Équation de Bernoulli: tube de Pitot, clap, crevettes et cavitation

Notes de cours: Chapitre 8.

À retenir:
Écoulement potentiel si irrotationnel: $\mathbf{u} = \nabla\phi \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{u} = 0$
Si fluide parfait ($\eta = 0$, glissement possible sur les parois) sans vorticité initiale, pas de création de vorticité.

Loi de Bernoulli en écoulement potentiel:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho u^2 + P + \rho g z = cte(t)$$

pertinente à grand Re, loin des couches limites (sources de vorticité).

1 Tube de Pitot

Une application classique de l'équation de Bernoulli est le tube de Pitot qui est largement utilisé en aviation pour mesurer la vitesse relative de l'appareil (Fig. 1). Cependant à y regarder de plus près, son fonctionnement n'est pas si évident...

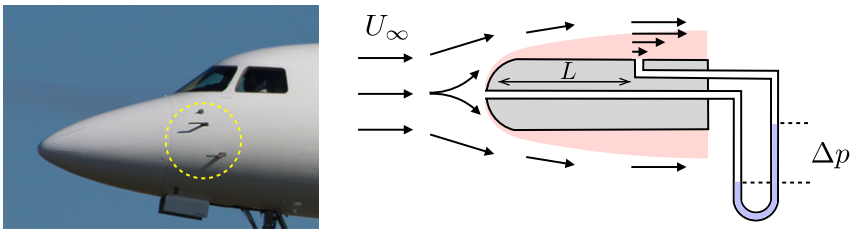

Figure 1: Tube de Pitot utilisé sur un Falcon 50 (source: www.lavionnaire.fr) et schéma de principe.

Rappeler le fonctionnement du tube de Pitot.

Dans le cas d'un fluide réel, qu'elle est sa vitesse au niveau de la paroi?

Quelle est l'épaisseur de la couche limite? Peut-on appliquer la loi de Bernoulli dans cette région?

Déterminer l'évolution de la pression à travers la couche limite. En déduire la condition d'utilisation du tube de Pitot.

2 Clap

Les conséquences de l'équation de Bernoulli défient parfois l'intuition. En voici un exemple.

Considérons deux disques parallèles de rayon R séparés d'un espace $h \ll R$. Un flux d'air constant q est introduit par un trou de rayon r_0 percé au centre d'un des disques (Fig. 2). Le problème est de savoir quelle est la force induite par cet écoulement.

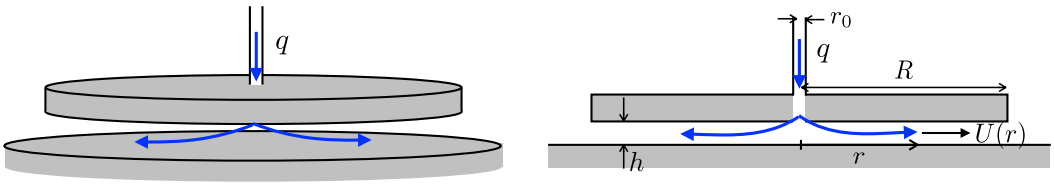

Figure 2: Deux disques de rayon R sont séparés d'une distance $h \ll R$. Un flux d'air constant q est introduit par un trou percé au centre d'un des disques. Les disques vont-ils s'attirer ou se repousser?

En s'inspirant de l'exercice sur la sédimentation d'un disque (TD lubrification) estimer en loi d'échelle la force que le fluide exerce sur les plaques dans le cas d'un écoulement dominé par la viscosité.

Supposons à présent que la viscosité dynamique soit faible de telle sorte que l'épaisseur de couche limite δ reste petite devant h. Quelle est la distribution de pression sous la plaque? En déduire la force résultante.

Pour quelle épaisseur passe-t-on d'un écoulement inertiel à un écoulement visqueux? Application numérique pour de l'air soufflé avec un débit de $100\,\mathrm{cm}^3/s$ dans un disque de 4 cm de rayon.

3 Crevettes et cavitation

Inspiré de l'article "How Snapping Shrimp Snap: Through Cavitating Bubbles" by M.Versluis, B. Schmitz, A. Heydt, D. Lohse, *Science*, **289**, 2114 (2000)

Contrairement aux idées reçues, le "monde du silence" est parfois bruyant. Une variété de crevettes des mers tropicales est par exemple responsable d'un crépitement intense et continu qui perturbe l'utilisation des sonars. Les crevettes font en effet claquer leur pince hypertrophiée (Fig. 3) afin de communiquer entre elles (défense du territoire) et d'assommer leur proies par le bruit produit. Des illustrations sonores et filmographiques sont disponibles sur le site: `http://stilton.tnw.utwente.nl/shrimp/`

3.1 Cavitation

À partir de la Fig. 4-B déterminer l'origine du pic de pression enregistré par l'hydrophone (Fig. 4-A).

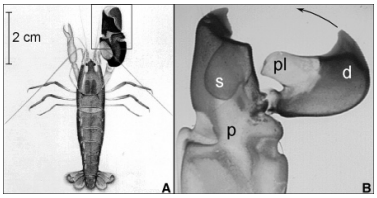

Figure 3: Crevette *Alpheus heterochaelis* et sa pince hypertrophiée. La fermeture de la pince peut s'effectuer à des vitesses colossales (jusqu'à 3500 rad/s!).

En analysant la chronophotographie de la Fig. 4-B, déterminer la vitesse caractéristique de disparition de la bulle de cavitation.

En déduire le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement de l'eau autour de la bulle.

Pourquoi l'écoulement d'eau peut-il être considéré comme incompressible et irrotationnel ?

Dans ce régime, rappeler les équations qui décrivent le mouvement de l'eau.

Analyser ces équations en loi d'échelle et en déduire une vitesse "minimale" de cavitation.

Ce critère est-il le même dans un aquarium peu profond (expérience décrite ici) qu'en mer à 20 m de profondeur?

Dans quels autres types de dispositifs peut-on également observer le phénomène de cavitation?

Toujours par analyse en loi d'échelle, trouver l'expression du temps caractéristique de disparition de la bulle τ.

3.2 Implosion d'une bulle

L'implosion des bulles de cavitation engendre une surpression importante (Fig.4A) qui matraque les proies de la crevette. Afin de modéliser le phénomène, on simplifie la géométrie et l'on considère l'implosion d'une bulle de cavitation sphérique telle que celle présentée sur la Fig. 5-A. La bulle est produite à $t = 0$ avec une taille $R(t = 0) = R_0$ et l'on fait l'hypothèse qu'elle commence à s'effondrer avec une vitesse nulle $\dot{R}(t = 0) = 0$. Dans l'ensemble de notre analyse, nous considérons que la pression de vapeur dans la bulle p est petite devant la pression p_∞ dans le liquide loin de la bulle.

Utilisez la symétrie sphérique du problème pour trouver l'expression du potentiel des vitesses ϕ qui décrit l'écoulement.

Utilisez les équations du mouvement pour décrire l'évolution du rayon $R(t)$. Quel est le temps caractéristique d'implosion de la bulle?
Astuce mathématique: on peut se ramener une équation du 1er ordre en remarquant que $R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{2R^2\dot{R}}\frac{dR^3\dot{R}^2}{dt}$.

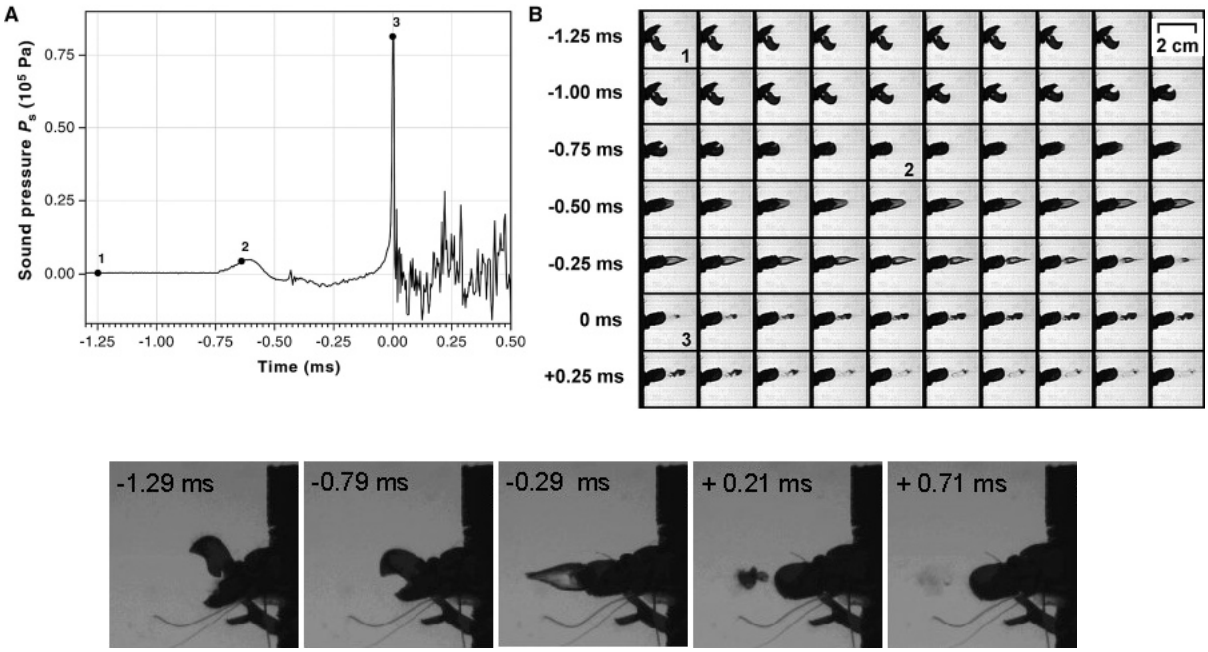

Figure 4: Enregistrement simultané du mouvement de la pince et du son produit au moyen d'une caméra rapide (40500 images/s) et d'un hydrophone. L'intervalle entre les images est de 25 μs pour la 1ère série et de 500 μs pour l'agrandissement.

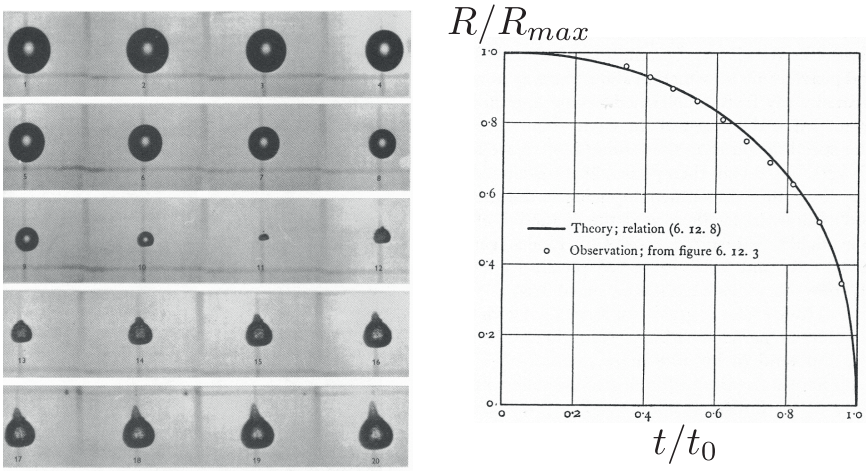

Figure 5: Gauche: Effondrement d'une bulle de cavitation dans l'eau (intervalle entre chaque image: $0,2$ ms, rayon initial de la bulle: $6,9$ mm). Droite: comparaison entre théorie et expérience (source: Batchelor, Introduction to Fluid Dynamics).

Comment évolue le champ de pression autour de la bulle?

On observe qu'après son effondrement, la bulle tend à se reformer pour s'effondrer à nouveau (Fig. 4-B et 5).

Discuter qualitativement de l'origine physique de ces rebonds.

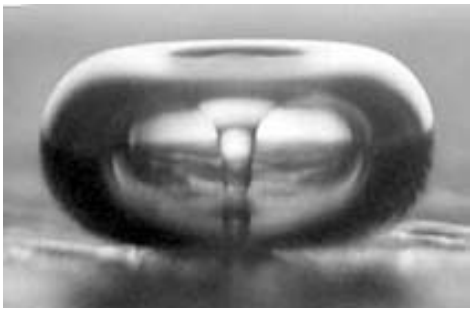

Figure 6: Implosion d'une bulle millimétrique au voisinage d'une paroi (cliché L. Crum, University of Washington, Applied Physics Laboratory).

Près d'une paroi, la bulle n'implose pas de façon symétrique mais produit un jet dirigé vers la paroi comme le montre la Fig. 6.

Quelle est l'origine physique de ce jet? Estimer sa vitesse en loi d'échelle.