

Partie A (8 points)

Durée 45 min. Sans document.

Note: les calculs seront ici développés en lois d'échelle.

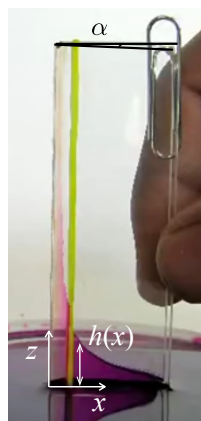
1. Estimer un nombre de Reynolds autour d'une aile de moustique de longueur typique 4 mm qui bat à 700 Hz. **1pt**
2. On veut injecter de l'eau avec un débit de $10 \text{ mm}^3/\text{s}$ dans un tube de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et de longueur $L = 1 \text{ m}$ au moyen d'une seringue.

On suppose que le profil de vitesse est uniforme sur la section de l'entrée du tube. Décrire l'évolution du profil de vitesse le long de la seringue (faire un schéma). **1pt**
Estimer la *longueur d'entrée* au bout de laquelle la forme de ce profil n'évolue plus. **1pt**

Quelle pression doit-on appliquer sur le piston de la seringue pour produire l'écoulement désiré? **1pt**

3. Estimer la vitesse de chute d'un grain de sable de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et de densité $\rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ dans l'eau. **2pt**
4. Un avion Spitfire de la 2^e guerre mondiale décroche pour une vitesse inférieure à 120 km/h pour une surface alaire de 22.5 m^2 et une masse de typique de 3000 kg. Quel est le coefficient de portance maximal de l'avion? **1pt**
5. Brook Taylor ne s'est pas contenté de développer les séries polynomiales qui portent son nom. Il s'est également intéressé à l'ascension dans un dièdre d'angle α très faible. La figure ci-dessous représente une expérience réalisée avec deux lames de microscope séparées par un trombone (la ligne jaune verticale correspond à un élastique qui maintient les arrêtes opposées en contact). Le liquide violet mouille parfaitement les lames de verre.

Quelle est la courbure dominante le long de l'interface liquide/air? En déduire le profil $h(x)$ du ménisque. **1pt**



Propriétés de l'air et de l'eau:

- air: densité 1.3 kg/m^3 , viscosité dynamique $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$
- eau: densité 10^3 kg/m^3 , viscosité dynamique 10^{-3} Pa.s

Solution:

Moustique: La vitesse caractéristique est la longueur de l'aile fois la fréquence de battement. $Re \sim \frac{(4 \cdot 10^{-3})^2 700}{1.6 \cdot 10^{-5}} \sim 750$

Tube: On a une vitesse de $U = Q/\pi R^2 \sim 3 \text{ mm/s}$

Longueur d'entrée: $R \sim \sqrt{\nu \ell / U}$ soit $\ell \sim UR^2/\nu \sim 3 \text{ mm}$. Du coup on peut négliger cette longueur dans le calcul de la perte de charge.

Perte de charge: $\Delta P \sim \eta UL/R^2 \sim 3 \text{ Pa}$. (on aurait un ordre de grandeur de plus en utilisant le préfacteur dans la loi de Poiseuille.

Grain de sable dans l'eau: intuitivement, on pourrait partir de l'hypothèse $Re \ll 1$, du coup on aurait $V \sim \Delta \rho g R^2 / \eta \sim 10 \text{ m/s}$. Le calcul de Re correspondant ($Re \sim 10^4$) est donc en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Du coup, calcul grand Re : $V \sim \sqrt{\Delta \rho g R / \rho} \sim 0.1 \text{ m/s}$, ce qui conduit à $Re \sim 100$ qui est cohérent avec l'hypothèse de départ.

Portance: On a $mg = \frac{1}{2} \rho_{air} U^2 S C_p$, d'où $C_p = \frac{2mg}{\rho_{air} U^2 S} \simeq 2.4$.

Ascension dans un dièdre. Localement l'espacement entre les plaques vaut αx . Visiblement la courbure correspondante est bien plus grande que la courbure le long du ménisque ($\sim d^2 z / dx^2$). On a donc $2\gamma / \alpha x = \rho g z$.

Partie B (12 points)

Durée 2h15min, document autorisé : photocopié.

Rédiger la partie B1 “Imprégnation” et au choix, B2 “Avalanches” ou B3 “Moulins à vent”.

1. Imprégnation avec évaporation 6.5pt

Mettons en contact une feuille de papier buvard d'épaisseur $e = 0.6 \text{ mm}$, de largeur $\ell = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $L = 30 \text{ cm}$ avec un bain rempli d'un liquide volatil (Figure 1a), par exemple de l'alcool ($\gamma_{alcohol} \simeq 20 \text{ mN/m}$, $\rho_{alcohol} \simeq 800 \text{ kg/m}^3$). Les pores du papier ont une taille typique de $10 \mu\text{m}$. Nous cherchons à décrire la dynamique d'ascension de ce fluide dans le papier.

Expérimentalement, on observe que l'alcool imprègne le papier en atteignant une hauteur finale de 6 cm au bout de 10 min (dans une atmosphère sèche à 25°C).

1. Calculer le nombre de Reynolds typique pour cette expérience. **0.5pt**
2. Calculer la hauteur finale d'ascension attendue si elle était limitée par la gravité. La gravité est-elle responsable de la saturation de la hauteur de liquide dans le papier buvard? **0.5pt**

Pour modéliser le problème, nous assimilons le papier à une juxtaposition de petits tubes capillaires parallèles de rayon r (Figure 1b) et nous notons n_c le nombre de capillaires par

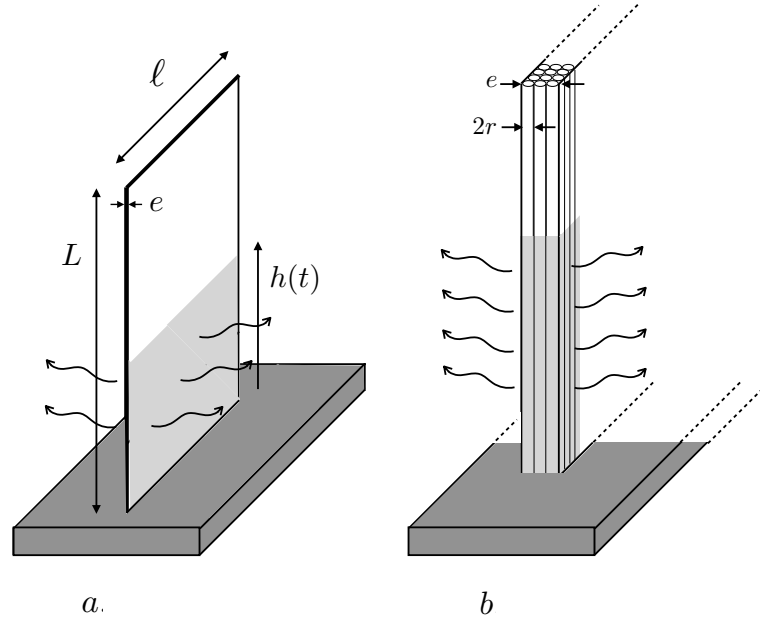


Figure 1: a. Feuille de papier plongée dans un liquide volatil. b. Modélisation par une juxtaposition de tubes capillaires.

unité de surface (dans une section horizontale du papier). La porosité du papier ϕ est égale à : $\phi = \pi r^2 n_c$.

Étant donné qu'un liquide imprégnant une feuille de papier est libre de s'évaporer par les faces de la feuille, on imagine par analogie que les petits tubes capillaires proches de la surface du papier permettent l'évaporation du liquide. Nous considérons par ailleurs que les tubes sont connectés les uns aux autres si bien que le niveau du liquide s'équilibre instantanément sur l'ensemble des tubes capillaires. Nous appelons α le flux d'évaporation latérale du liquide hors du papier (volume de liquide évaporé par unité de surface et de temps).

Notons $q(z)$ le débit de liquide dans chaque petit tube capillaire constituant le papier.

3. Comment peut-on écrire le débit global de liquide $Q(z)$ en fonction de $q(z)$, n_c et des caractéristiques géométriques de la feuille de papier? **0.5pt**

4. Écrire un bilan de quantité de matière dans le papier en tenant compte de l'évaporation du liquide et en déduire une équation qui relie $Q(z)$ à α . **0.5pt**

5. Montrer que : $\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{2\alpha}{en_c}$ pour chaque tube individuel. **0.5pt**

6. En déduire la vitesse d'ascension du fluide $u(z)$ dans un tube capillaire. On exprimera $u(z)$ en fonction de la vitesse $u(h)$ du fluide au niveau de l'interface (située à $z = h$), et de α , ϕ , e , z et h . **0.5pt**

7. Compte-tenu des hypothèses, écrire en loi d'échelle, l'équation qui régit le mouvement du liquide dans un capillaire. **0.5pt**

8. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\beta\eta}{r^2} \left(u(h) + \frac{2\alpha}{\phi e} (h - z) \right)$ où β est un coefficient numérique. Le calcul complet montre que $\beta=8$. En déduire une expression pour $P(z)$. **0.5pt**
9. Que vaut $P(h)$? **0.5pt**
10. En déduire que l'équation qui régit la montée du fluide dans le "capillaire poreux" est la suivante : $\frac{8\eta}{r^2} \left(h \frac{dh}{dt} + \frac{\alpha h^2}{\phi e} \right) = \frac{2\gamma}{r}$. **0.5pt**
11. En déduire l'expression de la hauteur d'équilibre h_{max} . **0.5pt**
12. En remarquant que $h \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dh^2}{dt}$, résoudre l'équation précédente. Quel est le temps caractéristique de ce phénomène d'ascension? **1pt**

Solution:

1. $u \sim 0.1$ mm/s, la taille à prendre en compte est la taille des pores, $Re \sim 10^{-3}$.
2. $h_{jurin} \sim \frac{2\gamma}{\rho g r} \sim 50$ cm. gravité négligeable sur 6 cm.
3. $Q(z) = q(z)n_c \ell$
4. $Q(z)dt - Q(z+dz)dt = 2\alpha \ell dz dt$ (2 faces), soit $\frac{dQ}{dz} = -2\alpha \ell$.
5. on injecte (3) dans (4) pour obtenir l'équation proposée
6. $q(z) = u(z)\pi r^2$, soit $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2\alpha}{\phi e}$, on en déduit que $u(z) = u(h) + \frac{2\alpha}{\phi e} (h - z)$
7. En loi d'échelle, $\nabla P = \eta \Delta \mathbf{u}$, soit $\nabla P \sim -\eta u / r^2$, le fluide monte mais le gradient de pression est négatif.
8. il suffit d'injecter (6) dans (7) pour obtenir l'expression donnée.
 $P(z) = P_{atm} - \frac{8\eta}{r^2} (u(h)z + \frac{2\alpha}{\phi e} (hz - z^2/2)).$
9. $P(h) = P_{atm} - 2\gamma/r$.
10. On en déduit l'expression donnée.
11. Equilibre pour $\dot{h} = 0$, soit pour $h_{max} = \sqrt{\frac{\gamma r \phi e}{4\eta \alpha}}$.
12. $\frac{dh^2}{dz} + \frac{2\alpha h^2}{\phi e} = \frac{\gamma r}{2\eta}$. $h = h_{max} \sqrt{1 - e^{-t/\tau}}$ avec $\tau = \frac{\phi e}{2\alpha}$.

2. Avalanches 5.5 pt

Une avalanche de neige dense, mais sèche, a une masse volumique ρ_n de 0,2 g/cm³. Les vitesses typiques de ces avalanches sont dans la gamme de 30 à 60 m/s et la hauteur de l'avalanche h est de l'ordre du mètre. L'étendue de l'avalanche dans les direction x (le long de la pente) et z (horizontalement) est de l'ordre d'une centaine de m.

1. On suppose que la viscosité cinématique de l'avalanche est similaire à celle de l'air. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement ? Que pouvez-vous en conclure sur la dynamique de l'écoulement? **0.5pt**
Évaluez l'ordre de grandeur de la force engendrée par ce type d'avalanche sur une construction : maison ou pile de pont. **0.5pt**

Solution: Prenons une hauteur de l'avalanche de l'ordre de 1m et une vitesse de 30 m/s, le nombre de Reynolds correspondant est alors de l'ordre de 2×10^6 . Nous pouvons donc en conclure que la dynamique de l'écoulement est gouvernée par l'inertie du fluide.

Dans un tel écoulement l'ordre de grandeur de la surpression sur un point d'arrêt est $1/2\rho V^2$. En prenant $V = 30 \text{ m/s}$ et $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$, cette surpression est de l'ordre de $9 \times 10^4 \text{ Pa}$. Intégrée sur une surface de l'ordre de 10 m^2 cela représente une force de $9 \times 10^5 \text{ N}$, équivalente au poids d'une masse de 90 tonnes.

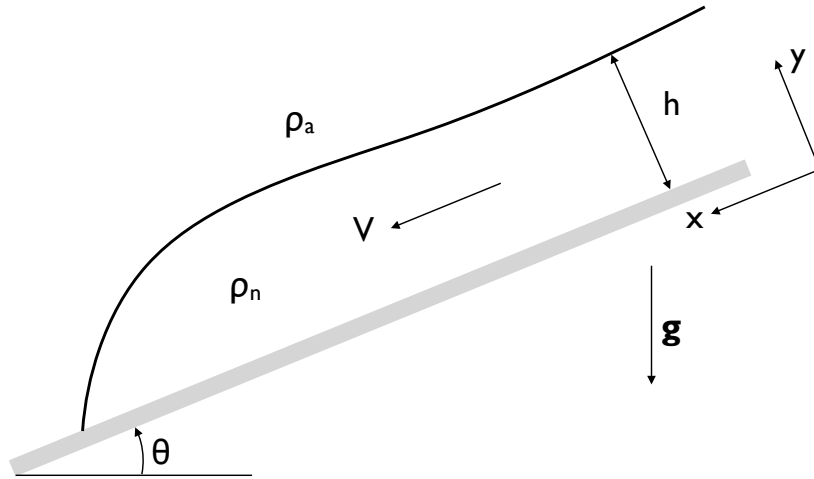


Figure 2: Représentation schématique d'une avalanche

2. L'écoulement derrière le front de l'avalanche peut être représenté comme une couche de fluide dense (masse volumique ρ_n) de hauteur $h(x)$ avec une vitesse (moyennée sur la hauteur h) $V(x)$, x étant la coordonnée le long de la pente.

Pourquoi peut-on supposer que la répartition de pression dans l'écoulement est hydrostatique ? **0.5pt**

En supposant que l'écoulement est stationnaire (on introduit continuellement du fluide dense en haut de l'avalanche), on cherche à écrire la conservation de la quantité de mouvement, appliquée à un volume de contrôle de largeur dx , projetée sur la direction x . Pour cela :

Donner la valeur du flux net de quantité de mouvement, dû à l'écoulement. **0.5pt**

Expliciter les contributions respectives des forces appliquées au volume de contrôle : force en volume, contribution de la pression, friction sur la pente. **1 pt**

Montrer que le bilan de quantité de mouvement conduit à : **0.5pt**

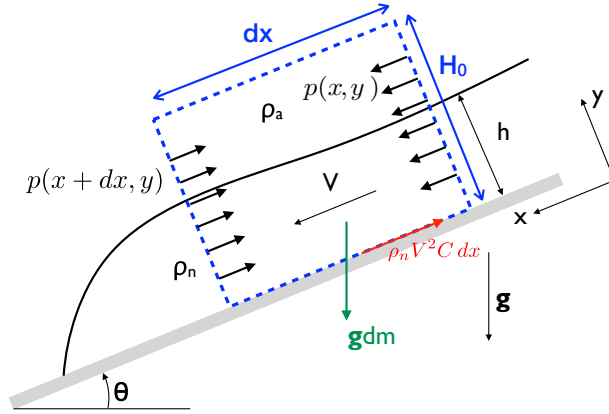
$$\rho_n \frac{d(V^2 h)}{dx} = -C \rho_n V^2 - \frac{1}{2} \rho_n g \cos \theta \frac{d(h^2)}{dx} + \rho_n g h \sin \theta \quad (1)$$

où C est un coefficient de friction caractérisant la contrainte tangentielle exercée par l'écoulement sur le sol. Ce coefficient de friction est défini de manière similaire au coef-

ficient de traînée classique.

Faire un schéma pour expliciter le calcul. **0.5pt**

Solution: L'épaisseur h de l'avalanche est beaucoup plus petite que son extension horizontale L . La condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) donne, en ordre de grandeur : $u_x/L \sim u_y/h$, soit $u_y \sim u_x h/L \ll u_x$. On peut donc, en première approximation négliger la composante u_y de vitesse. Le gradient de pression dans la direction y est alors uniquement fixé par la gravité, soit $p(y) = P_{atm} + \rho_n g \cos \theta (h - y)$ pour $y \leq h$ et $p(y) = P_{atm}$ pour $y \geq h$.



Considérons un volume de contrôle rectangulaire borné par les plans x , $x+dx$, $y=0$ et $y=H_0$. Si l'écoulement est stationnaire, le flux net de quantité de mouvement est équilibré par l'intégrale des forces en volume et de surface. Projetons ce bilan de quantité de mouvement sur la direction x : la quantité de mouvement entrant (par unité de temps) en x est : $\rho_n V^2(x) h(x)$. la quantité de mouvement qui sort en $x+dx$ est $\rho_n V^2(x+dx) h(x+dx)$. Le flux net de quantité de mouvement est donc : $-\rho_n d(V^2 h)/dx dx$. Ce flux net doit être équilibré par la somme des forces exercées sur le volume de contrôle :

- force de gravité projetée sur la pente : $\rho_n g \sin \theta h dx$
- force de friction sur le sol : $-\rho_n V^2 C dx$
- intégrale de la pression sur l'épaisseur de l'avalanche en x et $x+dx$

Pour calculer la distribution de pression, prenant comme point de référence le point A situé en haut de l'avalanche en x . Dans la section en x , la pression est : $p(x) = \rho_n g \cos \theta [h(x) - y]$ et la force résultante est $\int_0^{h(x)} p(x) dy = 1/2 \rho_n g \cos \theta h(x)^2$. Dans la section en $x+dx$, la pression est $p(x+dx) = \rho_n g \cos \theta [h(x+dx) - y]$, si nous considérons que la pression est uniforme dans l'air. L'intégrale de la pression en $x+dx$ est donc : $1/2 \rho_n g \cos \theta h(x+dx)^2$. La force résultante est donc :

$$-\frac{1}{2} \rho_n g \cos \theta [h(x+dx)^2 - h(x)^2]$$

Notons juste que nous avons omis dans le calcul la contribution de la pression atmosphérique P_{atm} dont l'intégrale sur le contour fermée est nulle.

3. Dans l'hypothèse où on peut considérer l'épaisseur de l'avalanche comme constante, comment la vitesse moyenne V varierait-elle avec l'épaisseur de l'avalanche ? **0.5 pt**
 Comment la loi obtenue se compare-t-elle avec les données expérimentales de la Fig. 3? **0.5pt**

Quel est l'ordre de grandeur du coefficient de friction C pour les avalanches de neige compacte sèche? **0.5pt**

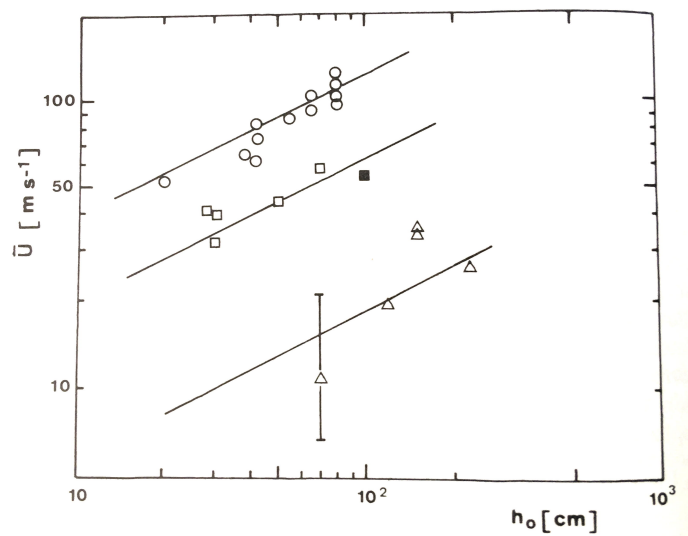


Figure 3: Vitesse d'une avalanche en fonction de son épaisseur. Cercles : avalanche de poudreuse. Carrés : avalanche de neige compacte sèche. Triangles : avalanche de neige compacte humide. Pente moyenne $\theta = 45^\circ$.

Solution: Si l'épaisseur est constante, le bilan de quantité de mouvement se ramène à :

$$C\rho_n V^2 = \rho_n g h \sin \theta \quad (2)$$

et on attend une vitesse moyenne $V = \sqrt{gh \sin \theta / C}$. En éliminant $h = Q/V$, on trouve $V = (g \sin \theta Q / C)^{1/3}$.

Dans le diagramme logarithmique $V(h)$ on attend donc une pente $1/2$ ce qui est effectivement observé sur les données expérimentales.

Pour une hauteur de 1m, la vitesse est proche de 50 m/s. Le coefficient de friction est $C = gh \sin \theta / V^2 \approx 7/2500 \sim 0,03$.

3. Moulins à vent 5.5pt

On se propose de réfléchir au fonctionnement d'un moulin à vent (ou à sa version plus contemporaine, l'éolienne). Pour simplifier le problème, nous supposons que les pales du moulin se composent de panneaux de longueur L et de largeur ℓ placés à une distance R de l'axe de rotation. Nous ferons l'hypothèse $L \ll R$ si bien que nous considérerons une vitesse linéaire uniforme des pales $R\omega$ où ω est la vitesse angulaire de rotation.

Nous supposons également que les pales ont des profils d'ailes analogues à ceux vus en cours avec un rapport optimal $C_p/C_x = 20$ pour un angle d'incidence de l'écoulement sur l'aile $\alpha_0 = 5^\circ$.

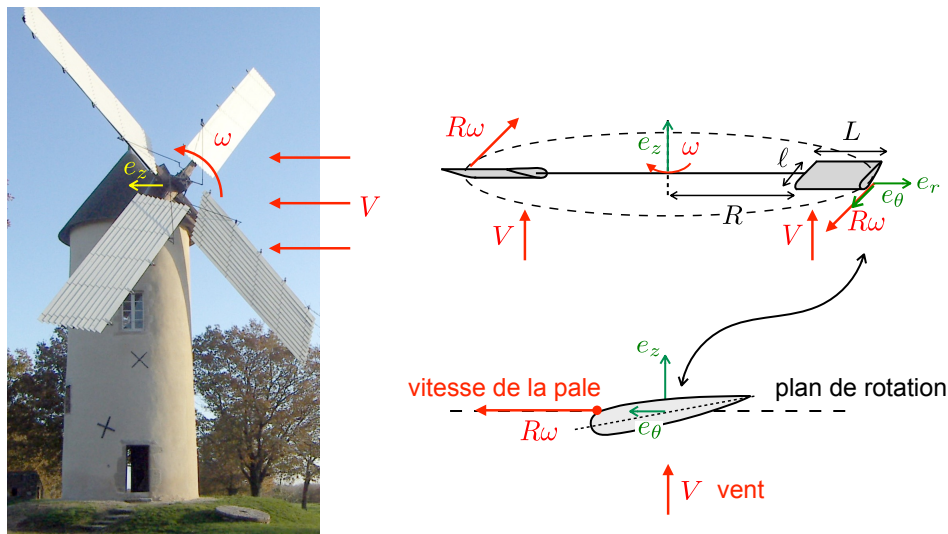


Figure 4: Version simplifiée d'un moulin à vent.

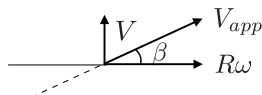
1. Si le vent souffle à une vitesse V dans la direction perpendiculaire au plan de rotation du moulin, quelle est la vitesse V_{app} ressentie au niveau d'une pale? Faire un schéma. **0.5pt**

0.5pt

Déterminer l'angle de décalage β entre V_{app} et le plan de rotation en fonction de V et de $R\omega$. **0.5pt**

Solution:

Il suffit d'additionner les 2 vecteurs V et $R\omega$ (la pale se déplaçant dans la direction opposée à $R\omega$). On trouve alors $\tan \beta = \frac{V}{R\omega}$.



2. Ajouter les forces de portance et de traînée sur le schéma précédent. **0.5pt**

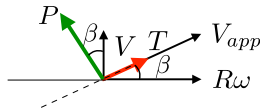
Si le moment exercé au niveau de l'axe de rotation est nul, quel est le lien entre la force

de portance P et la force de trainée T exercée sur l'aile? **0.5pt**

Si on ne garde que la partie *forme* dans la force de trainée (on néglige la trainée de couche limite ou la trainée induite en bout d'aile), quelle est alors la vitesse de rotation du moulin? **0.5pt**

Comment doit-on orienter la pale par rapport au plan de rotation pour que le moulin tourne le plus vite possible? **0.5pt**

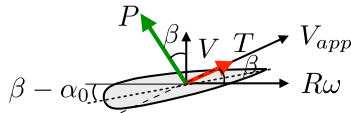
Solution:



Selon le schéma, on a $T \cos \theta = P \sin \theta$ si le moment global est nul, soit $\tan \beta = \frac{T}{P}$. Les expressions de T et de P étant identiques aux coefficients C_x et C_p près, on en déduit: $\frac{C_x}{C_p} = \frac{V}{R\omega}$, soit:

$$\omega = \frac{V}{R} \frac{C_p}{C_x} \sim 20 \frac{V}{R}$$

Il faut pour cela que l'incidence de l'aile soit de α_0 par rapport à V_{app} , soit de $\beta - \alpha_0$ par rapport au plan de rotation.



3. Un moulin qui tourne dans le vide n'est pas très intéressant. Supposons à présent que la rotation soit freinée par un moment résistant $\mathcal{M}$ qui sert par exemple à moudre du grain (ou faire tourner un alternateur pour une éolienne). Dans le cas général, quel moment chaque aile du moulin (de surface alaire S) exerce-t-elle par rapport à l'axe de rotation? **0.5 pt**

En déduire une expression de la puissance $\mathcal{P}$ fournie par les 4 ailes du moulin (pour ceux qui auraient oublié, la puissance d'un couple moteur est donnée par $\mathcal{M}\omega$). **0.5 pt** Simplifier cette expression dans le cas $\beta \ll 1$ et montrer que cette puissance présente un optimum ω_{opt} en vitesse de rotation (en pratique on peut ajuster cette vitesse en choisissant les bons engrenages pour un moulin traditionnel ou la charge de l'alternateur sur une éolienne). **1pt**

Estimer la puissance maximale développée par le moulin pour une vitesse de vent de 5 m/s (petite brise), une surface alaire de $4 \times 1 \text{ m}^2$ et un rayon de rotation $R = 3 \text{ m}$. On prendra $C_x = 0.05$ **0.5pt**.

Solution: Si on reprend le schéma, le moment global pour les 4 ailes est donné par

$$\mathcal{M} = (P \sin \beta - T \cos \beta)R = \frac{1}{2} \rho_{air} V_{app}^2 4S (C_p \sin \beta - C_x \cos \beta)R$$

et donc la puissance correspondante

$$\mathcal{P} = 2\rho_{air}SV_{app}^2(C_p \sin \beta - C_x \cos \beta)R\omega = 2\rho_{air}S\frac{R^2\omega^2}{\cos^2 \beta} \cos \beta (C_p \tan \beta - C_x)R\omega$$

On utilise la relation $\tan \beta = \frac{V}{R\omega}$ et le fait que $\cos \beta \simeq 1$ car on suppose $\beta \ll 1$.

$$\mathcal{P} = 2\rho_{air}S \left(C_p \frac{V}{R\omega} - C_x \right) R^3 \omega^3$$

Si $R\omega$ est trop élevé, on tourne vite mais avec un couple faible, donc pas top pour la puissance. Réciproquement, si on tourne plus lentement le couple est plus fort mais la vitesse de rotation plus faible, ce qui n'est pas top non plus. On passe donc par un optimum que l'on trouve par $d\mathcal{P}/d\omega = 0$:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{3} \frac{V}{R} \frac{C_p}{C_x} = \frac{2}{3} \omega_{max}$$

La puissance maximale s'écrit alors:

$$2\rho_{air} \left(\frac{3}{2}C_x - C_x \right) S \left(\frac{2}{3} \frac{C_p}{C_x} V \right)^3 = \rho_{air} C_x S \left(\frac{2}{3} \frac{C_p}{C_x} V \right)^3 = 14 \text{ kW}$$