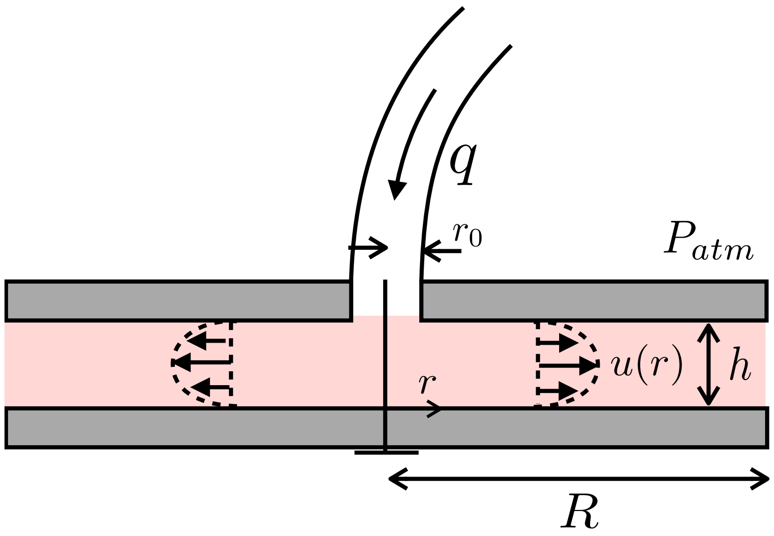
2. Clap

Régime visqueux ($\delta \gg h$)



écoulement de la forme: $u_r(r,z)$

La conservation du débit nous incite à chercher une solution de la forme:

$$u_r(r,z) = \frac{r_0}{r} f(z)$$

Une telle solution vérifie bien:

$$2\pi r \int_0^h u_r \, dz = 2\pi r_0 \int_0^h f(z) \, dz = cte = q$$

Reste à résoudre la loi de Stokes (gravité négligée)

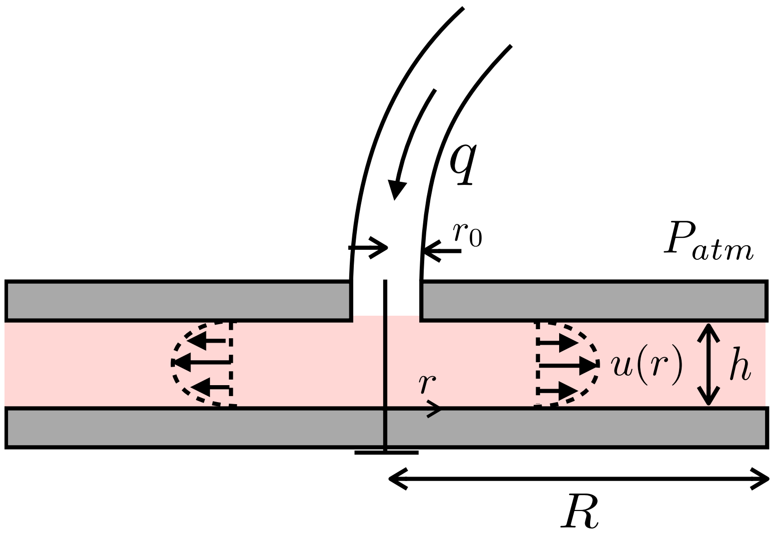
On regarde le formulaire (coordonnées cylindriques):

composante sur $\mathbf{e}_r$
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} \right)$$

avec
$$\Delta u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$$

2. Clap

Régime visqueux ($\delta \gg h$)



avec: $u_r(r,z) = \dfrac{r_0}{r} f(z)$

on se retrouve avec

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \frac{r_0}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \frac{r}{r_0} \frac{\partial P}{\partial r} z + A$$

$$f(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{r}{r_0} \frac{\partial P}{\partial r} z^2 + Az + B$$

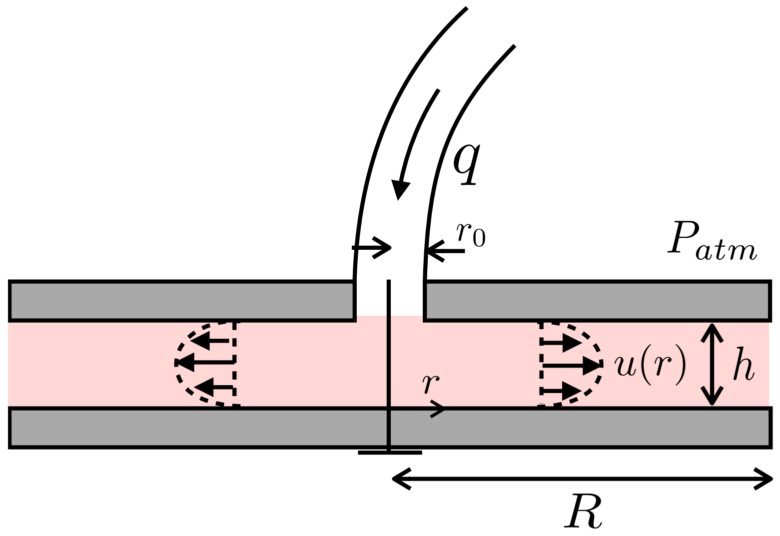
conditions aux limites: $u_r(z=0) = u_r(z=h) = 0$

$$u_r = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial r} \left(z^2 - hz\right)$$

ce qui sous entend que $\dfrac{\partial P}{\partial r} \propto \dfrac{1}{r}$ pour retrouver la forme de départ

2. Clap

Régime visqueux ($\delta \gg h$)



effectivement, la conservation du débit conduit à

$$q = 2\pi r \int_0^h u_r \, dz = -\frac{\pi r h^3}{6\eta} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{6\eta q}{\pi r h^3}$$

reste à intégrer

$$P(r) = P_{atm} - \frac{6\eta q}{\pi h^3} \ln(r/R)$$

Et enfin pour la force:

$$F = \int_{r_0}^{R} 2\pi r \left(P(r) - P_{atm}\right) dr$$

$$\boxed{F = -\frac{12\eta q R^2}{h^3} \int_{r_0/R}^{1} \xi \ln \xi \, d\xi = \frac{6\eta q R^2}{h^3} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{r_0}{R}\right) - \frac{1}{2}\right)\right)}_{>0 \quad \text{pour} \quad 0 < r_0 < R}}$$