Champ de vitesse dans un tourbillon en passant par l'équation de Navier & Stokes

On reprend l'équation de Navier & Stokes en coordonnées cylindriques r, θ, z donnée dans l'appendice du cours.

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

où les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Comme on cherche un solution de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$, on pourrait penser qu'il faut se limiter à la 3$^{\text{e}}$ équation.
Le terme $\frac{\partial u_\theta}{\partial t}$ est nul car on cherche une solution stationnaire. On suppose qu'on est à grand nombre de Reynolds (écoulement potentiel $\leftrightarrow$ fluide parfait, donc viscosité négligeable). Le terme $\nu(...)$ est donc négligé.
Le terme $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ est nul par symmétrie (il n'y pas de raison que la pression soit plus élevée à un angle donné qu'à un autre).
Reste le terme $\mathbf{u}.\nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r}$. Il faut juste faire attention à ne pas se tromper sur le produit scalaire:

$$\mathbf{u}.\nabla u_\theta = u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

mais effectivement, ce terme est nul...
En fait, c'est dans l'équation sur la composante u_r qu'il y a un terme non intuitif u_θ^2/r, et on se retrouve avec:

$$\rho\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

soit

$$\rho\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^3} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

On intègre:

$$-\frac{1}{2}\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 r^3} + cte = p(r)$$

On retrouve bien la loi de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho u_\theta^2 + p(r) = cte$$