristiques de l'anémomètre étudié sont :

- 2 coupelles
- Surface frontale des coupelles:  $S = 38 \text{ cm}^2$
- Distance à l'axe de rotation:  $R = 5,8 \text{ cm}$
- Vitesse minimale d'utilisation:  $U_s = 0,22 \text{ m/s}$ .
- Moment de la force de friction solide sur l'axe de l'anémomètre, à vitesse angulaire non nulle:  $\Gamma_{f_0} = 4.10^{-6} \text{ N.m}$

Pour simplifier la description de l'anémomètre, on considère un modèle comportant seulement deux coupelles (Fig. 4c) en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe.

1. Considérons l'instant où le support des coupelles est perpendiculaire au vent (Fig. 4c).
  - Evaluer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds. **0.25pt**
  - Quelle est la vitesse relative du vent par rapport à chacune des coupelles? **0.5pt**
  - Montrer que le moment résultant de ces forces aérodynamiques peut s'écrire comme :

$$\Gamma_a = \frac{1}{2} \rho U^2 R S [(C_a - C_r)(1 + \omega^2) - 2\omega(C_a + C_r)] \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $S$  la surface frontale des coupelles,  $R$  leur distance à l'axe de rotation et  $\omega = \Omega R/U$ . **0.5pt**

- Donner la signification physique des coefficients  $C_a$  et  $C_r$  et leur ordre de grandeur. **0.25pt**

**Solution:** Les vitesses de vent mesurées vont de quelques dizaines de cm/s à quelques dizaines de m/s. Le nombre de Reynolds est de l'ordre de :

$$Re = U\sqrt{S}/\nu_{air} > 0,2.0,06/1,5.10^{-5} \simeq 10^3.$$

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement sur l'anémomètre est grand devant l'unité. Dans ces conditions, la force aérodynamique est de la forme :  $F = 0,5U^2SC_x$  où  $C_x$  est un coefficient de traînée, de l'ordre de l'unité pour un objet non profilé. La vitesse du vent relatif pour la coupelle qui avance est  $U_+ = U - \Omega R$ , alors que pour la coupelle qui recule, la vitesse relative est  $U_- = U + \Omega R$ . Le moment résultant des forces aérodynamiques est donc :

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\rho RS[C_a(U - \Omega R)^2 - C_r(U + \Omega R)^2]$$

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\rho U^2 SR[C_a(1 - \omega)^2 - C_r(1 + \omega)^2]$$

$\Gamma_a = \frac{1}{2}\rho U^2 RS[(C_a - C_r)(1 + \omega^2) - 2\omega(C_a + C_r)]$   $C_a$  et  $C_r$  sont respectivement les coefficients de traînée dans le sens de l'avancée ou de la reculée, coeff d'ordre 1.

2. On va supposer que la relation (1) reste valide lorsque le moment de la force aérodynamique est moyenné sur la période de rotation. On cherche à déterminer la vitesse de rotation de l'anémomètre en fonction de la vitesse du vent et de ses caractéristiques mécaniques. On note  $U_s$  la vitesse minimale de vent pour laquelle l'anémomètre se met en rotation.

En écrivant l'équilibre des moments des forces à la vitesse seuil  $U_s$ , donner l'expression de la différence  $C_a - C_r$  en fonction de  $\Gamma_{f0}$ ,  $\rho$ ,  $U$ ,  $R$  et  $S$  et en déduire sa valeur numérique à partir des caractéristiques de l'anémomètre. **0.5pt**

Par ailleurs, une mesure complémentaire permet de déterminer que  $C_a + C_r = 1,5$ . Quelle expérience proposeriez-vous pour faire cette mesure? **0.5pt**

**Solution:** A la vitesse seuil ( $U_s = 0,22m/s$ ), le couple aérodynamique s'oppose au couple de friction, soit :  $\Gamma_a(U_s, \omega = 0) = \Gamma_{f0}$ , ce qui donne la différence des coefficients de traînée :  $C_a - C_r = \frac{2\Gamma_{f0}}{\rho U_s^2 RS}$  On obtient numériquement  $C_a - C_r = 0,6$ . D'autre part, la force de traînée est :  $F_T = \frac{1}{2}\rho U^2 RS(C_a + C_r)$  ce qui permet de calculer  $C_a + C_r = 1,5$ . Pour faire cette mesure, on pourrait bloquer la rotation de l'anémomètre et mettre le tout dans une soufflerie, ceci permettrait de mesurer  $(C_a + C_r)$ .

3. Lorsque l'anémomètre est placé dans un vent constant à vitesse  $U > U_s$ , celui-ci se met en rotation. Il accélère puis se stabilise à une valeur de rotation donnée.

Pour quelle raison atteint-on une vitesse de rotation constante? **0.5pt**

On va alors considérer que le moment des forces de friction  $\Gamma_{f_0}$  est quasi-nul.

Dans ces conditions, à quelle équation obéit  $\omega$ ? **0.5pt**

Dans des conditions normales d'utilisation, la vitesse de l'anémomètre reste faible devant la vitesse du vent, ie  $\omega \ll 1$ . Dans ce régime, déterminer la valeur de  $\omega$ . **0.5pt**

**Solution:** Lorsque l'anémomètre accélère  $\Gamma_a$ , initialement supérieur à  $\Gamma_{f_0}$ , se met à diminuer jusqu'à atteindre la valeur de  $\Gamma_{f_0}$  : la somme des moments est alors nulle. A vitesse de rotation constante, le couple total est nul et si le couple de friction est petit devant le couple aérodynamique, on peut faire l'approximation  $\Gamma_a = 0$  qui conduit à :  $\frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{2} \frac{(C_a - C_r)}{(C_a + C_r)}$  ce qui donne, dans l'approximation  $\omega \ll 1$ ,  $\omega = 0, 2$ .

### 3. Décharge à travers une digue (4pt)

Une manière de se protéger d'une inondation consiste à bâtir une digue de sable. Néanmoins le sable est poreux et l'eau va progressivement passer au travers. Nous proposons ici d'estimer le débit correspondant dans une configuration simplifiée. Les principes en jeu sont à la base de l'hydrogéologie (écoulements dans les aquifères souterrains, ou plus généralement dans les écoulements de fluides en sous-sol).

1. Du point de vue de l'hydraulique, un bloc de sable peut être assimilé à une série de tubes capillaires parallèles très fins (Fig. 5). Si on applique une différence de pression  $\Delta p$  entre deux faces opposées du bloc distantes de  $L$ , la vitesse moyenne basée sur le débit à travers la surface est donnée par la loi de Darcy:

$$U = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

- Justifier cette relation. **0.5pt**

- Quelle est le lien entre la perméabilité  $\kappa$  et la taille moyenne des grains de sable  $d_{sable}$ ? **0.5pt**

- Si  $\phi$  est la porosité du sable, quelle relation relie  $U$  à la "vraie" vitesse moyenne du fluide  $U_f$ ? **0.5pt**

On considère un mur d'épaisseur  $L$  (élevée) construit sur un sol imperméable. L'eau se situe à un niveau  $h_1$  du côté inondé et un niveau  $h_2 < h_1$  du côté protégé (Fig. 6). Si on néglige les effets de la capillarité, le mur comprend une région saturée d'eau caractérisée par une hauteur locale  $h(x)$  surmontée d'une zone sèche (même si en réalité, cette zone "sèche" est partiellement imprégnée d'eau à cause de la capillarité). On supposera que  $h(x)$  est stationnaire. Afin de décrire l'écoulement latéral de l'eau à travers le mur épais, l'ingénieur Arsène Dupuit a proposé une approximation qui est l'analogue de l'approximation de lubrification étudiée en cours.

2. Si on néglige la composante verticale de la vitesse de l'eau, quelle est la distribution de verticale de pression  $p(x, z)$  pour une abscisse horizontale  $x$  donnée? **0.5pt**

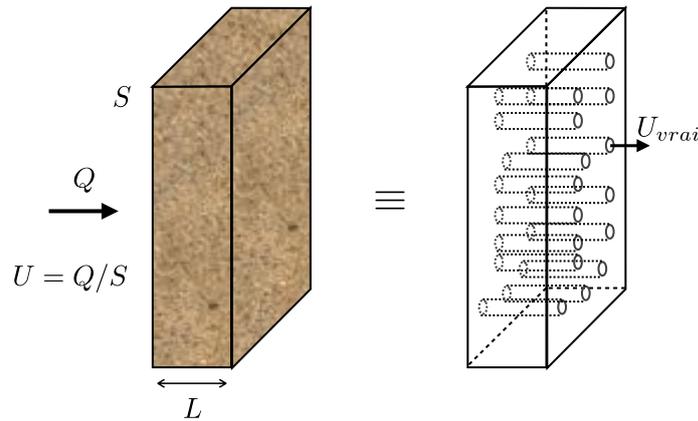


Figure 5: Modélisation hydraulique d'un bloc de sable en une série de capillaires parallèles. La vitesse d'écoulement apparente est définie par le rapport du débit de liquide par la section du bloc. Cette vitesse diffère de la "vraie" vitesse moyenne du fluide dans les capillaires.

3. On considère à présent une tranche infinitésimale de mur  $dx$ . Montrer que le débit à travers cette tranche vaut, par unité de largeur: **0.5pt**

$$q(x) = -\frac{\kappa \rho g}{\eta} h \frac{dh}{dx}$$

4. Toujours dans l'hypothèse d'un profil stationnaire, quelle est le profil  $h(x)$  du niveau de l'eau le long du mur? En déduire le débit par unité de largeur à travers le mur. En hydrogéologie, cette relation est connue sous le nom de Loi de décharge de Dupuit-Forchheimer pour un aquifère libre.

Quelle hypothèse est mise à défaut au début de l'inondation lorsque  $h$  est proche de 0? **1.5pt**

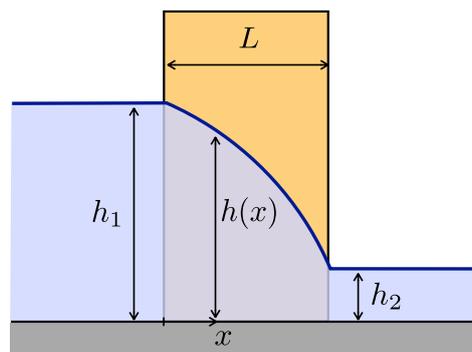


Figure 6: Le mur de sable comprend une partie saturée d'eau de hauteur locale  $h(x)$  dans laquelle l'écoulement se produit et surmontée d'un zone sèche (on néglige ici les effets de la capillarité).

**Solution:** 1. Il s'agit d'écoulements dans des petits pores, donc a priori à petit  $Re$ . La loi de Stokes nous indique alors  $\eta \frac{U}{r_{pore}^2} \sim \frac{\Delta P}{L}$ , le fluide se déplaçant des fortes pressions

vers les faibles, d'où le signe (-). Géométriquement, le rayon des pores est proportionnel à la taille des grains, d'où  $\kappa \sim d_{sable}^2$ . D'après la conservation du débit  $U = \phi U_f$ .

2. Si on néglige la vitesse verticale, il nous reste la loi de l'hydrostatique:  $p(x, z) = P_{atm} + \rho g(h(x) - z)$ .

3. Il suffit d'utiliser la loi de Darcy avec  $\frac{dp}{dx} = \rho g \frac{dh}{dx}$  et d'intégrer sur  $h$  (mais  $u$  est constant donc il suffit de multiplier par  $h$ ).

4. Si l'écoulement est stationnaire,  $q$  est uniforme donc:

$$h \frac{dh}{dx} = - \frac{\eta q}{\kappa \rho g} = cte$$

$$h(x)^2 = h_1^2 - 2 \frac{\eta q}{\kappa \rho g} x$$

d'où

$$h_2^2 = h_1^2 - 2 \frac{\eta q}{\kappa \rho g} L$$

ce qui conduit finalement à

$$q = (h_1^2 - h_2^2) \frac{\kappa \rho g}{2\eta L}$$

Pour  $h = 0$  la vitesse moyenne diverge selon notre expression. Cela est lié au fait que la composante verticale de la vitesse n'est plus négligeable. En fait l'approximation n'est valable que pour  $dh/dx$  petit.