Champ de vitesse induit par une distribution de vorticité.

On cherche le champ de vitesse $\mathbf{u}$, à divergence nulle, correspondant à la distribution de vorticité prescrit ω.

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \omega, \quad \nabla.\mathbf{u} = 0$$

Le champ $\mathbf{u}$ étant à divergence nulle, il peut être écrit comme dérivant d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

On alors :

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \omega$$

Si $\mathbf{A}$ est à divergence nulle, il satisfait alors l'équation de Poisson

$$\Delta \mathbf{A} = -\omega$$

La fonction de Green de l'équation de Poisson étant $G = -1/4\pi r$, le potentiel vecteur s'écrit :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\omega}{r} dV$$

où l'intégrale est prise sur tout le volume Ω du fluide.

En utilisant le théorème de la divergence, on peut montrer que :

$$\nabla.\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\omega.\mathbf{n}}{r} dS$$

où l'intégrale est prise cette fois sur la surface $\partial\Omega$, de vecteur normal $\mathbf{n}$ limitant le volume de fluide. On peut choisir la frontière du volume de fluide de telle manière que l'intégrale de $\omega.\mathbf{n}$ soit nulle et le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ satisfait alors les équations de départ. On en déduit le champ de vitesse :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \nabla \wedge \frac{\omega}{r} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\mathbf{r} \wedge \omega}{r^3} dV$$

Lorsque la vorticité est concentrée sur une ligne de tourbillon de circulation Γ, l'intégrale de volume est remplacée par une intégrale de ligne le long du tourbillon. C'est exactement l'analogue de la loi de BIot et Savart donnant le champ magnétique induit par une distribution de courant électrique.