Se déplacer à bas nombre de Reynolds

Notes de cours: Chapitre 6

À retenir:

Trainée visqueuse sur un corps de taille caractéristique L pour $Re \ll 1$:

$$T \sim \eta U L$$

Traînée visqueuse sur une tige de rayon a et de longueur $L \gg a$:

$$F_{\parallel} = \xi_{\parallel}\, \eta U_{\parallel} L \quad \text{et} \quad F_{\perp} = \xi_{\perp}\, \eta U_{\perp} L \quad \text{avec} \quad \xi_{\perp} \simeq 2\, \xi_{\parallel}$$

Pas de propulsion à bas Re si cinématique réversible.

Regarder le film de G.I. Taylor (1967): `https://youtu.be/51-6QCJTAjU`

Comment se déplacer dans un fluide visqueux?
Une manière évidente consiste à laisser faire la gravité. À quelle vitesse un objet sédimente-t-il? Tombe-t-il tout droit? Peut-il tourner sur lui même lors de sa chute?
Nager offre évidemment plus de degrés de libertés. Mais comment nager à bas nombre de Reynolds?
Après avoir exploré plusieurs configurations de sédimentation, nous explorerons une nage développée par certaines bactéries: la nage en tire-bouchon.

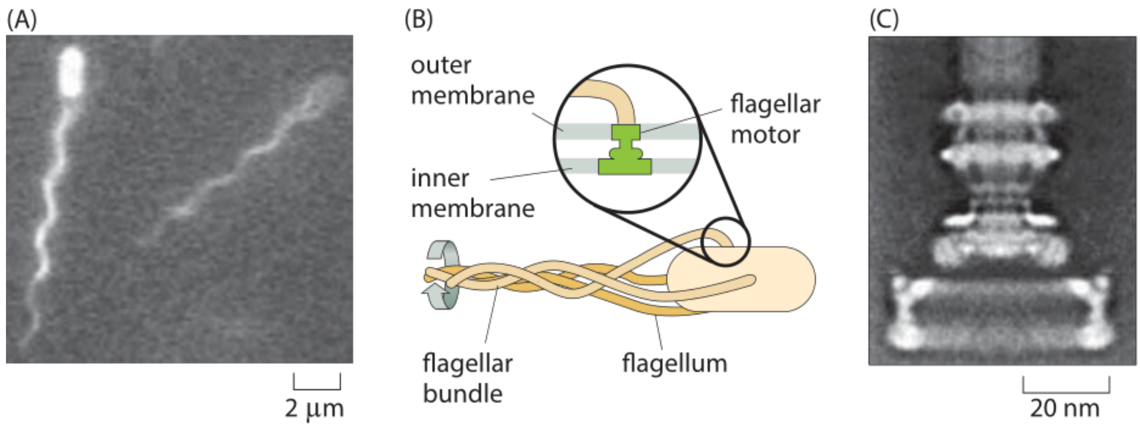

Figure 1: **a.** Exemples de bactéries *Escherichia coli* nageant dans l'eau. **b.** Ce qui ressemble à un filament unique est en réalité un mèche de filaments. **c.** Détail d'un moteur rotatif. Visualisez les films (en particulier celui au ralenti, filmé à 500 Hz) sur: `http://www.rowland.harvard.edu/labs/bacteria/projects/filament.php`.
Source: `http://book.bionumbers.org/what-is-the-frequency-of-rotary-molecular-motors/`

1 Sédimentation (à bas Re)

1.1 Chute d'une bille

Laissons tomber une bille de rayon R et de densité ρ_S dans un bain de densité ρ_L et de viscosité η (Fig. 2).

Quelle hypothèse doit-on vérifier pour que l'écoulement autour de la bille soit dominé par la viscosité du fluide?
Quelle est en loi d'échelle la contrainte visqueuse autour de la bille?
Quelle est alors la force de traînée?
Si l'inertie du fluide est négligeable, en est-il nécessairement autant pour l'inertie du solide?
À quelle vitesse la bille sédimente-t-elle?
À quelle condition l'hypothèse de départ est-elle vérifiée?
Peut-on conclure sur la vitesse d'un grain de sable (assimilé à une bille de 0.5 mm de rayon et de densité 2.3) dans l'eau? dans du miel? en dessous de quelle taille la sédimentation du grain dans l'eau correspond à un écoulement de type visqueux?

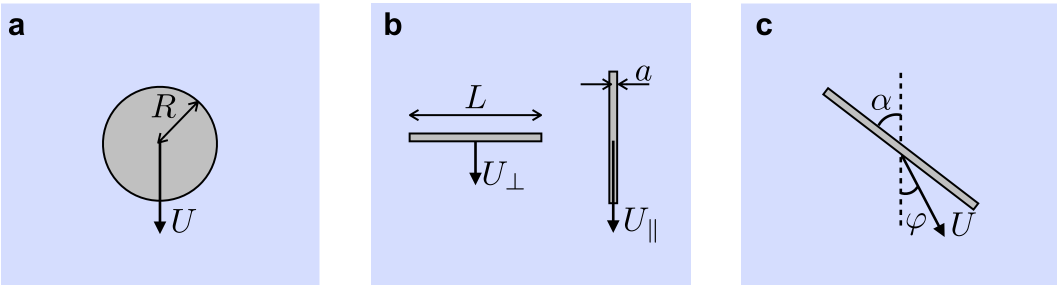

Figure 2: **a.** Sédimentation d'une bille. **b.** Chute d'une tige: à bas Re on observe qu'une tige verticale tombe deux fois plus rapidement qu'une tige horizontale. **c.** Chute d'une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. Le vecteur vitesse adopte un angle ϕ avec la verticale.

1.2 Chute d'une tige

Laissons tomber une tige de longueur L et de rayon a ($a \ll L$) dans un liquide visqueux. Expérimentalement, nous observons qu'une tige verticale tombe pratiquement 2 fois plus vite qu'une tige horizontale. Du point de vue théorique, on peut montrer que les forces de traînée s'écrivent de la manière suivante (voir les notes de cours pour les expressions exactes):

$$T_\parallel = c_\parallel \eta U_\parallel L \quad \text{et} \quad T_\perp = c_\perp \eta U_\perp L$$

avec $c_\perp \simeq 2c_\parallel$. En toute rigueur, ces coefficients de friction dépendent du rapport L/a. En pratique, cette dépendance est faible (logarithmique) et nous considèrerons $c_\parallel \sim 2\pi$ pour les estimations d'ordre de grandeur.

À présent, que se passe-t-il si la tige est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale? L'expérience montre que la tige dérive d'un angle φ avec la verticale qu'on se propose de déterminer.

Justifier que si la vitesse a une direction quelconque, on peut additionner les deux composantes de la force de friction correspondant aux deux composantes de la vitesse.
Trouver à partir d'un simple bilan de forces le lien entre φ et α.
Pour quel angle d'inclinaison α la dérive est-elle la plus forte?
L'angle d'inclinaison α se maintient-il au cours du temps?

1.3 Chute d'une hélice

Afin de se rapprocher de la nage en tire-bouchon des bactéries, considérons la sédimentation d'une hélice de rayon b et de pas λ. Son axe est orienté verticalement (Fig. 3). La tangente à l'hélice fait un angle α avec la verticale donné par:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi b^2/\lambda^2 + 1}}$$

Si on se focalise sur un petit élément dL de l'hélice, sa vitesse va se décomposer en une vitesse verticale U et une vitesse angulaire ω. Afin de résoudre plus simplement le problème, nous décrirons indépendamment ces deux contributions et additionnerons les forces de traînée correspondantes.

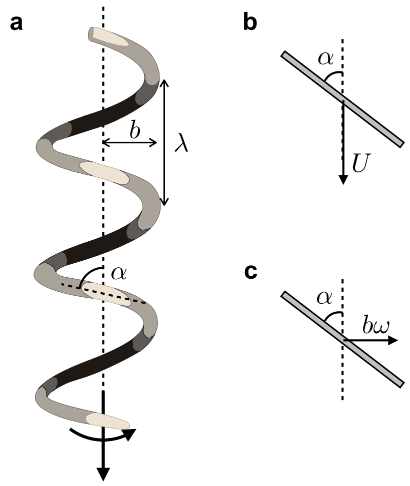

Figure 3: **a.** Sédimentation d'une hélice de rayon b et de pas λ. Sa tangente fait un angle α avec la verticale. **b.** Contribution de la vitesse verticale. **c.** Contribution de la vitesse angulaire.

Si l'hélice se translate verticalement sans tourner sur elle-même (Fig. 3b), quelles sont les composantes de la force de traînée dT_z et dT_θ qui s'appliquent à l'élément dL?
Considérons à présent le rôle de la rotation (Fig. 3c). Quelles sont les composantes dT_z et dT_θ dues à la vitesse $b\omega$?
Si l'hélice ne tombe que sous son propre poids, que vaut la traînée globale dT_θ?
En déduire la relation entre U et ω.
Quelle est alors l'expression de la force de traînée globale agissant sur l'hélice?
À quelle vitesse l'hélice sédimente-t-elle?

2 Propulsion

À notre échelle, nager à nombre de Reynolds modéré reviendrait à nager dans un liquide 10 000 fois plus visqueux que l'eau. Difficile à imaginer! En absence d'inertie, l'écoulement a une propriété de réversibilité cinématique, ce qui conduit au fameux "scallop theorem" de Purcell (Fig. 4a). Si nous supposons que le bivalve se déplace d'une certaine quantité en fermant sa coquille, à bas Reynolds il se déplacera exactement de la même quantité opposée en la rouvrant. En résumé, une cinématique symétrique (par renversement du temps) ne peut conduire à un déplacement.

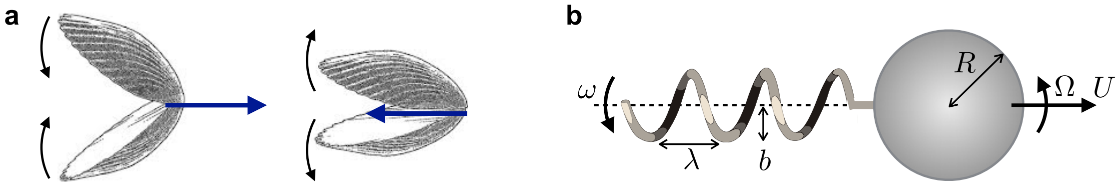

Figure 4: **a.** Théorème de la coquille Saint Jacques: en régime visqueux une cinématique symétrique ne peut conduire à un déplacement (dessin repris de Qui *et al.*, *Nat. Comm.*, **5** 5119 (2014)). **b.** Nage en tire bouchon adoptée par E. coli (en réalité c'est un peu plus compliqué car plusieurs filaments sont associés dans l'hélice).

Les micro-organismes ont ainsi développé d'autres stratégies pour nager. Certains font propager une vague le long d'un flagelle, comme dans le cas des spermatozoïdes. La bactérie *E. coli* est championne en nage "tire-bouchon". Le principe est simple: si la chute d'une hélice entraîne sa rotation, sa rotation ne devrait-elle pas entraîner un déplacement?

Que se passerait-il si on était capable d'appliquer une vitesse angulaire ω au filament (avec un champ magnétique par exemple) en oubliant l'effet de la gravité?
Dans le cas de la bactérie, supposons que la vitesse de rotation de l'hélice ω soit fixée et que cette hélice pousse un boulet de rayon R qui tourne à contre sens à la vitesse angulaire Ω. Quels équilibres doit-on écrire afin de déterminer la vitesse U de la bactérie?
Le moment de friction visqueuse agissant sur une sphère qui tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω est donné par $\Gamma = 8\pi\eta R^3\Omega$. Estimer en ordre de grandeur Ω et U avec les données biologiques suivantes: $b \sim 0.5\,\mu m$, $\alpha \sim 30°$, $\omega \sim 100\,Hz$, $R \sim 1\,\mu m$, $L \sim 10\,\mu m$. Expérimentalement, on observe que les bactéries se déplacent avec une vitesse typique $U \sim 30\,\mu m$. L'ordre de grandeur calculé est-il le bon? Quel est l'ordre de grandeur du couple que doit fournir le moteur de la bactérie?
Peut-on estimer la puissance fournie par le micro-organisme?
Sachant que la transformation ATP $\rightarrow$ ADP fournit typiquement 5.10^{-20} J, estimer le nombre de molécules d'ATP consommées par unité de temps.
Pour les plus courageux, on peut tenter le calcul complet jusqu'au bout.
Avec ce mécanisme, la bactérie ne serait-elle pas condamnée à avancer tout droit?