

Écoulements potentiels

A grand nombre de Reynolds, en dehors des couches limites, les effets visqueux sont négligables. Si l'écoulement est initialement irrotationnel, il ne peut y avoir de création de vorticité et le champ de vitesse reste irrotationnel. Ces deux conditions ont des conséquences importantes sur les caractéristiques des écoulements et la distribution de pression.

1 Loi de Bernoulli

1.1  volution de l'énergie cinétique

De la même manière que pour le bilan de quantité de mouvement, nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse ρ , en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles. La variation temporelle de l'énergie cinétique est (il faut ici comprendre les indices i, j comme une somme sur les composantes i et j) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (2)$$

soit, en décomposant le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en une partie isotrope $-p\underline{\underline{I}}$ et son déviateur $\underline{\underline{d}}$, $\text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{I}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \frac{\partial u_i d_{ij}}{\partial x_j} - d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (3)$$

c'est-à-dire, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{d}}) - \underline{\underline{d}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (4)$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (4) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) - \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{d}} \right] - \underline{\underline{d}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (5)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique E_c sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume Ω fixe dans le repère eulérien et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} E_c dV \right) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \mathbf{u} dV \quad (6)$$

La signification physique des différents termes de cette équation est :

- le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique convecté par l'écoulement à travers la surface $\partial\Omega$.
- le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface $\partial\Omega$.
- le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
- enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume Ω . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

1.2 Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire

L'équation de conservation de l'énergie prend une forme particulièrement simple lorsqu'il est possible de négliger les effets de la viscosité et lorsque les forces en volume dérivent d'un potentiel φ , tel que : $\mathbf{f} = -\nabla\varphi$ (par exemple, $\varphi = gz$). En partant de l'équation (4) et en posant $\underline{\underline{d}} = 0$ (car les contraintes visqueuses sont négligeables), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right) \quad (7)$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire, la dérivée eulérienne de l'énergie cinétique est nulle. Ce qui veut dire que le gradient de la quantité $H = \rho u^2/2 + p + \varphi$ est partout orthogonal au vecteur vitesse. Donc, si on se déplace en suivant une particule de fluide le long d'une ligne de courant, la quantité H , qui est l'équivalent d'une intégrale première en mécanique du point matériel, est constante. Cette relation est connue sous le nom de *loi de Bernoulli* :

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi = C^{te} \text{ le long d'une ligne de courant} \quad (8)$$

1.3 Loi de Bernoulli en écoulement potentiel

La loi de Bernoulli prend une forme particulière lorsque le champ de vitesse est irrotationnel et dérive d'un potentiel ϕ , $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Pour l'établir, partons de l'équation d'Euler qui est l'équation de mouvement des fluides non visqueux :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (9)$$

L'équation d'Euler est identique à l'équation de Navier-Stokes à ceci-près que le terme proportionnel à la viscosité a disparu. Si les forces en volume dérivent d'un potentiel $-\varphi$, l'équation d'Euler devient :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla(p + \varphi) \quad (10)$$

En utilisant l'identité vectorielle : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$ et le caractère irrotationnel du champ de vitesse, l'équation (10) devient :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + p + \varphi \right) = 0 \quad (11)$$

c'est-à-dire que la quantité : $\rho \partial \phi / \partial t + \rho u^2 / 2 + p + \varphi$ est spatialement constante dans tout l'écoulement (mais cette constante peut varier au cours du temps). Si l'écoulement est stationnaire, on retrouve la loi de Bernoulli (8) mais généralisée à l'ensemble du fluide du fait du caractère irrotationnel de l'écoulement.

2 Conservation de la quantité de mouvement en l'absence de viscosité

Le bilan de quantité de mouvement sur un volume Ω borné par une surface $\partial\Omega$ s'écrit d'une manière générale :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes. Si la viscosité est négligeable, $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$, le bilan de quantité de mouvement se ramène à :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = - \int_{\partial \Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial \Omega} p \mathbf{n} dS. \quad (13)$$

Si de plus l'écoulement est stationnaire, on a la relation suivante entre le flux de quantité de mouvement, l'intégrale de pression sur la frontière $\partial \Omega$ et l'intégrale des forces en volume sur Ω :

$$0 = - \int_{\partial \Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial \Omega} p \mathbf{n} dS. \quad (14)$$

3 Conservation de la circulation. Théorème de Kelvin.

La circulation de la vitesse sur un contour fermé joue un rôle essentiel dans la détermination des forces exercées sur des obstacles. Nous allons voir comment évolue cette circulation lorsque le contour C se déplace avec le fluide. La variation de circulation au cours du temps est :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

où D/Dt est une dérivée "particulaire", calculée en suivant le mouvement d'une particule de fluide. La variation de la circulation Γ comprend deux contributions : la première est due au déplacement du contour C , entraîné par le mouvement du fluide, la seconde est due à la variation temporelle de la vitesse sur le contour, soit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} \quad (15)$$

La première intégrale peut être évaluée à partir de l'équation d'Euler : $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \varphi$ où φ est le potentiel dont dérivent les forces en volume (en prenant $\mathbf{f} = -\nabla \varphi$). Si la masse volumique est constante, cette première intégrale se ramène à la circulation de deux gradients sur un contour fermé, elle est donc nulle. La variation de longueur de l'élément de contour $d\mathbf{l}$, par unité de temps, est simplement la différence des vitesses aux deux extrémités de cet élément, soit : $\frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ et la seconde intégrale devient :

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \oint_C \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{1}{2} \nabla(u^2) \cdot d\mathbf{l} \quad (16)$$

C'est à nouveau l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé. Donc la variation de circulation sur un contour fermé qui suit l'écoulement est nulle :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (17)$$

Ce résultat, qui constitue le théorème de Kelvin, n'est valide que si i) le fluide n'est pas visqueux, ii) si la masse volumique est constante et iii) si les forces en volume dérivent d'un potentiel.

4 Ecoulements potentiels

4.1 Propriétés du potentiel des vitesses

Une des propriétés importantes des écoulements de fluides parfaits est que si un volume de fluide est irrotationnel ($\omega = \nabla \wedge \mathbf{u} = 0$), il le reste indéfiniment. Si par exemple, le fluide est initialement au repos et s'il est mis en mouvement par l'application d'un gradient de pression, l'écoulement créé sera potentiel. Cette propriété n'est pas vérifiée exactement dans les fluides réels. Néanmoins, dans certaines conditions, en particulier sur les corps profilés, les effets visqueux sont uniquement présents dans les couches limites et, en dehors des couches limites, l'écoulement est potentiel.

Si, de plus, le fluide est incompressible, le caractère irrotationnel : $u = \nabla\phi$ couplé à la condition d'incompressibilité conduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \Delta\phi = 0 \quad (18)$$

Le potentiel des vitesses obéit à l'équation de Laplace et la résolution de l'équation de mouvement se ramène à la recherche de fonctions harmoniques satisfaisant les conditions aux limites. Ce problème est exactement équivalent à celui rencontré en électrostatique. En l'absence de viscosité, les parois solides n'imposent plus une condition de vitesse nulle. Le fluide ne peut néanmoins pas les traverser, c'est-à-dire que la composante de vitesse normale à la paroi doit être nulle, soit $\partial\phi/\partial n = 0$ où n est une coordonnée dans une direction normale à la paroi solide.

La linéarité de l'équation de Laplace permet d'additionner des solutions obtenues indépendamment. Il suffit que le potentiel obtenu finalement respecte les conditions aux limites. À deux dimensions, le caractère potentiel de l'écoulement impose que la fonction de courant ψ satisfasse également l'équation de Laplace. En effet :

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \mathbf{k} = 0 \quad (19)$$

\mathbf{k} étant le vecteur unitaire normal au plan xy . La vitesse est orthogonale aux lignes équipotentiellles $\phi = Cte$ et tangente aux lignes de courant $\psi = Cte$. Les équipotentiellles et les lignes de courant constituent donc des réseaux de courbes orthogonales. Nous allons examiner quelques solutions simples de l'équation de Laplace.

4.2 Écoulements potentiels simples

4.2.1 Écoulement uniforme

Le champ de vitesse est donné par : $u_x = U$, $u_y = 0$. Le potentiel des vitesses correspondant est : $\phi = Ux$ et la fonction de courant est $\psi = Uy$ (fig. 1).

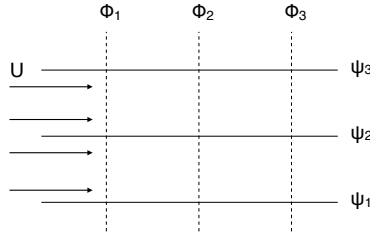


FIGURE 1 – Equipotentiellles et lignes de courant pour un écoulement uniforme.

4.2.2 Tourbillon

Les lignes de courant sont circulaires. Le champ de vitesse est $u_r = 0, u_\theta = \Gamma/2\pi r$. Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial\theta$, soit :

$$\phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad (20)$$

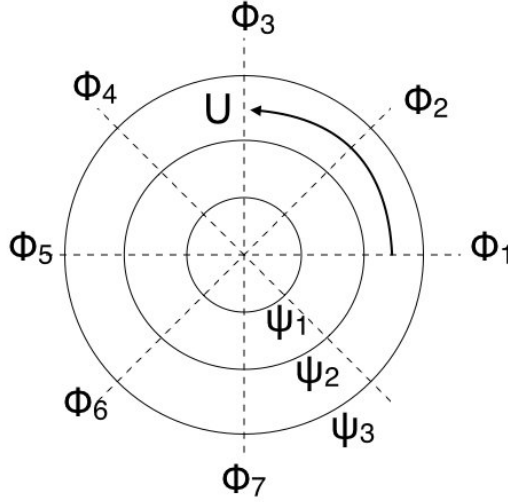


FIGURE 2 – Tourbillon. Lignes de courant et équipotentiellles.

Les équipotentiellles sont des droites $\theta = Cte$. La fonction de courant est donnée par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (21)$$

Les lignes de courant sont des cercles espacés exponentiellement. La circulation de la vitesse sur un cercle de rayon r est :

$$C = \int u_\theta dl = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma \quad (22)$$

Le paramètre Γ est donc la circulation associée au tourbillon. Cette circulation est indépendante du rayon du cercle. En conséquence, le flux du rotationnel de la vitesse sur une surface limitée par deux cercles de rayon quelconque centrés en O est nul. L'écoulement est bien irrotationnel, sauf en $r = 0$ où il existe une singularité de la vorticité. Cette singularité est responsable de la circulation non nulle sur un contour qui entoure le centre du tourbillon. Cette situation est analogue au champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant.

On peut également noter que le potentiel défini par (20) n'est pas univoque. En tournant plusieurs fois autour du centre du tourbillon, on obtient des valeurs différentes du potentiel en un même point de l'espace. Cette multiplicité du potentiel est due à la singularité de vorticité placée en $r = 0$. De manière analogue, en magnétisme, la présence de courants rend le potentiel vecteur non univoque.

4.2.3 Source

Une source (ou un puits) est un écoulement purement radial dont le débit total est Q . Le champ de vitesse est : $u_r = \frac{Q}{2\pi r}$, $u_\theta = 0$. Si Q est positif, l'écoulement diverge depuis le centre (source) ; si Q est négatif, l'écoulement converge (puits). Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_r = \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (23)$$

La fonction de courant est donnée par : $u_r = \frac{1}{r} \partial\psi/\partial\theta$, d'où : $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$. Remarquons que le potentiel et la fonction de courant ont la même forme que pour le tourbillon, mais leurs rôles sont inversés.

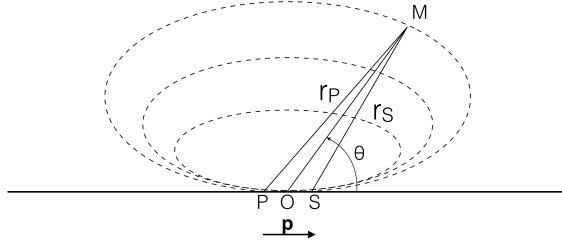


FIGURE 3 – Écoulement créé par un dipôle. Les lignes de courant sont des ellipses (en trait pointillé)

4.2.4 Dipôle

De la même manière qu'en électrostatique deux charges proches de signes opposés constituent un dipôle, nous pouvons fabriquer un dipôle en rapprochant une source et un puits de débits opposés. Le potentiel des vitesses pour le dipôle est la somme du potentiel du puits et de la source, soit :

$$\phi = \phi_s + \phi_p = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_s}{a} - \ln \frac{r_p}{a} \right) \quad (24)$$

où r_s est la distance à la source et r_p la distance au puits. En faisant tendre la distance d entre puits et source vers 0, tout en gardant le produit $p = dQ$ constant, les distances r_s et r_p deviennent très grandes devant d . Il est alors possible de faire un développement de $\ln r_s$ et $\ln r_p$ autour de $\ln r$ où r est la distance entre le point considéré et le centre du dipôle. Soit : $\ln r_s = \ln r + \frac{\partial \ln r}{\partial r} (r_s - r)$. D'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi r} (r_s - r_p) \approx \frac{Qd \cos \theta}{2\pi r} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (25)$$

où θ est l'angle entre l'axe du dipôle et \mathbf{r} . Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} = \frac{px}{2\pi r^3} \text{ et } u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} = \frac{py}{2\pi r^3} \quad (26)$$

et la fonction de courant est : $\psi = -p \sin \theta / 2\pi r = -p y / 2\pi r^2$.

4.3 Écoulement autour d'un cylindre

La recherche du potentiel des vitesses pour l'écoulement autour d'un obstacle doit satisfaire uniquement à deux conditions : loin de l'obstacle, on doit retrouver un écoulement uniforme avec un potentiel $\phi = Ux$ et sur l'obstacle, la vitesse normale à la paroi doit être nulle, c'est-à-dire que la paroi doit être une ligne de courant. (Attention, on néglige ici les effets de la viscosité, le fluide peut alors glisser le long de la paroi. Ce n'est évidemment pas le cas avec un fluide réel. Le cylindre considéré ici serait un cylindre virtuel situé au-dessus de la couche limite.) L'obstacle constituant une perturbation de l'écoulement uniforme, une des méthodes pour trouver le potentiel consiste à ajouter au champ de vitesse uniforme, la vitesse résultant d'un développement multipolaire du potentiel. Nous avons vu ci-dessus ce que sont le potentiel d'un monopôle (source) et d'un dipôle. On peut définir de la même manière, le potentiel d'un quadripôle et des multipôles d'ordres plus élevés. La propriété d'additivité de l'équation de Laplace fait que tous ces développements multipolaires satisfont également à l'équation de Laplace.

Considérons ici l'ajout du potentiel d'un dipôle à un écoulement uniforme permettant de représenter l'écoulement autour d'un cylindre. L'axe du dipôle est parallèle à l'écoulement moyen pour conserver la symétrie axiale et le potentiel est :

$$\phi = Ux - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left(Ur - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta \quad (27)$$

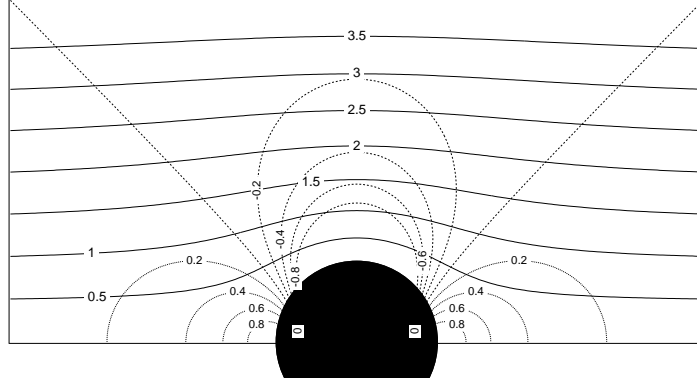


FIGURE 4 – écoulement potentiel autour d'un cylindre. Lignes de courant (ψ normalisée par Ua) en trait plein et isobares (pression normalisée par la pression dynamique) en pointillés.

Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad u_\theta = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \quad (28)$$

il doit satisfaire aux conditions aux limites : $\mathbf{u} = U\mathbf{i}$ à l'infini et $u_r = 0$ en $r = a$ (sur le cercle). La première condition est vérifiée quelle que soit la force du dipôle parce que le potentiel du dipôle décroît en $1/r$ et sa contribution s'annule à l'infini. La seconde condition impose la force du dipôle : $p = -2\pi a^2 U$ et le potentiel résultant est :

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (29)$$

et le champ de vitesse est :

$$u_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (30)$$

La fonction de courant s'en déduit par intégration :

$$\psi = -Ur \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (31)$$

Les lignes de courant sont représentées sur la fig. 4. Il est facile de déterminer le champ de pression ; puisque l'écoulement est potentiel, la loi de Bernoulli s'applique dans tout l'écoulement et :

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2) = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{a^2}{r^2} \left(2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (32)$$

Sur le cylindre ($r = a$), la pression est : $p - p_\infty = 1/2 \rho U^2 (2 \cos 2\theta - 1)$. Aux points où la vitesse est nulle (en $\theta = 0$ et π), on retrouve la pression de stagnation : $p = p_0 + 1/2 \rho U^2$.

En intégrant la pression sur le pourtour du cylindre, nous obtenons la force exercée par l'écoulement et en particulier sa composante dans la direction de l'écoulement moyen :

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta a \, d\theta = -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \cos \theta (2 \cos 2\theta - 1) \, d\theta = 0 \quad (33)$$

La force de traînée est nulle, en raison de l'hypothèse que nous avons faite de négliger la viscosité et de ne pas imposer de condition de non glissement à la surface du solide. Comme nous le verrons, un même résultat est obtenu pour tout corps solide dans un écoulement potentiel. Cette propriété découverte par D'Alembert constitue un paradoxe apparent, parce dans la vraie vie la force de traînée n'est jamais nulle du fait de la traînée de friction.