

# TP Vibration - sur place

*Quelles sont les questions scientifiques ou techniques?*

Fréquence de résonance et flambage.

Amortissement visco-élastique.

*Par quelles expériences y répondre?*

Expériences modèles avec des poutres de géométries variées.

*Quelles techniques expérimentales?*

Acquisition vidéo des oscillations au voisinage de la transition de flambage.

Mesure de propriétés visco-élastiques au moyen d'une machine de traction.

*Quels sont les résultats?*

À vous de les montrer à travers des graphes clairs.

*Comment les interpréter?*

Ingrédients physiques, lois d'échelle, ajustement de courbes expérimentales: à vous de jouer!

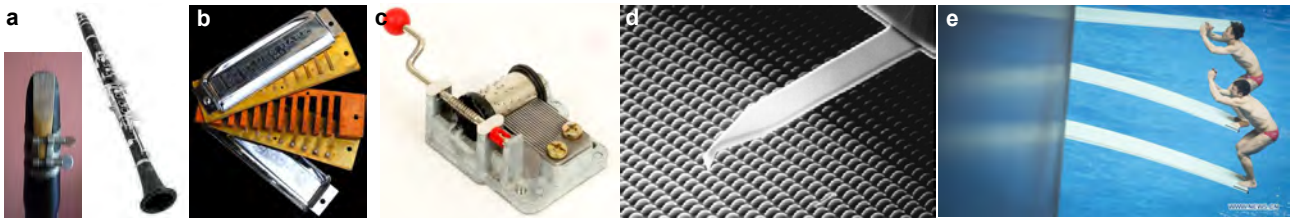


Figure 1: Exemples de poutres vibrantes. (a) et (b) anches d'une clarinette ou d'un harmonica, (c) lames d'une boîte à musique, (d) pointe d'un microscope à force atomique, (e) prise d'élan sur un plongeur.

La vibration d'une fine anche est à l'origine du son de nombreux instruments à vent tels que la clarinette ou l'harmonica. Dans ce cas, le couplage entre l'air insufflé et la vibration de l'anche est complexe. Sortir un son mélodieux demande généralement une certaine expérience. Nous nous intéresserons ici à un cas plus simple proche de la boîte à musique: une poutre encastree à une extrémité. Cette configuration est également proche de la microscopie à force atomique qui est basée sur la mesure de la déflexion d'une poutre de quelques micromètres d'épaisseur sous l'effet de la force exercée par le substrat exploré. Enfin, nous savons que nos édifices sont caractérisés par des modes de vibration dont on veut éviter la mise en résonance. Au contraire, un plongeur va adapter sa course d'élan sur le plongeur afin de profiter au mieux de la dynamique propre de ce dernier. Il s'agit dans ce TP de comprendre comment la mesure des modes propres d'une structure peuvent nous renseigner sur son seuil de flambement et enfin comment amortir ces oscillations.

## 1 Fréquence propre au voisinage du flambement

Comment prédire le seuil de flambement d'un ouvrage? Dans des cas simples, il est possible d'utiliser le résultat classique d'Euler pour donner une estimation de ce seuil. Néanmoins, l'ingénieur a besoin d'un critère précis et fait généralement appel à une simulation numérique (éléments finis). Comment ce seuil est-il déterminé numériquement?

Ce n'est a priori pas si évident, car dans un problème de flambage, la solution non-flambée est aussi une forme d'équilibre. L'ordinateur ne sait pas s'il s'agit d'un équilibre stable ou pas. En pratique, le programme de simulation calcule les différents modes de vibration de la structure. Si ces modes sont "mous" (faible fréquence propre), le seuil n'est pas loin.

Pour s'en convaincre, considérons une poutre verticale de longueur  $L$  et de module de flexion  $EI$  et soumise à une charge normale  $F$  (Fig. 4). Estimons la raideur de cette structure par rapport à une

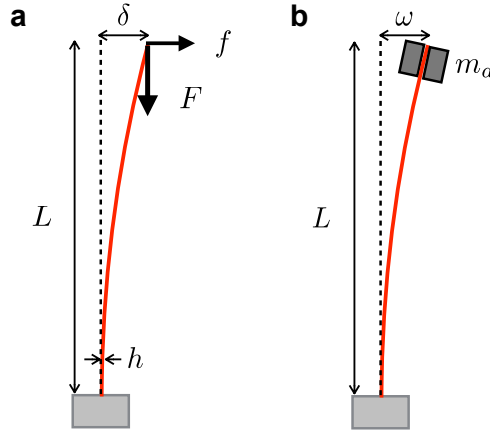


Figure 2: (a) Raideur latérale latérale d'une poutre chargée axialement. (b) Mesure de la fréquence propre d'une poutre chargée.

petite force latérale  $f$ . Appliquer  $f$  résulte en un moment  $fL$  par rapport à la base de la poutre. La déflexion  $\delta$  conduit à un moment supplémentaire dû au chargement  $F\delta$ . La somme de ces moments équilibre la flexion de la poutre:

$$fL + F\delta = \alpha EI \frac{\delta}{L^2}$$

où  $\alpha$  est un préfacteur numérique qui tient compte du détail de la courbure de poutre (et de sa condition d'encastrement). Nous en déduisons donc:

$$f = \left( \alpha \frac{EI}{L^2} - F \right) \frac{\delta}{L}$$

La raideur correspondant à  $f = k\delta$  est donc tout simplement:

$$k = \frac{F_c - F}{L}$$

avec  $F_c = \alpha EI/L^2$ . La raideur s'annule pour  $F = F_c$ : la structure ne peut résister à une sollicitation latérale aussi faible soit elle. Si la poutre possède une masse caractéristique  $m$ , la fréquence propre correspondante  $\omega = \sqrt{k/m}$  s'annule donc au seuil de flambage.

### Validation expérimentale?

Nous vous proposons de vérifier cette évolution de la fréquence propre à l'aide d'un réglet fin de 30 cm de long sur lequel on peut fixer des aimants identiques de masse  $m_a = 25.3$  g. Encastrez le réglet verticalement. Après avoir repéré approximativement le point de flambage avec les 4 aimants, filmez ses oscillations après une impulsion en variant le nombre des aimants fixés à l'extrémité libre (en évitant de mettre les aimants trop en porte-à-faux lorsqu'ils sont en nombre impair pour ne pas trop perdre la symétrie de l'édifice).

*À longueur  $L$  fixée, quelle est l'évolution de la fréquence en fonction de la masse totale des aimants? Si vous préférez, vous pouvez également fixer la charge et augmenter  $L$  jusqu'au flambage. En fonction de l'expérience que vous avez réalisée (charge variable ou longueur variable), prédire une loi simple dans le cas où la masse propre du réglet et petite devant celle des aimants. Cette loi est-elle vérifiée?*

## 2 Amortissement visco-élastique

Dans de très nombreuses applications pratiques, on cherche à limiter les vibrations des structures. Une solution classique consiste à utiliser un matériau visco-élastique pour les amortir. Nous nous intéresserons ici à une solution classique utilisée dans les pare-brises de voitures.

Considérons les vibrations d'une poutre encadrée d'épaisseur  $h_1$  et de module élastique  $E_1$  (Fig. 3). Nous avons vu comment l'équilibre entre énergies élastique et cinétique dictait la période des oscillations  $T = (\rho_1/E_1)^{1/2}L^2/h_1$ .

Ajoutons sur la poutre, une couche visco-élastique d'épaisseur  $h_2$  et de module complexe  $E_2' + iE_2''$ . On suppose que  $h_1E_1 \gg h_2E_2'$  et que la masse de la couche est négligeable devant celle de la poutre, de telle sorte que seule la partie dissipative entre en jeu. Au cours de chaque cycle, cette couche est étirée d'une déformation typique  $\epsilon \sim h_1/R \sim h_1A/L^2$ . Pour chaque période, l'énergie totale dissipée s'écrit en ordre de grandeur:

$$\mathcal{U}_{diss} \sim E_2'' h_1^2 h_2 L b \left( \frac{A}{L^2} \right)^2$$

La fraction d'énergie mécanique perdue correspond ainsi à:

$$\mathcal{U}_{diss} \sim \frac{E_2'' h_2}{E_1 h_1} \mathcal{U}_e$$

Nous pouvons en déduire que les oscillations s'arrêteront au bout d'un temps caractéristique:

$$\tau_{a1} \sim \frac{E_1 h_1}{E_2'' h_2} T$$

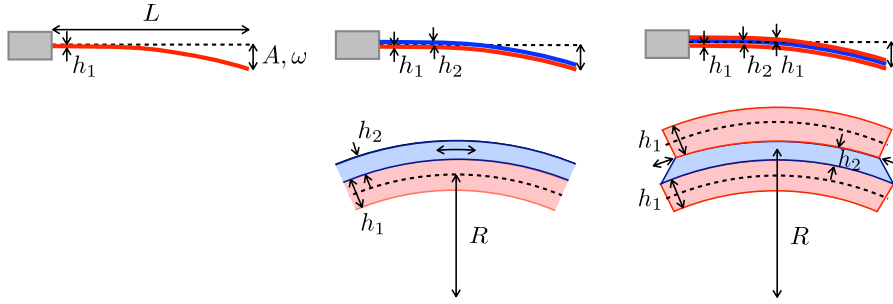


Figure 3: Amortissement des oscillations par une couche visco-élastique: une couche unique en extension, une couche en sandwich en cisaillement.

*Filmez à l'aide d'un réflex numérique l'amortissement du réglelet recouvert de la couche et comparez au cas sans couche. Cette stratégie vous paraît-elle efficace?*

*Demandez à vos camarades qui étudient la rupture du scotch de vous aider à estimer le module de dissipation de la couche visco-élastique ( $h_2 = 100 \mu\text{m}$ ) à partir d'un test de relaxation sur un bout d'adhésif libre (méthode "relax\_vibration"). Testez une bande d'une longueur de l'ordre de 10 cm et un déplacement initial de 1 cm. Les éléments pour interpréter le texte sont en annexe.*

*Le temps d'amortissement est-il compatible avec son estimation?*

La configuration utilisée dans les pare-brises de voiture est de type sandwich: une couche visco-élastique est prise entre deux plaques de verre que nous modéliserons par deux réglelets. Comme dans le cas précédent, nous supposons que la couche ne joue que sur la dissipation. Du point de vue des déformations statiques, les réglelets se comportent donc comme s'ils étaient libres. Le haut du réglelet du bas est ainsi étiré de  $\epsilon \sim h_1/R$  alors que le bas du réglelet du haut est comprimé de  $-\epsilon$ . La couche visco-élastique n'est plus vraiment étirée comme dans précédemment, mais cisailée. Pour estimer ce cisaillement, comparons les déplacements relatifs des extrémités des surfaces des réglelets en contact avec la couche. Nous obtenons  $u \sim \epsilon L$  dans une direction pour le haut de la couche et la valeur opposée pour le bas de la couche. Le cisaillement est ainsi donné par  $\epsilon_{xy} \sim h_1 L / h_2 R$ . L'hypothèse d'un faible couplage entre les deux lames n'est donc valable qu'à la condition  $E_1 h_1 / R \gg G_2' h_1 L / h_2 R$ , soit  $E_1 \gg G_2' L / h_2$ .

Nous considérons ici le module de cisaillement  $G_2$  de l'adhésif et pas son module d'extension. Si le matériau était isotrope, ces deux modules seraient à peu près équivalents, cependant le ruban adhésif est un matériau composite non isotrope. La résistance à l'extension est en effet dominée par le support en PET sur lequel les couches adhésives sont déposées alors que le cisaillement est plutôt dominé par

l'adhésif.

Dans ces conditions, l'énergie dissipée dans un cycle s'écrit à présent:

$$\mathcal{U}_{diss} \sim G_2'' h_1^3 L b \left( \frac{L}{h_2} \right)^2 \left( \frac{A}{L^2} \right)^2$$

La fraction d'énergie perdue par cycle devient ainsi:

$$\mathcal{U}_{diss} \sim \frac{G_2''}{E_1} \left( \frac{L}{h_2} \right)^2 \mathcal{U}_e$$

ce qui correspond à un temps d'amortissement:

$$\tau_{a2} \sim \frac{E_1}{G_2''} \left( \frac{h_2}{L} \right)^2 T$$

L'amortissement est donc a priori bien plus efficace que dans le cas d'une simple couche visco-élastique à la surface de la poutre.

*Réalisez l'expérience avec les paires de réglets maintenus soit par de la super-glue soit par de l'adhésif double face. L'amortissement est-il aussi efficace d'attendu?*

*Estimez les rigidités des paires par un test de flexion et comparez les à la rigidité d'un réglet unique. Commentez les valeurs obtenues. L'hypothèse de l'indépendance des réglés scotchés est-elle valable en statique?*

*Effectuez un nouveau test en cisaillement avec une bande de scotch fixée sur deux languettes de polymère rigide (typiquement un morceau de scotch de quelques centimètres et un déplacement de 1 mm sachant que  $h_2 = 100 \mu m$ ).*

## Annexe théorique

### Déformée d'une poutre encastrée, chargée à son extrémité

Dans une section d'abscisse  $x$ , le moment fléchissant résultant de la force  $F$  est:

$$\mathcal{M}(x) = -F(L - x)$$

Ce moment est aussi donné par la loi de Hooke  $\mathcal{M} = EI/R \simeq EI \frac{d^2 y}{dx^2}$  (dans la limite des faibles pentes), avec  $I = \frac{1}{12}bh^3$  pour une poutre de section rectangulaire.

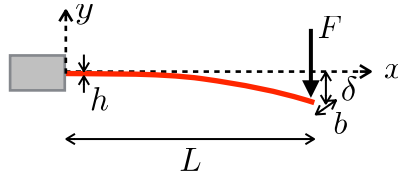


Figure 4: Flexion d'une poutre encastrée, chargée à son extrémité.

Reste à résoudre l'équation différentielle:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(L - x)$$

avec comme conditions aux limites,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  (pente nulle à l'origine). On obtient ainsi:

$$y(x) = -\frac{\delta}{2}(x/L)^2(3 - x/L) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{FL^3}{3EI} = 4 \frac{FL^3}{Eh^3b}$$

### Modes propres de vibration de flexion d'une poutre

Comment trouver l'équation de propagation d'une onde flexion le long d'une poutre? C'est un peu calculatoire, mais pas de panique, il s'agit juste d'un bilan des forces et des moments autour d'une tranche  $dx$  de la poutre (Fig. 5).

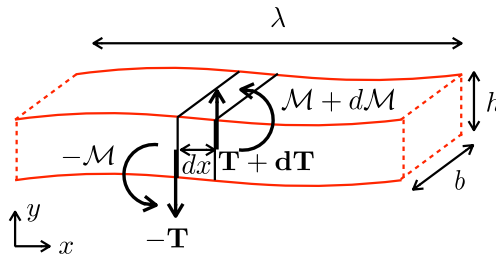


Figure 5: Bilan des forces et des moments autour d'une tranche  $dx$  de la poutre vibrante.

L'équilibre des forces se traduit par:

$$\rho h b dx \mathbf{a} = d\mathbf{T}$$

En toute rigueur l'accélération  $\mathbf{a}$  n'est pas nécessairement verticale et la force  $\mathbf{T}$  ne correspond pas exactement à un effort tranchant. Nous supposons néanmoins que les déflexions de la poutre (et donc la pente locale) sont faibles si bien que le déplacement du centre de masse de l'élément  $dx$  est essentiellement vertical ainsi que  $\mathbf{T}$ . L'équilibre des forces se traduit alors par:

$$\rho h b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Écrivons l'équilibre des moments autour du centre de masse:

$$-\mathcal{M} + \mathcal{M} + d\mathcal{M} + T dx/2 + (T + dT)dx/2 = dJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

où  $dJ = \rho b h^3 dx / 12$  est le moment d'inertie de l'élément  $dx$  autour de son centre de masse et  $\theta$  la pente de la tangente à la poutre. Dans la limite des faibles pentes, on a  $\theta = \partial y / \partial x$ . L'équilibre des moments se traduit ainsi par:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + T = \frac{1}{12} \rho b h^3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}$$

Pour se débarrasser de la force  $T$ , nous pouvons combiner les deux expressions après avoir dérivé la dernière pour faire apparaître  $\partial T / \partial x$ :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \rho h b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \rho b h^3 \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2}$$

Si la longueur caractéristique selon  $x$  vaut  $\lambda \gg h$ , l'ordre de grandeur du dernier terme est  $\rho h b (h/\lambda)^2 \partial^2 y / \partial t^2$ . Nous avons donc un facteur d'ordre  $(h/\lambda)^2$  avec le terme d'accélération. L'accélération angulaire est donc négligeable, ce qui conduit à:

$$\rho h b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} = 0$$

Reste à prendre en compte l'équation de la flexion d'une poutre (dans la limite de faible pente):

$$\mathcal{M} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Nous obtenons l'équation d'onde:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho h b}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

dont nous pouvons chercher des solutions de la forme  $y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t}$ .

Cela revient à résoudre:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k^4 Y = 0 \quad \text{avec} \quad k = \left( \frac{\rho h b}{EI} \omega^2 \right)^{1/4}$$

Pour cela, on cherche les racines du polynôme caractéristique  $r^4 = k^4$  qui sont  $\pm k, \pm ik$ . Les solutions sont donc de la forme  $Y(x) = a_1 e^{kx} + a_2 e^{-kx} + a_3 e^{ikx} + a_4 e^{-ikx}$ . Toutes les combinaisons linéaires de ces solutions sont également solution et il est plus commode de les écrire de la manière suivante:

$$Y(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \sinh(kx) + d \cosh(kx)$$

Les constantes  $a, b, c, d$  sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Dans le cas d'une poutre encastree à son extrémité, ces conditions s'écrivent:

- $Y(0) = b + d = 0$  (pas de déplacement au niveau de l'encastrement)
- $Y'(0) = k(a + c) = 0$  (angle nul à l'encastrement)
- $\mathcal{M}(L) \sim Y''(L) = k^2(-a \sin(kL) - b \cos(kL) + c \sinh(kL) + d \cosh(kL)) = 0$  (moment nul à l'extrémité libre)
- $T(L) \sim \mathcal{M}'(L) \sim Y'''(L) = k^3(-a \cos(kL) + b \sin(kL) + c \cosh(kL) + d \sinh(kL)) = 0$  (pas d'effort tranchant à l'extrémité libre)

Nous cherchons donc les solutions du système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \\ -\cos(kL) & \sin(kL) & \cosh(kL) & \sinh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les modes propres de vibration qui sont indépendants de l'amplitude des oscillations, c'est-à-dire des solutions où les constantes  $a, b, c$  et  $d$  sont proportionnelles à une constante arbitraire. Ceci n'est possible que si le déterminant de la matrice est nul. Passons les calculs, le déterminant vaut  $2 \cosh(kL) \cos(kL) + 2$ . La nombre d'onde propre  $k$  doit donc vérifier:

$$\cosh(kL) \cos(kL) = -1$$

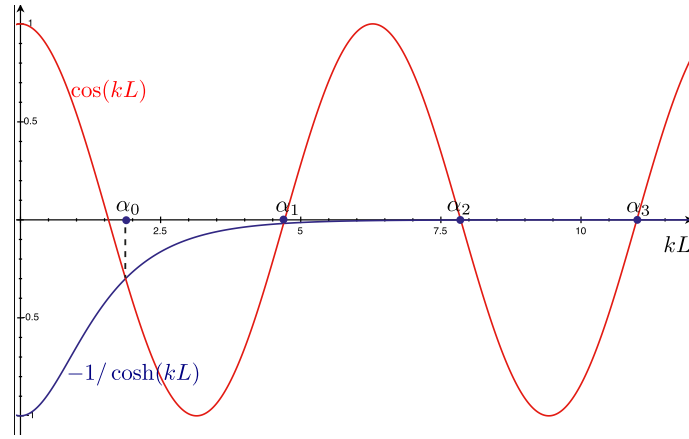


Figure 6: Détermination graphique des solutions de  $\cosh(kL) \cos(kL) = -1$ .

Une manière simple de visualiser les solutions consiste à tracer  $\cos(x)$  et  $-1/\cosh(x)$  et de regarder quand les deux courbes s'intersectent (Fig. 7).

Le mode fondamental correspond à  $k_0L = 1.875$ , le 1er harmonique à  $k_1L = 4.695$  et les harmoniques suivants sont donnés par  $k_iL \simeq (2i + 1)\pi/2$ . Nous pouvons en déduire l'expression des fréquences propres de vibrations:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{EI}{\rho h b} \right)^{1/2} k_i^2$$

Au final, si on prend  $I = h^3b/12$ , nous obtenons pour le mode fondamental:

$$f_0 = \frac{1.875^2}{2\pi\sqrt{12}} \frac{h}{L^2} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \simeq 0.161 \frac{h}{L^2} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2}$$

Ce qui correspond bien à la loi d'échelle que nous avons établie en 2 lignes de calcul.

Les harmoniques suivants sont donnés par:

$$f_1 = 6.27f_0, \quad f_2 = 17.55f_0, \quad f_3 = 34.39f_0, \quad f_4 = 56.85f_0 \dots$$

En réinjectant les valeurs de  $k_i$  dans les solutions, on peut retrouver les formes des différents modes. Le mode fondamental et les 3 premiers harmoniques sont représentés figure 7. Le fait que les différents harmoniques ne soient pas des multiples rationnels du mode fondamental est à l'origine du son particulier des boîtes à musique ou des carillons.

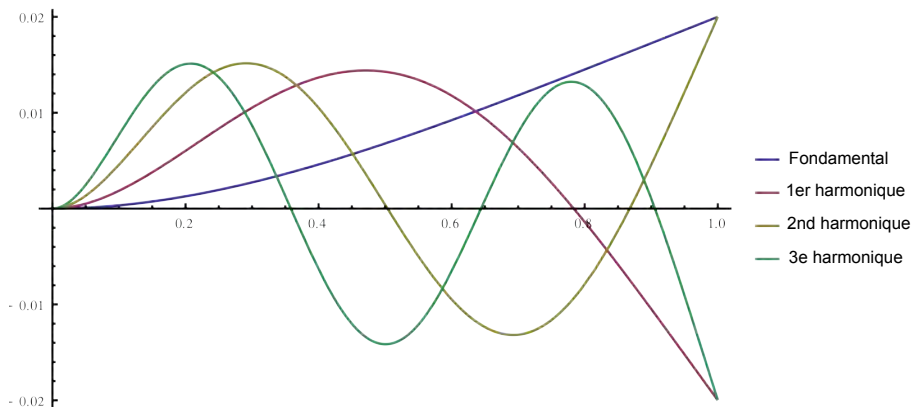


Figure 7: Premiers modes de vibration d'une poutre encadrée (source Wikipedia).

## Mesures viscoélastiques

Pour estimer les propriétés viscoélastiques de notre bande adhésive, l'idéal serait de mesurer une réponse à une sollicitation sinusoïdale car nous aurions directement accès à  $E'(\omega)$  et  $E''(\omega)$ . On peut

cependant extraire des informations à partir d'un simple test de relaxation. On déforme pour cela l'échantillon pendant une courte durée jusqu'à lui imposer une déformation (en extension ou cisaillement)  $\epsilon_0$ . On mesure alors l'évolution de la contrainte en maintenant cette déformation.

Dans le cas du ruban adhésif, nous obtenons la forme générique illustrée figure 8. On peut très grossièrement modéliser le comportement observé par un modèle de type Kelvin-Voigt avec 2 ressorts élastiques  $E_a$  et  $E_b$  et un piston de viscosité  $\eta_a$  (les modules élastiques peuvent ici aussi bien correspondre aux modules de Young qu'aux modules de cisaillement). À partir des données expérimentales, nous pouvons estimer une contrainte  $\sigma_0$  jusqu'à la déformation  $\epsilon_0$ , une contrainte aux temps longs  $\sigma_f$  et un temps de relaxation  $\tau$ .

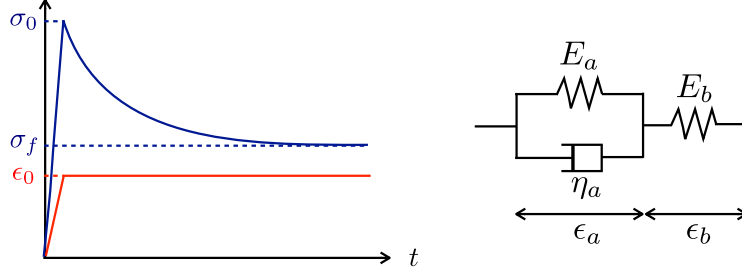


Figure 8: Forme générique de la réponse d'un ruban adhésif lors d'un test de relaxation. Modèle rhéologique simplifié.

Lors de la déformation initiale rapide, le piston est très rigide si bien que  $\sigma_0 = E_b \epsilon_0$ . Le piston ne joue plus aux temps longs, ce qui conduit à  $\epsilon_{af} = \sigma_f / E_a$  et  $\epsilon_{2f} = \sigma_f / E_b$ , soit  $\epsilon_0 = (1/E_a + 1/E_b) \sigma_f$ .

Pour prédire la relaxation, il suffit d'écrire:

$$\sigma = E_a \epsilon_a + \eta_a \dot{\epsilon}_a = E_b \epsilon_b \quad \text{avec} \quad \epsilon_a + \epsilon_b = \epsilon_0$$

On se retrouve avec:

$$(E_a + E_b) \epsilon_a + \eta_a \dot{\epsilon}_a = E_b \epsilon_0$$

Que l'on peut facilement intégrer en prenant comme condition initiale  $\epsilon_a(t=0) = 0$ , ce qui conduit à:

$$\epsilon_a(t) = \epsilon_0 \exp\left(-\frac{E_a + E_b}{\eta} t\right) + \frac{E_b}{E_a + E_b} \epsilon_0$$

On en déduit la variation de la contrainte:

$$\sigma(t) = \epsilon_0 E_b \left( \frac{E_a}{E_a + E_b} + \frac{E_b}{E_a + E_b} e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\eta_a}{E_a + E_b}$$

Une fois que l'on a estimé les grandeurs caractéristiques  $E_a$ ,  $E_b$  et  $\eta_a$ , on peut facilement retrouver le comportement à une sollicitation périodique de pulsation  $\omega$ . On se retrouve en effet avec deux modules complexes en série  $E_a^* = E_a + i\omega\eta_a$  et  $E_b^* = E_b$ . Nous obtenons ainsi le module effectif:

$$E^* = \frac{E_a^* E_b^*}{E_a^* + E_b^*} = \frac{(E_a + i\omega\eta_a) E_b}{E_a + E_b + i\omega\eta_a} = \frac{E_b (E_a^2 + E_a E_b + \omega^2 \eta_a^2) + i\omega\eta_a E_b^2}{(E_a + E_b)^2 + \omega^2 \eta_a^2}$$

Nous nous intéressons ici à une situation fortement amortissante. Dans la limite  $\omega\eta_a \gg E_a, E_b$ , l'expression précédente se simplifie beaucoup:

$$E^* \simeq E_b + i \frac{E_b^2}{\omega\eta_a}$$

La même analyse s'applique au test de cisaillement. Dans ce cas, il suffit de remplacer  $E$  par  $G$  et la déformation en extension  $\epsilon_{xx} = \Delta L/L$  par la déformation de cisaillement  $\epsilon_{xy} = \delta L/h$ .



# TP Vibration - à la maison

## Verres chantants



Figure 9: Verrillon par percussion (source Wikipedia) et par frottement (source Du merveilleux caché dans le quotidien).

Le son émis par un verre musical est d'autant plus grave que le verre est rempli, comme on l'a vu dans de TD de MSM. La tonalité est-elle la même si on percute le verre ou si on le frotte? Le son dépend-il de la nature du liquide?

**Expériences à réaliser:** Mesurer la fréquence du son émise par le verre après percussion ou par friction en fonction de son remplissage et du liquide utilisé. Essayer de mesurer le temps d'atténuation du son après une percussion (il peut alors être intéressant de remplacer le liquide par de la mousse de savon qui est connue pour atténuer les ondes sonores). On pourra également tester "l'expérience du mug" présentée en fin de TD.

**Interprétation physique:** Interpréter par un équilibre entre énergie élastique et énergie cinétique la variation de la tonalité en fonction des différents paramètres physiques.

### Matériel nécessaire:

- verre cylindrique (que l'on vous fournira)
- smartphone muni de l'application Phyphox

### Petite annexe théorique - variante de modèle TD

(<https://dl.espci.fr/ticket/c21aa74cc09ec11c02f200ccd61b68c0>):

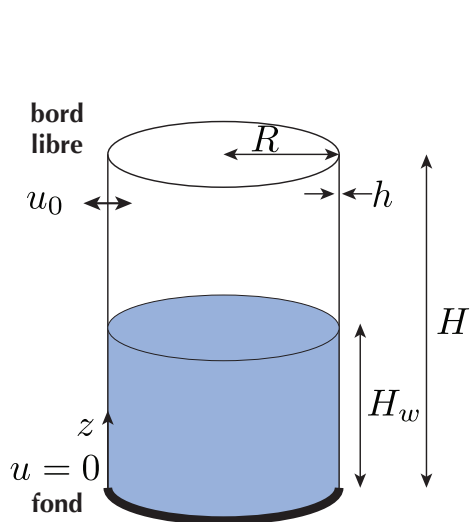


Figure 10: Le verre théorique - le cylindre avec le fond.

### Mode d'oscillation d'un verre

Déplacement d'un point sur le bord du verre à tout instant (une oscillation sinusoïdale):

$$u(t) = u_0 \frac{z}{H} \cos(\omega t)$$

La vitesse typique pour les deux corps (verre+eau):

$$v_0 = \omega u_0$$

L'énergie élastique et cinétique maximale stockée:

$$U_{el}^v \sim \int_0^H E_v \frac{h^3}{R^3} u_0^2 \left(\frac{z}{H}\right)^2 dz \sim E_v \frac{H h^3}{R^3} u_0^2$$

$$U_{cin}^v \sim \int_0^H \rho_v \omega^2 u_0^2 R h \left(\frac{z}{H}\right)^2 dz \sim \rho_v \omega^2 u_0^2 R H h$$

$$U_{cin}^w \sim \int_0^{H_w} \rho_w \omega^2 u_0^2 R^2 \left(\frac{z}{H}\right)^2 dz \sim \rho_w \omega^2 u_0^2 R^2 H_w^3 / H^2$$

En imposant l'équivalence entre l'énergie élastique totale et l'énergie cinétique totale, nous obtenons pour la fréquence de vibration  $\omega_0$  de la structure composite:

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{E_v H \frac{h^3}{R^3}}{\rho_v R H h + \rho_w R^2 H_w^3 / H^2}}$$