Examen de mécanique des fluides

Promotion 136, 19 juin 2019

Partie A durée 1h, 8 points. **Sans documents**.
Partie B durée 2h, 12 points. Documents autorisés : notes de cours du site web, TDs.

1 Partie A: Palets flottants

Des objets millimétriques plus denses que l'eau peuvent être soutenus à l'interface entre l'eau et l'air par l'action de la tension de surface. Cette propriété est en particulier exploitée par des insectes comme les Gerris. Comment la force de trainée dépend-elle de la vitesse de ces objets? L'expérience utilisée pour mesurer cette force de traînée consiste à suivre le ralentissement de palets cylindriques (rayon R compris entre 4 et 12 mm, masse m compris entre 61 et 1300 mg) préalablement accélérés par un champ magnétique à une vitesse U_0 de l'ordre de 10 cm/s (Fig. 1). La vitesse est telle que le déplacement du palet ne génère pas d'ondes de surface.
L'évolution typique la vitesse du palet au cours du temps est représentée sur la Fig. 2.

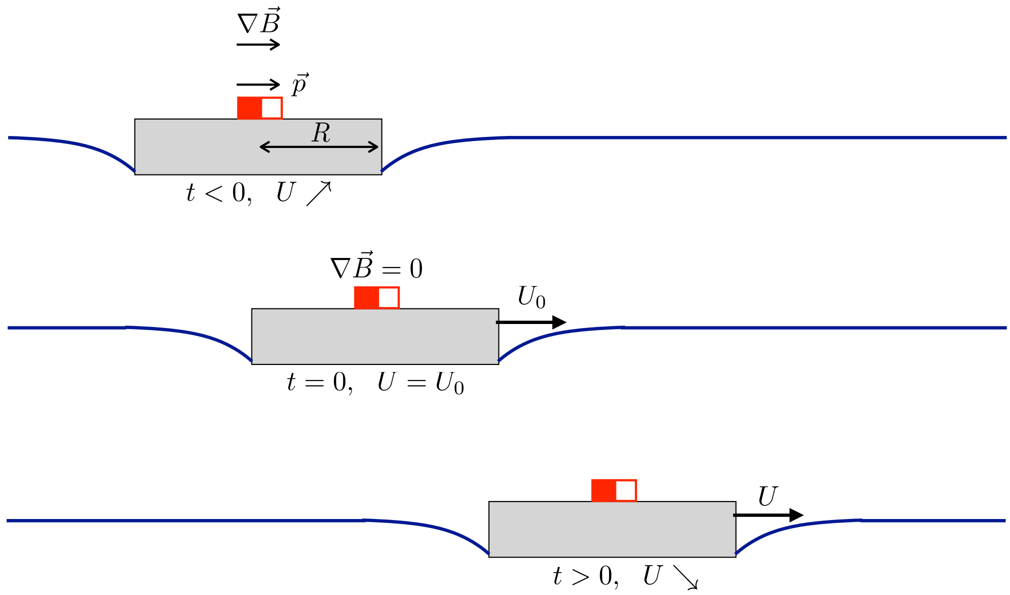

Figure 1: Système expérimental: un petit aimant est fixé au milieu d'un palet flottant à la surface d'un bain, on accélère ce dernier au moyen d'un champ magnétique. À $t = 0$ on coupe le champ magnétique et le palet continue sa course sans force propulsive.

1. Si la friction sur le palet est de nature purement visqueuse, c'est-à-dire si l'écoulement est entièrement dominé par la viscosité, comment la force de trainée varie-t-elle avec la

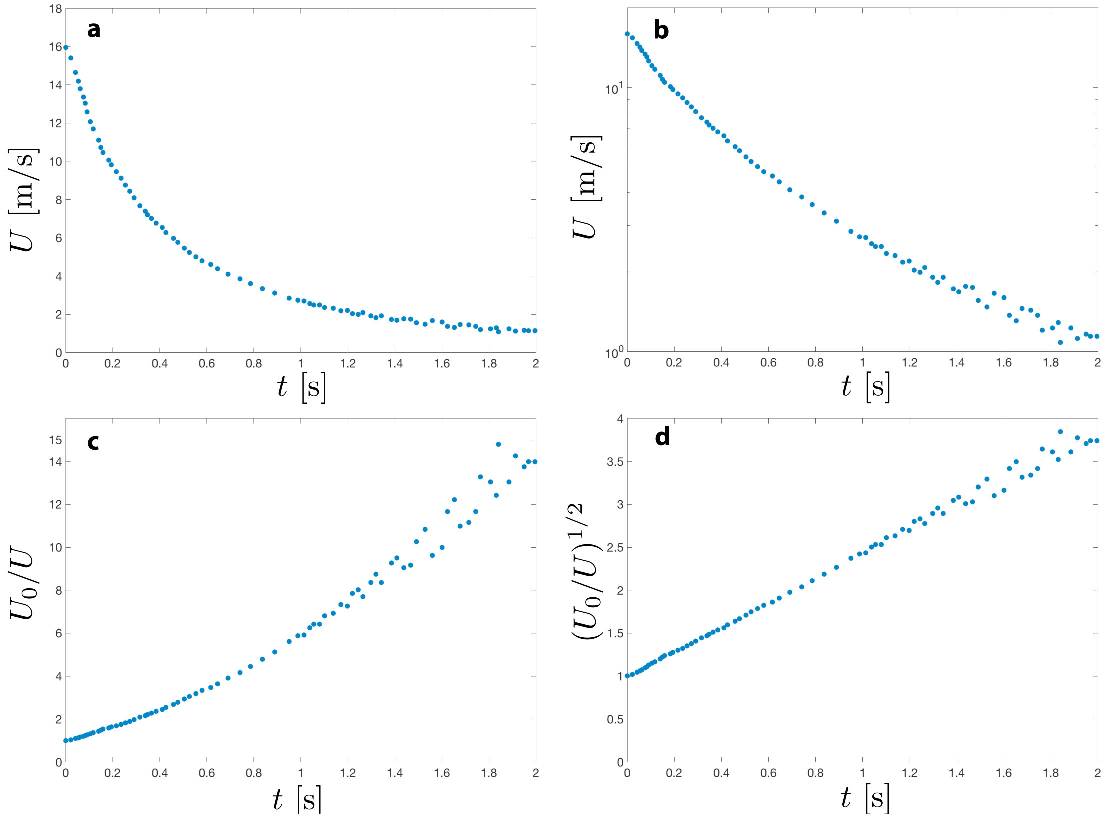

Figure 2: Données expérimentales pour un palet de rayon $R = 4$ mm et de masse $m = 61$ mg. Vitesse du palet en fonction du temps, (a) en coordonnées linéaires, (b) en coordonnées semi-logarithmiques. Mêmes données représentées comme: (c) $U_0/U = f(t)$ et (d) $\sqrt{U_0/U} = f(t)$.

vitesse U du palet et avec son rayon R ? Pour répondre à cette question et aux suivantes on pourra s'appuyer sur une analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes.

Solution: Force de traînée visqueuse linéaire en vitesse et linéaire avec la taille de l'objet: $T_v \sim \eta U R$

2. Dans cette hypothèse de trainée visqueuse, comment la vitesse U décroit-elle avec le temps ?

Solution: L'équation de mouvement est de la forme $m\, dU/dt = -k_v \eta R U$, ($k_v$ étant une constante numérique proche de l'unité).
La vitesse décroit exponentiellement avec le temps $U = U_0 \exp(-k_v R \eta t/m)$.

3. Si maintenant on considère que l'écoulement autour du palet est un écoulement dominé par l'inertie et présente un décollement de couche limite et une émission de tourbillons latéraux, comment la force de trainée varie-t-elle avec la vitesse U du palet et avec son rayon R ?

Solution: Dans cette situation, la force de trainée varie comme le carré de la vitesse du fluide et comme le carré des dimensions de l'objet : $T_i = C_x \frac{1}{2} \rho U^2 R^2$. On peut aussi prendre Rh comme section caractéristique (ce ne sera alors pas le même C_x). C'est ce qu'on à vu pour le C_x d'une aile par rapport à celui d'une voiture.

4. Dans cette seconde hypothèse de traînée purement inertielle, comment la vitesse U décroit-elle avec le temps ?

Solution: L'équation de mouvement est de la forme $m dU/dt = -k_i \rho R^2 U^2$, soit $dU/U^2 = -k_i \rho R^2 dt/m$ qui s'intègre en :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_0} + \frac{k_i \rho R^2 t}{m}$$

$$\frac{U_0}{U} = 1 + \frac{k_i \rho R^2 U_0 t}{m}$$

$$U = U_0 \frac{1}{1 + \frac{k_i \rho R^2 U_0 t}{m}}$$

5. Enfin, si on considère que l'écoulement autour du palet est essentiellement un écoulement de couche limite sous le palet sans décollement, comment la force de trainée varie-t-elle avec la vitesse U du palet et avec son rayon R ?

Solution: L'épaisseur de couche limite $\delta(x)$ varie comme $\sqrt{\nu x/U}$ et la contrainte de cisaillement varie comme $\eta U/\delta(x)$. La force de friction intégrée sur toute la surface du palet est $\eta UR\int_0^R (U/\nu)^{1/2}x^{-1/2}dx$, soit, à un coefficient numérique près $T_c \sim \eta\nu^{-1/2}U^{3/2}R^{3/2} = (\rho\eta)^{1/2}(UR)^{3/2}$.

6. Dans cette troisième hypothèse de traînée de couche limite, comment la vitesse U décroit-elle avec le temps ?

Solution: L'équation de mouvement est de la forme $mdU/dt = -k_c(\rho\eta)^{1/2}(UR)^{3/2}$, soit

$$\frac{dU}{U^{3/2}} = -\frac{k_c(\rho\eta)^{1/2}R^{3/2}}{m}dt$$

qui s'intègre en :

$$\frac{1}{U^{1/2}} - \frac{1}{U_0^{1/2}} = \frac{2k_c(\rho\eta)^{1/2}R^{3/2}}{m}t$$

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^{1/2} = 1 + \frac{2k_c(\rho\eta)^{1/2}U_0^{1/2}R^{3/2}}{m}t$$

7. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement ? À partir de cette donnée et de la forme de l'objet quel modèle de force de trainée est le plus pertinent ?

Solution: En prenant $R = 4$ mm et $U = 10$ cm/s, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 400. On peut donc a priori écarter l'hypothèse d'un frottement purement visqueux. L'écoulement d'eau sous le palet est assimilable à celui d'une couche limite sur une plaque plane. Le troisième modèle est donc celui qui semble le plus pertinent.

8. Parmi les trois modèles, quel est celui qui décrit le mieux les résultats expérimentaux ?

Solution: Le troisième modèle prédit une variation linéaire en temps de $\sqrt{U_0/U}$. C'est effectivement ce qui observé sur les résultats expérimentaux, alors que les autres modèles qui prédisent respectivement une décroissance linéaire en temps de U/U_0 et une croissance linéaire en temps de U_0/U ne décrivent pas correctement les expériences.