

Comportements aux interfaces

L'équation de mouvement et l'équation de conservation de la masse déterminent le champ de vitesse et le champ de pression. Mais les solutions de ces équations dépendent des conditions aux limites auxquelles obéissent la vitesse et les contraintes.

1 Interface fluide-solide

Toutes les observations expérimentales macroscopiques s'accordent pour affirmer que la vitesse d'un fluide s'annule au voisinage immédiat d'une paroi solide. Le fait que la composante de la vitesse normale à la paroi étanche soit nulle est naturelle : le fluide ne pénètre pas dans le solide. En revanche, la nullité de la composante de vitesse tangente à la paroi est liée à l'existence de la viscosité : une discontinuité de la vitesse conduirait à une contrainte de cisaillement infinie et donc, à une divergence de l'énergie dissipée dans l'écoulement.

Ces constats sont toutefois à nuancer à des échelles microscopiques (typiquement quelques nm). Dans certaines conditions, on peut observer un glissement moyen du fluide par rapport à la paroi solide¹. Ce glissement peut ainsi influencer l'étalement de films liquides extrêmement fins ou l'écoulement dans des microcanaux.

Dans certaines conditions d'écoulement que nous définirons plus loin dans le cours, les effets de la viscosité peuvent être négligés. On peut alors résoudre les équations de mouvement comme si le fluide était parfait, c'est-à-dire, sans viscosité. Alors, la présence d'une paroi solide impose uniquement la nullité de la composante de vitesse normale à la paroi.

2 Interface fluide-fluide. Tension de surface

2.1 Condition cinématique

De la même manière qu'à une interface fluide-solide, une discontinuité de la composante de vitesse *tangente* à l'interface imposerait une contrainte de cisaillement infinie. Une condition purement cinématique assure que la composante de vitesse *normale* à l'interface soit également continue à travers cette interface. En effet, l'interface se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact.

Si nous plaçons dans un repère local défini par la normale à l'interface (Fig. 1), où ζ , w_1 et w_2 sont respectivement la position de l'interface et les vitesses normales dans chacun des fluides, cette condition cinématique s'écrit :

$$\frac{d\zeta}{dt} = w_1 = w_2 \quad (1)$$

Plus généralement, si la position de l'interface est donnée comme une fonction dépendant de deux coordonnées d'espace et du temps $z = \zeta(x, y, t)$, la condition cinématique s'écrit :

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} u_y + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{D\zeta}{Dt} \quad (2)$$

c'est-à-dire que la *dérivée particulière* (en suivant le mouvement du fluide) de la position de l'interface ζ selon l'axe z est égale à la composante de vitesse suivant z .

1. Huang, P., Guasto, J.S. & Breuer, K.S. Direct measurement of slip velocities using three-dimensional total internal reflection velocimetry, *J. Fluid Mech.* **566**, 447 (2006) ; P. Joseph & P. Tabeling, *Phys. Rev. E* **71**, 035303(R) (2005) ; Pit R., Hervet H., Leger L. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 980 (2000)

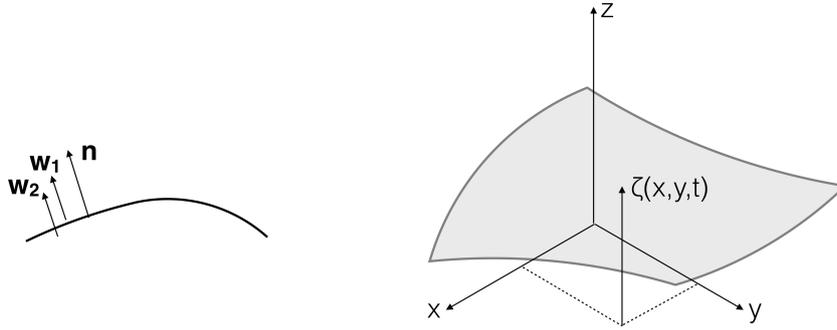


FIGURE 1 – Interface entre deux fluides

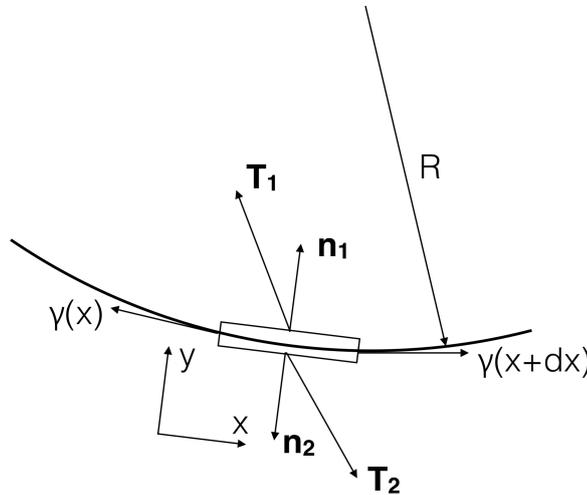


FIGURE 2 – Forces à l'interface entre deux fluides

2.2 Condition dynamique

Examinons maintenant la relation qui existe entre les contraintes de part et d'autre de l'interface. Considérons un élément de volume placé à cheval sur l'interface, dont les faces sont parallèles à l'interface et dont l'épaisseur, perpendiculairement à l'interface, est très petite (fig. 2). La résultante des forces sur cet élément de volume est :

$$\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 + \gamma(x + dx)\mathbf{t}(x + dx) - \gamma(x)\mathbf{t}(x) = [\sigma_{ij}n_j]_1 dx + [\sigma_{ij}n_j]_2 dx + \partial_x(\gamma\mathbf{t})dx.$$

\mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 étant les forces de surface de part et d'autre de l'interface, \mathbf{t} et \mathbf{n} les vecteurs tangents et normaux et γ la tension de surface et x la coordonnée le long de l'interface.

La tension de surface correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour créer une interface d'aire unité. On peut aussi considérer γ comme une force par unité de longueur, s'exerçant dans le plan de l'interface et qui assure la cohésion de cette interface.

La résultante des forces sur le volume entourant l'interface est nulle lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers 0.

2.2.1 Contraintes tangentielles

La projection de l'équilibre sur la tangente à l'interface donne :

$$[\sigma_{xy}]_1 - [\sigma_{xy}]_2 = \frac{d\gamma}{dx} \quad (3)$$

Si la tension de surface est uniforme, les contraintes tangentielles de part et d'autre de l'interface sont égales. Dans la situation particulière où il y a un écoulement de cisaillement simple de chaque côté, on a alors $\eta_1 \partial u_x / \partial y|_1 = \eta_2 \partial u_x / \partial y|_2$, η_1 et η_2 étant les viscosités dynamiques des fluides 1 et 2. Dans le cas d'une interface liquide-gaz, la viscosité dynamique du gaz étant très petite devant celle du liquide, on peut considérer que la contrainte tangentielle (et donc le gradient de vitesse) est nulle dans le liquide.

En revanche, la situation est différente si la tension de surface varie d'un point à un autre, soit parce que la température de surface n'est pas uniforme, soit parce que la composition du liquide en volume n'est pas uniforme, soit enfin parce que des surfactants sont présents à l'interface en concentration variable. Le gradient de tension de surface doit être équilibré par le saut de contraintes tangentielles. Dans le cas d'une interface liquide-gaz, le gradient de tension de surface équilibre essentiellement la contrainte tangentielle dans le liquide. Les écoulements induits par une variation locale de la tension de surface sont souvent appelés "écoulements de Marangoni".

Les "larmes de vin" qui se forment sur le bord d'un verre rempli de vin ou d'alcool fort (Fig.3) sont une conséquence de la différence de tension superficielle entre l'eau ($\gamma = 73$ mN/m) et l'éthanol ($\gamma = 22$ mN/m). Dans le film de liquide qui se forme sur le bord du verre, l'éthanol s'évapore plus facilement. Ce film est donc moins riche en alcool que le bain et la tension de surface y est plus élevée. Il en résulte une force nette qui tire le liquide vers le haut. Le liquide s'accumule en haut du film et finit par redescendre en gouttes (les larmes du vin) sous l'effet de la gravité.

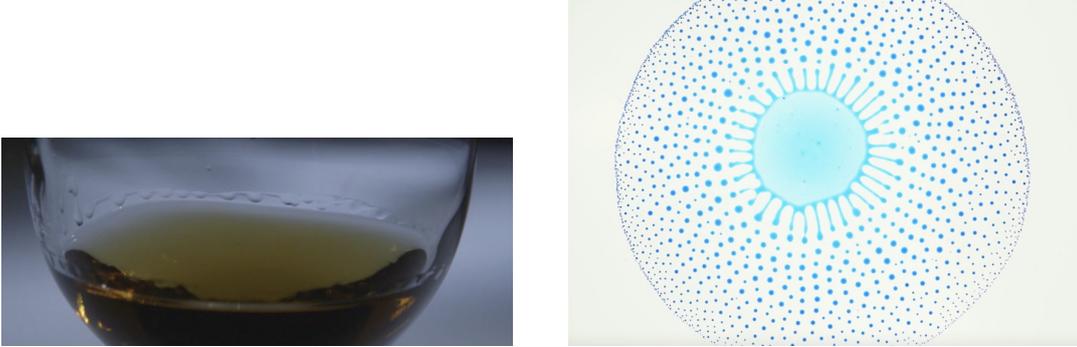


FIGURE 3 – Deux exemples d'écoulements induits par un gradient de tension de surface, les larmes de vin, à gauche, et l'explosion d'une goutte d'alcool posée sur un bain d'huile, à droite.

2.2.2 Contraintes normales

La projection de l'équilibre des forces sur la normale à l'interface donne, en utilisant $d\mathbf{t}/dx = \mathbf{n}/R$ où R est le rayon de courbure de l'interface,

$$([\sigma_{yy}]_1 - [\sigma_{yy}]_2) + \frac{\gamma}{R} = 0$$

Lorsque l'interface est courbe, l'existence d'une tension interfaciale se traduit par une discontinuité des contraintes normales à la traversée de l'interface. Le raisonnement que nous venons de faire sur un élément de volume bidimensionnel peut être refait en trois dimensions. Il conduit à :

$$[\sigma_{nn}]_1 - [\sigma_{nn}]_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) = \gamma C \quad (4)$$

où R_a et R_b sont les rayons de courbure de l'interface dans deux plans orthogonaux et C est la courbure totale de l'interface. En l'absence d'écoulement élongationnel, lorsque les contraintes normales se réduisent à $-p$, l'équation 4 devient :

$$p_2 - p_1 = \gamma C \quad (5)$$

la pression étant la plus élevée à l'intérieur de la courbure (l'intérieur d'une bulle est en surpression). C'est l'équation classique définissant la pression capillaire ou pression de Laplace.

Pour une sphère de rayon R , la courbure totale est $2/R$. La surpression dans une goutte sphérique est donc $2\gamma/R$. Une bulle de savon a deux interfaces eau savonneuse/air et la surpression à l'intérieur de la bulle est $4\gamma/R$, l'épaisseur du film de savon étant très petite devant le rayon de la bulle.

Une surface plane a naturellement une courbure nulle et il n'y a dans ce cas pas de différence de pression associée à la tension de surface. Attention, il existe des surfaces courbes dont la courbure totale est nulle. C'est le cas de la caténoïde, une surface de révolution dont les deux courbures dans des plans orthogonaux sont exactement opposées.

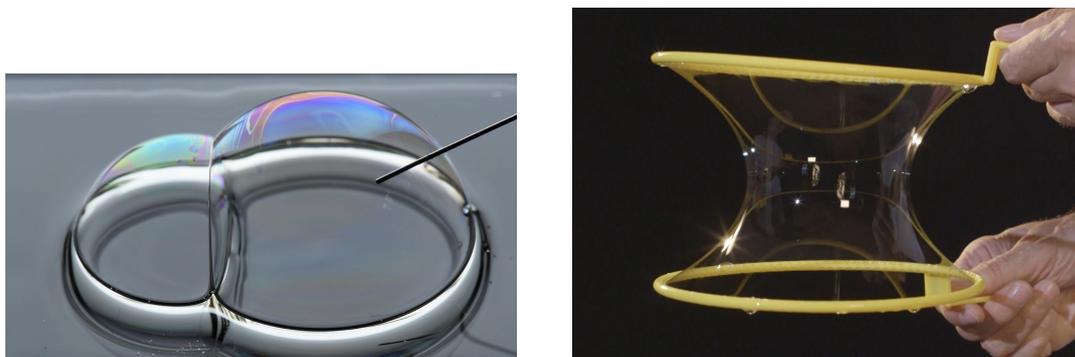


FIGURE 4 – À gauche : deux bulles de savon en contact. Noter que, la petite bulle étant à une pression interne plus élevée que la grosse, le film de séparation est bombé vers la grosse bulle. À droite : caténoïde de savon supportée sur deux cercles.

2.3 Valeurs typiques de tension de surface

La tension de surface γ est directement liée à l'énergie de cohésion des liquides. Sa valeur est donnée par l'énergie d'interaction E entre deux atomes ou molécules, divisée par le carré de la taille a de ces atomes ou molécules. Dans une huile minérale où les interactions moléculaires sont de type Van Der Waals, E est de l'ordre de 4×10^{-21} J, a est de l'ordre de quelques dixièmes de nm et $a^2 \sim 2 \times 10^{-19}$ m², ce qui donne $\gamma \approx 20$ mJ/m². C'est effectivement l'ordre de grandeur de la tension de surface des huiles et des solvants organiques.

L'eau est plus cohésive du fait des interactions hydrogène et sa tension de surface est de l'ordre de 70 mJ/m².

Enfin dans les métaux liquides, les énergies de cohésion sont encore beaucoup plus grandes. Ainsi la tension de surface du mercure est près de 500 mJ/m².