

# Examen de mécanique des fluides 2020

Les quatre problèmes sont indépendants.

## 1 Trains de liquides

### 1.1 Goutte solitaire

On insère dans un tube capillaire (de rayon  $R$  petit par rapport à la longueur capillaire  $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ ) une goutte qui prend la forme d'une colonne de liquide de longueur  $L_1 \gg R$ . Le tube avec sa petite goutte est placé sur une table parfaitement horizontale (Fig. 1). On suppose que le tube est parfaitement mouillé par le liquide. Ainsi, le ménisque est hémisphérique avec la courbure indiquée sur le schéma.

1. Si on note  $\gamma_1$  la tension de surface entre le liquide et l'air et  $p_{atm}$  la pression atmosphérique, quelles sont les pressions aux points  $A$  et  $B$  situés dans le liquide juste au niveau de l'interface ? La goutte va-t-elle avancer ?

2. Supposons que le liquide soit de l'eau. On ajoute très délicatement une petite quantité de surfactant (du produit vaisselle) sur le ménisque à l'arrière de la goutte (tout près du point  $B$ ). On rappelle qu'un surfactant tend à diminuer la tension de surface entre l'eau et l'air. Que va-t-il se passer ? Sachant que le produit vaisselle est soluble dans l'eau, pensez-vous que le phénomène va durer longtemps ?

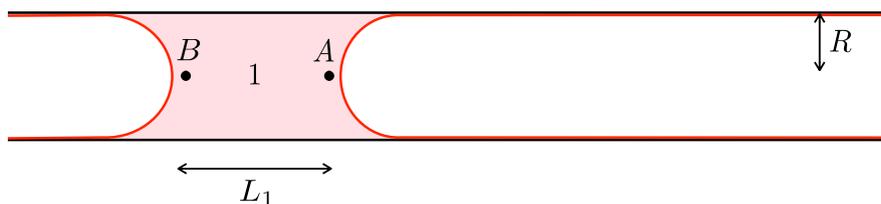


FIGURE 1 – Goutte unique dans un tube horizontal.

**Solution:**  $p_A = p_B = p_{atm} - 2\gamma_1/R$  : pas de gradient de pression donc pas d'écoulement. Si  $\gamma_1$  diminue à l'arrière de la goutte, la pression est plus faible à l'avant qu'à l'arrière. La goutte va donc avancer dans le tube, mais pas très longtemps car le surfactant soluble va se mélanger et on aura rapidement la même tension de surface aux niveaux des deux ménisques.

### 1.2 Une goutte derrière l'autre

On ajoute à présent une seconde goutte à l'arrière de la première. Dans l'exemple illustré, le premier liquide est de l'éthylène glycol coloré en rouge de tension de surface avec l'air  $\gamma_1 = 48$  mN/m et le second de l'huile de silicone de tension  $\gamma_2 = 20$  mN/m. La tension interfaciale entre les deux liquides vaut  $\gamma_{12} = 18$  mN/m. Dans cette configuration, l'éthylène glycol mouille parfaitement le verre par rapport à l'air et à l'huile et l'huile mouille le tube à l'arrière du train de liquide. Les ménisques sont donc hémisphériques avec les concavités représentées Fig. 2.

Le petit train avance alors spontanément à une vitesse pratiquement stationnaire jusqu'à atteindre l'autre extrémité du tube à une vitesse de l'ordre de 1 mm/s pour un tube de rayon  $R = 0.5$  mm et des longueurs de gouttes  $L_1$  et  $L_2$  de l'ordre de plusieurs centimètres (et ce, bien que le tube

demeure horizontal). Nous proposons de comprendre les ingrédients physiques qui dictent cet écoulement.

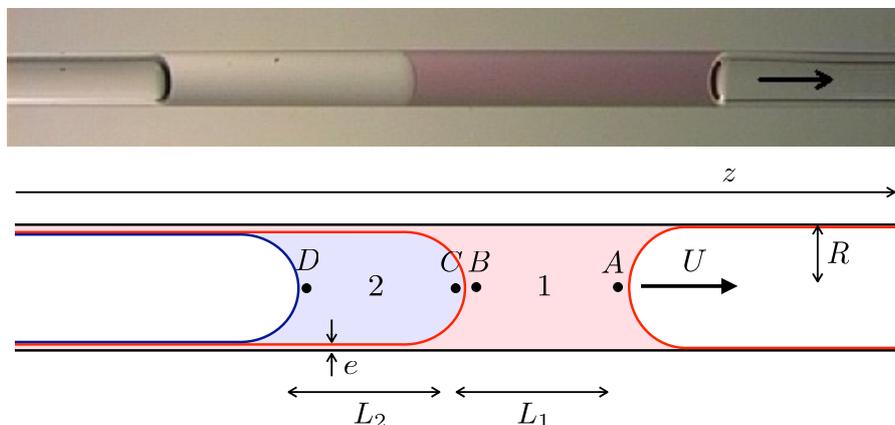


FIGURE 2 – Un train de liquide composé d’une première goutte d’éthylène glycol et une seconde d’huile de silicone s’écoule spontanément le long d’un tube capillaire horizontal jusqu’à atteindre l’extrémité du tube.

3. Quelles sont les pressions aux points A et D ? Quelle relation lie les pressions aux points B et C ?
4. Nous considérons le cas où l’huile a la même viscosité  $\eta_2$  que celle du glycol  $\eta_1 = 20 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ . Quel est le profil de vitesse typique de l’écoulement ?
5. Quelle loi (sans les préfacteurs) lie la vitesse de l’écoulement à la distribution de pression dans le tube ?
6. Représenter sur un graphe l’évolution du champ de pression  $P(z)$  le long du train liquide.
7. Déterminer en loi d’échelle la vitesse du train en fonction des différentes données géométriques et physico-chimiques du problème.

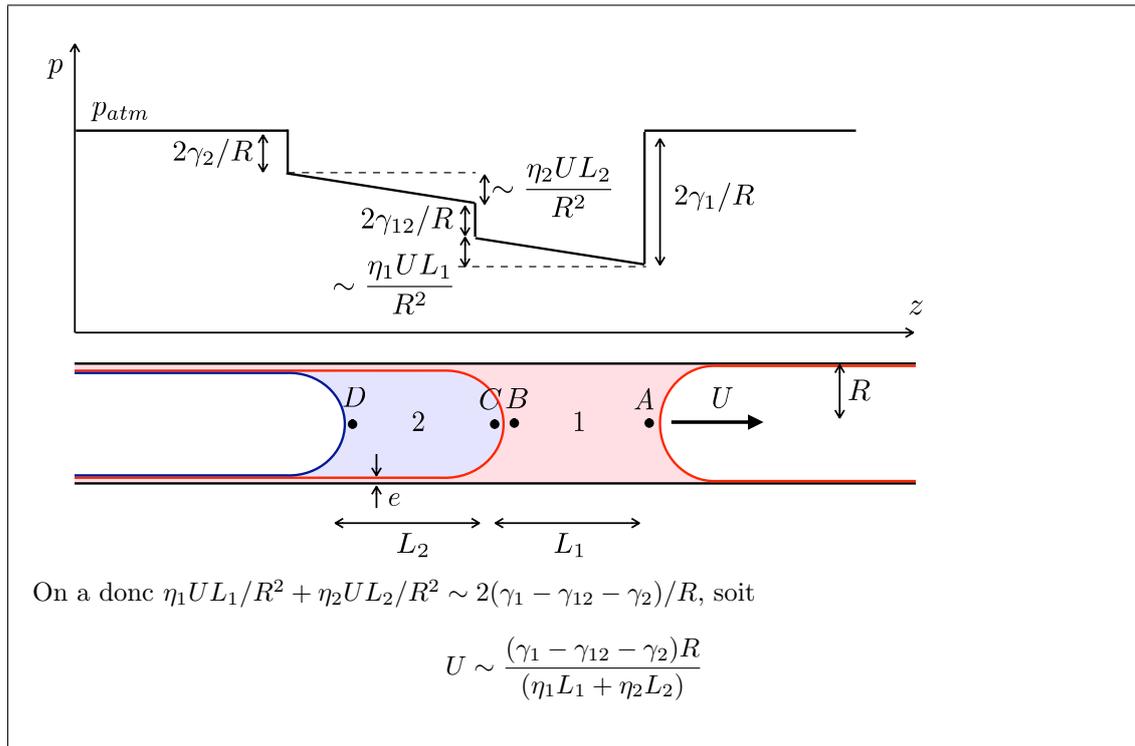
**Solution:**  $p_A = p_{atm} - 2\gamma_1/R$ ,  $p_D = p_{atm} - 2\gamma_2/R$ ,  $p_C = p_B + 2\gamma_{12}/R$

On peut estimer le nombre de Reynolds sans trop réfléchir en considérant

$\rho UR/\eta \sim 10^3 10^{-3} 10^{-3} / 20 \cdot 10^{-3} \sim 0.05$  et on en déduit que l’écoulement est à  $Re \ll 1$ .

En fait une estimation plus rigoureuse de  $Re$  serait :  $\rho u \cdot \nabla u \sim \rho u^2/L$  (car  $u$  est essentiellement dirigé dans la direction du tube) et  $\eta \Delta u \sim \eta u/R^2$ , ce qui conduit à  $Re \sim \rho UR^2/\eta L \sim 5 \cdot 10^{-4} \ll 1$ . Dans tous les cas, on a un écoulement de Poiseuille avec un profil parabolique.

La loi de Poiseuille s’écrit en loi d’échelle :  $\nabla p \sim -\eta U/R^2$ .



## 2 Étalement d'une résine

En photolithographie, on réalise des couches de polymères photosensibles d'épaisseur contrôlée. La première étape consiste à verser un volume  $V$  de fluide de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$  sur un support plat horizontal en silicium, appelé wafer de silicium.

Nous cherchons à prédire, par des arguments en loi d'échelle, la variation du rayon  $R(t)$  de cette couche de liquide visqueux qui s'étale sur un substrat immobile.

Pour cela, schématisons le volume versé par une galette d'épaisseur maximale  $e(t)$  petite devant son rayon  $R(t)$  (Figure 3).

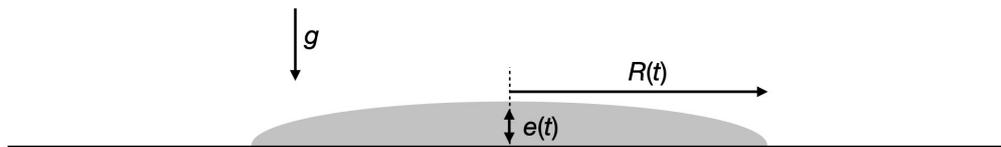


FIGURE 3 – Coupe d'une goutte de résine liquide qui s'étale sur un wafer. La goutte a un rayon  $R(t)$  et une épaisseur typique  $e(t)$ .

Pour fixer les idées, nous utiliserons une résine photosensible SU8 2100 de viscosité cinématique  $\nu = 45.10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ , comparable à du miel épais, et de densité 1.24, qui s'étale sur un wafer de silicium de 10 cm de diamètre. Le volume versé initial est de 2 ml.

1. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est très petit devant 1. Dans ces conditions, à quoi se réduisent les équations de Navier-Stokes? Quelle est la force motrice? Quel effet s'oppose au

mouvement ? (on négligera les effets de la tension de surface).

2. Écrire en loi d'échelle le gradient de pression moteur.

3. En déduire que le rayon  $R(t)$  et l'épaisseur  $e(t)$  sont liés par une équation du type :

$$R \frac{dR}{dt} \sim \frac{\rho g}{\eta} e^3 \quad (1)$$

4. Quelle autre relation relie  $R(t)$  et  $e(t)$  ? L'écrire en loi d'échelle.

5. En déduire les lois  $R(t)$  et  $e(t)$ . Comparer avec les données reportées sur la Figure 4.

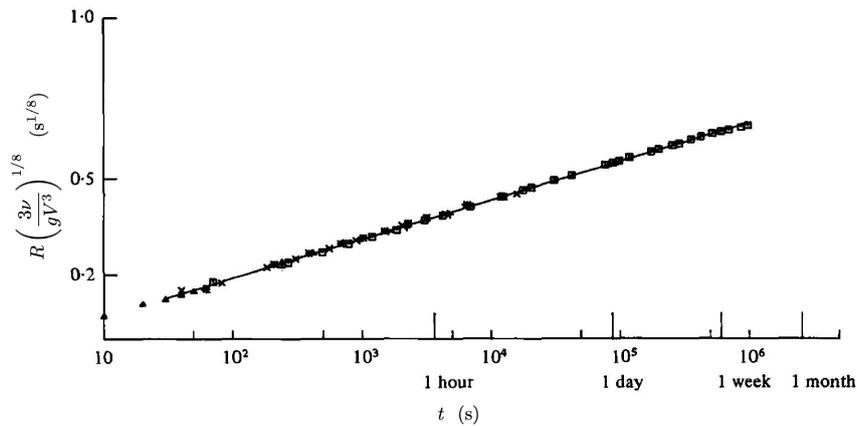


FIGURE 4 – Valeurs expérimentales de la quantité  $R(3\nu/gV^3)^{1/8}$  tracées en fonction du temps  $t(s)$  - en coordonnées logarithmiques - pour des huiles silicones de différentes viscosités.

6. Quel temps faut-il attendre pour que le wafer soit entièrement recouvert ? Quelle est alors l'épaisseur moyenne de la couche ?

**Solution:**  $\nu = 45 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $U \simeq 10^{-3} \text{ m/s}$ ,  $L \simeq 10^{-3} \text{ m}$ , ce qui donne  $Re \simeq 2 \cdot 10^{-5}$ .

1. Equation de Stokes :  $0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$ . La force motrice est la gravité, les effets visqueux s'opposent au mouvement.

2. Le gradient de pression moteur vaut :  $\nabla p = \frac{\rho g e(t)}{R(t)}$ .

Ce n'est pas aussi évident que ça. Ce qu'il faut bien voir, c'est que l'écoulement est essentiellement horizontal et l'écoulement vertical sera juste pris en compte dans la conservation du volume. C'est l'hypothèse de lubrification, comme la couche de liquide écrasée entre 2 plaques vue en TD. Dans le TD la gravité était négligeable par rapport à la pression exercée par rapport à l'opérateur. Ici, pas d'opérateur musclé et c'est la gravité qui joue.

Pour valider cette hypothèse, on utilise  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  soit en loi d'échelle  $u_r/R \sim u_z/e$ . L'hypothèse  $u_z \ll u_r$  n'est donc valable que si  $e \ll R$ .

Si on regarde les composantes selon  $z$  de l'équation de Stokes, on obtient donc (inertie et vitesse verticale négligées) :  $P(r, z) = P_{atm} + \rho(e(r) - z)$ .

Pour les composantes selon  $r$  qui nous intéressent, on a bien  $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g \frac{\partial e}{\partial r} \sim \frac{\rho g e}{R}$ .

3. Équation de Stokes (composantes horizontales) :  $\frac{\rho g e(t)}{R(t)} \sim \eta \frac{U}{e^2}$  avec  $U = \dot{R}$ , ce qui donne  $R \frac{dR}{dt} \sim \frac{\rho g}{\eta} e^3$ .

4. Conservation de la masse :  $R^2 e \sim V$ .

5. On obtient :  $R^7 \dot{R} \sim \frac{\rho g V^3}{\eta}$ , soit  $R \sim (\frac{\rho g V^3}{\eta} t)^{1/8}$  et  $e \sim (\frac{\eta V}{\rho g t})^{1/4}$ .

6. On trouve  $t=2.10^4$ s, soit 6 h pour couvrir un disque de 5 cm de rayon avec un volume de 2 ml. L'épaisseur est alors de  $250\mu\text{m}$ ...

### 3 Avion à pédales

À la fin des années 1980, une équipe du MIT a conçu et réalisé un avion susceptible de voler sur une centaine de kilomètres uniquement avec la propulsion humaine. Le schéma de l'avion et ses principales caractéristiques sont indiquées sur la fig. 5.

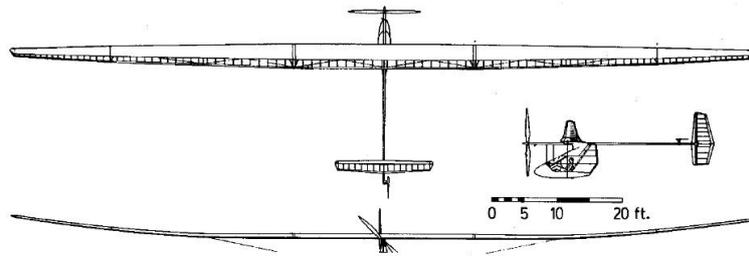


FIGURE 5 – Avion à propulsion humaine. Masse à vide  $m_a = 42$  kg, envergure  $L = 35$  m, surface de l'aile  $S = 31$  m<sup>2</sup>, vitesse  $U = 8$  m/s. Le fuselage enveloppant le pilote apporte une contribution à la traînée quantifiée par  $S_f C_{Df} = 0,3$  m<sup>2</sup>.

Les coefficients de portance et de traînée calculés pour l'aile sont données sur la fig. 6.

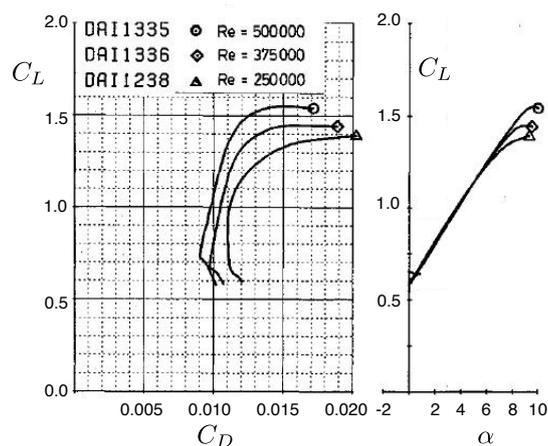


FIGURE 6 – Polaires calculées pour l'aile de l'avion à propulsion humaine. Coefficient de portance  $C_L$  en fonction du coefficient de traînée  $C_D$ . Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha$  (en degrés). Les coefficients sont calculés pour 3 valeurs du nombre de Reynolds.

1. Quelle est la valeur pertinente du nombre de Reynolds, basé sur la corde de l'aile ? La corde est la largeur de l'aile dans la direction de déplacement de l'avion.

**Solution:** La longueur moyenne de la corde est  $\ell = S/L = 88$  cm. Le nombre de Reynolds correspondant est  $U\ell/\nu = 470000$ . On considérera donc les polaires calculées à  $Re = 500000$ .

2. En écrivant l'équilibre mécanique de l'avion en vol horizontal stationnaire, déterminer la masse adéquate du pilote, sachant qu'il est capable de développer  $4\text{W/kg}$  sur la durée du vol, que le rendement du système propulsif est estimé à  $90\%$  et en prenant un angle d'incidence de  $4^\circ$  sur l'aile. La traînée induite de l'aile joue-t-elle un rôle significatif ?

**Solution:** Equilibre des forces sur l'avion : la force portante équilibre le poids :  $F_p = (m_a + m_p)g$ . La force propulsive équilibre la traînée aérodynamique  $F_T$  et le travail par unité de temps de la traînée est égal à la puissance motrice du pilote  $P$  multipliée par le rendement du système de transmission  $k$  :  $F_T U = kP = k\beta m_p$  où  $\beta$  est la puissance spécifique du pilote ( $4\text{W/kg}$ ).

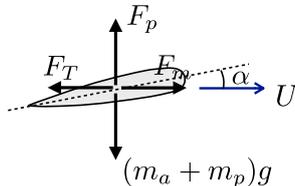
La force de portance s'écrit :

$$F_p = 1/2\rho U^2 S C_L(\alpha)$$

et la force de traînée

$$F_T = 1/2\rho U^2 [S C_D(\alpha) + S C_L(\alpha) + S_f C_{Df}]$$

où  $C_I$  est le coefficient de traînée induite (due aux deux tourbillons émis en bouts d'ailes qui prolongent les tourbillons responsables de la portance).



**Note :** Attention, une force de portance est par définition perpendiculaire à la vitesse et la force de traînée dans la direction opposée (indépendamment de l'orientation de l'aile qui elle fixe les valeurs de  $C_D$  et  $C_p$ )

L'équilibre vertical donne :

$$1/2\rho U^2 S C_L(\alpha) = (m_a + m_p)g$$

et l'équilibre horizontal :

$$1/2\rho U^3 S [S C_D(\alpha) + S C_I(\alpha) + S_f C_{Df}] = k\beta m_p.$$

$$(m_a + m_p)g U \frac{C_D(\alpha) + C_I(\alpha) + s_f}{C_L(\alpha)} = k\beta m_p$$

où on a introduit le rapport  $s_f = S_f C_{Df} / S \approx 10^{-2}$ .

Le coefficient de traînée induite est relié au coefficient de portance et au rapport d'aspect :  $C_I = C_L^2 S / \pi L^2$ .

Note : dans le TD on a vu une forme légèrement différente :  $C_i = \frac{C_p^2 \ln(L/\ell)}{4\pi(L/\ell)}$ . Mais si

on estime  $\ln(L/\ell)$ , on trouve 3.7 qui n'est pas loin de 4 et rend compatibles les 2 expressions. En pratique, il y a toujours un préfacteur numérique qui dépend de la forme exacte du bout de l'aile.

En prenant un angle d'incidence  $\alpha = 4^\circ$ , on a  $C_L \approx 1$ ,  $C_D \approx 10^{-2}$  et  $C_I \approx 8 \times 10^{-3}$  et  $C_D + C_I + s_f \approx 2,8 \times 10^{-2}$ .

La masse du pilote est donnée par :

$$\frac{m_a}{m_p} = \frac{k\beta}{gU} \frac{C_L}{C_D + C_I + s_f} - 1$$

Avec  $\beta = 0,9$ , on trouve  $m_p \approx 66$  kg correspondant à une puissance motrice de 260 W.

En fait, la seule connaissance de la portance est de la vitesse suffit à déterminer la masse du pilote :

$$m_p = \frac{1}{2} \frac{\rho U^2 S C_L(\alpha)}{g} - m_a \approx 60 \text{ kg}$$

Et après on peut vérifier que la puissance fournie compense la puissance dissipée par la force de traînée en tenant compte non seulement de la traînée de forme, mais également de la traînée induite.

## 4 Chute d'un micro-objet

Considérons un objet microscopique constitué d'un corps sphérique de rayon  $R$  et d'une unique tige de longueur  $L$  (fig. 7) dont le rayon  $a$  est beaucoup plus petit que  $L$  et  $R$ .  $R$  et  $L$  ont des dimensions à peu près comparables de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ . Ce micro-objet est plus dense que l'eau avec une masse volumique  $\rho_m = 1200 \text{ kg/m}^3$ .

1. *Quelle hypothèse peut-on faire a priori sur l'expression de la force de traînée lorsque cet objet chute dans l'eau? Quelle est en ordre de grandeur sa vitesse de chute et quel est le nombre de Reynolds associé?*

**Solution:** Compte tenu de la petite taille de l'objet, on peut faire l'hypothèse que l'écoulement est à petit nombre de Reynolds et que la force de traînée est de la forme  $F_T \sim \eta V L$ . La vitesse de chute est déterminée par l'équilibre entre la force de traînée et le poids apparent  $\delta\rho g L^3$  ce qui donne une vitesse  $V \sim \delta\rho g L^2 / \eta$ . Avec  $\delta\rho = 200 \text{ kg/m}^3$  et  $L = 10 \mu\text{m}$ , on a  $V \sim 0,2 \text{ mm/s}$  et  $Re = VL/\nu \sim 2 \times 10^{-3}$  confirmant l'hypothèse de départ.

2. Examinons plus en détail les conditions de chute. La tige est inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale et la vitesse de chute fait un angle  $\beta$  avec la verticale. On applique un couple extérieur (ce pourrait être avec un champ magnétique) sur l'objet de façon à maintenir l'angle  $\alpha$  constant dans le temps. *En faisant le bilan des forces exercées sur le microorganisme, montrer que l'angle de chute  $\beta$  est donné par :*

$$\tan \beta = \frac{(x-1) \tan \alpha}{1 + x \tan^2 \alpha}$$

où  $x$  est le rapport  $(2L+3R)/(L+3R)$ .

On rappelle que  $\tan(a+b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a \tan b)$ .

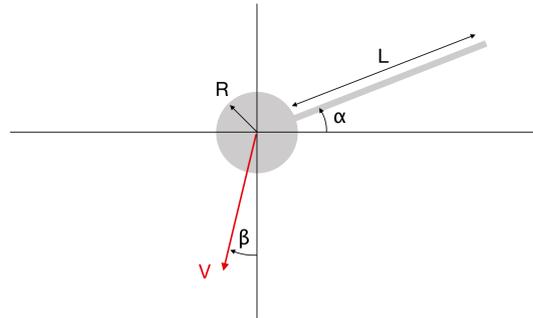


FIGURE 7 – Un objet microscopique constitué d'une sphère et d'une tige tombant dans un liquide.

**Solution:**

À très petit Reynolds, la somme des forces sur un objet est nulle. La traînée équilibre donc le poids  $P$ . La projection de la traînée sur l'axe du bâtonnet est  $T_{\parallel} = P \sin \alpha$ . La projection sur la normale est :  $T_{\perp} = P \cos \alpha$  Si  $\beta$  est l'angle entre la verticale et la vitesse de sédimentation,  $V_{\perp} = V \cos(\alpha + \beta)$  et  $V_{\parallel} = V \sin(\alpha + \beta)$ .

En utilisant les coefficients de traînée pour un objet allongé et pour une sphère, on a :

$$T_{\parallel} = (2\pi\eta L + 6\pi\eta R)V_{\parallel} = P \sin \alpha$$

$$T_{\perp} = (4\pi\eta L + 6\pi\eta R)V_{\perp} = P \cos \alpha$$

soit :

$$2\pi\eta V(L + 3R) \sin(\alpha + \beta) = P \sin \alpha$$

$$2\pi\eta V(2L + 3R) \cos(\alpha + \beta) = P \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{2L + 3R}{L + 3R} \tan \alpha$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = x \tan \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{(x - 1) \tan \alpha}{1 + x \tan^2 \alpha}$$

3. On suppose que la tige est suffisamment fine pour que le centre de gravité de l'objet et le centre de poussée d'Archimède soient confondus avec le centre de la sphère. *Quel est en général le signe du moment exercé par les forces hydrodynamiques et quelle est la position stable de chute ? (ne nécessite pas de calcul).*

**Solution:** Dès l'instant où il y a une composante de vitesse normale au flagelle, il existe une composante de force normale au flagelle donnant une contribution non nulle au moment par rapport au centre de la sphère. En prenant la configuration du dessin,

le couple est dans le sens trigonométrique direct. La seule position où il n'y a pas de couple est lorsque le flagelle est vertical. C'est la position de sédimentation stable.