

## Champ de contraintes en tête de fissure

*Quelles sont les questions scientifiques et techniques ?*

Champ de contraintes au voisinage d'une pointe de fissure : singularité universelle, facteur d'intensité de contraintes, fonctions angulaires. Zone de process plastique. Effets de bord.

*Par quelles expériences y répondre ?*

Technique de la photoélasticimétrie appliquée à une éprouvette CT (Compact Tension) en polycarbonate, entaillée, pré-fissurée et chargée en mode I (ouvrant).

*Quelles techniques expérimentales ?*

Observation d'une éprouvette chargée entre deux polariseurs croisés. Mesure des isoclines pour obtenir les directions propres du champ de contraintes. Mesure des isochromes pour obtenir l'intensité du champ de contrainte (déviateur). Analyse d'images à partir de photos.

### 1. Introduction

Les fissures font partie intégrante de notre quotidien. Toutes les pièces mécaniques en contiennent, et ce à diverses échelles. Les fissures les plus grandes sont observables à l'œil nu. Par exemple, chaque conducteur est conscient du danger de rouler avec un impact sur son pare-brise. Malgré les précautions prises dans la réalisation des pare-brises (multi-couches), un simple impact de quelques millimètres (une fissure de petite taille en fait) peut se propager très rapidement sous charge, jusqu'à couvrir toute l'étendue du pare-brise.



**Figure 1** : Légende des photos, de gauche à droite, Impact sur un pare-brise, rupture des ponts et des coques des bateaux 'liberty ships' et fissuration de la banquise.

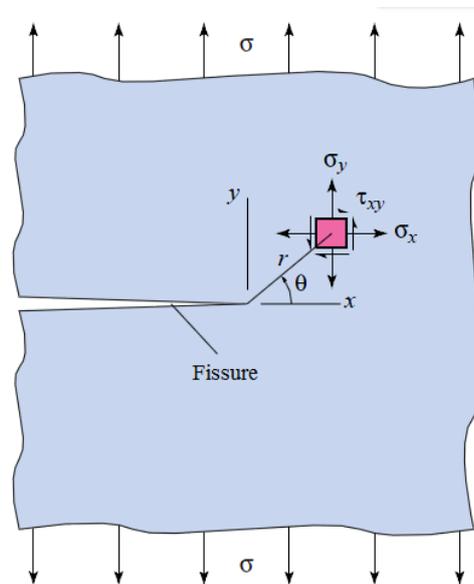
Pour analyser les structures et dans le but de prévenir leur rupture, plusieurs techniques peuvent être utilisées (méthodes de Moiré, interférométrie, caustiques, corrélation d'images, photoélasticimétrie ...). La photoélasticimétrie est une technique industrielle de prévision des contraintes qui vient compléter des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. Elle est largement utilisée dans des secteurs de technologie avancée comme l'aéronautique. Sa capacité à simuler des structures complexes a conduit à élaborer des démarches hybrides calcul-photoélasticimétrie. Plus qu'une complémentarité, il s'agit d'une véritable intégration de ces deux moyens prévisionnels. Certains bureaux d'études, possédant de gros moyens de calculs, ont recours systématiquement à la photoélasticité afin d'élaborer par exemple des hypothèses plausibles sur les conditions aux limites. Cette technique est fondée sur le phénomène de **biréfringence accidentelle** ou **effet photoélastique** : tout matériau solide

transparent acquiert une biréfringence lorsqu'il est soumis à des sollicitations mécaniques extérieures. L'ensemble des lois physiques décrivant ce phénomène constitue la photoélasticité.

## 2. Quelques éléments de la mécanique linéaire élastique de la rupture

A la pointe de fissure, le résultat du calcul analytique montre qu'en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  le premier terme du développement limité du champ des contraintes s'écrit en  $r^{0.5}$  quelles que soient les conditions de chargement et la géométrie de l'éprouvette. Plus précisément, on peut toujours l'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1)$$



**Figure.2** : Élément de contrainte au voisinage de la pointe de fissure

où  $\bar{f}$  est une fonction tensorielle de l'angle  $\theta$  et la constante  $K$  est fonction du chargement et de la géométrie de l'éprouvette, et s'appelle facteur d'intensité des contraintes. C'est cette quantité qui est utilisée pour décrire le niveau du chargement au voisinage de la fissure et dimensionner la structure, plutôt que la "contrainte maximale". Ainsi, au lieu de ne considérer que le point où se trouve le "maximum de contrainte", l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes est pris en compte.

Les critères en contrainte stipulent alors que la fissuration devient instable lorsque le facteur d'intensité des contraintes  $K$  excède une certaine valeur limite. Cette valeur limite est appelée ténacité  $K_c$ , et est généralement considérée comme une propriété intrinsèque du matériau dans un état donné.

## 3. Montage expérimental

Le modèle consiste en une plaque photoélastique  $\cong 60 \times 60$  mm, en polycarbonate, comportant une entaille d'environ 25 mm de long, terminée par une amorce de fissure réalisée au moyen d'une lame de rasoir. Un système vis-écrou permet d'appliquer une force provoquant l'ouverture de la fissure. Le banc de photoélasticité est composé d'une lampe en lumière monochromatique (lampe à vapeur de mercure) et du modèle placé entre polariseurs croisés et lentilles. On trouvera par ailleurs toutes les bases nécessaires sur l'interprétation des franges (isoclines et isochromes) dans l'*Encyclopédie de l'Analyse des Contraintes*.

### 3.1. Réseau d'isoclines

Dans une première étape, nous étudions l'évolution des isoclines en tête de fissure par rotation des polariseurs dans le but de déterminer une relation simple donnant l'orientation des directions principales en un point  $M(r, \theta)$  proche de la pointe de fissure. Les coordonnées  $r$  et  $\theta$  du point  $M$  (Figure 3) sont définies par rapport à l'axe  $Ox$  de la fissure.  $\theta$  est compté positivement dans le sens trigonométrique à partir de  $Ox$  et il est compris dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Pour cela on commence par relever les directions des isoclines près de la fissure en fonction de l'orientation des axes de polarisation (prise de  $15^\circ$  en  $15^\circ$ ), en assimilant l'isocline à sa tangente en tête de fissure. On peut noter qu'il existe un axe de symétrie évident qui permettra de déterminer la direction absolue des polariseurs. Il est important de noter qu'au voisinage de l'axe de l'entaille les isoclines sont distordues; on évitera donc de prendre en compte les isoclines trop proches de cet axe.

$\theta_p$  étant défini comme l'angle entre la tangente à l'isocline et la première direction de polarisation rencontrée dans le sens trigonométrique, on positionnera les différents points expérimentaux dans le plan  $\theta_p, \theta$  et on déterminera les paramètres  $m$  et  $\theta_0$  de l'équation  $\theta_p = m\theta + \theta_0$  caractérisant l'asymptote du nuage de points.

- Quelle relation lie  $\theta_p$  à  $\varphi$ ,  $\varphi$  étant la position angulaire des axes principaux telle qu'elle est définie (Figure 5) sur un cercle de Mohr ?
- En déduire une relation liant l'orientation des directions principales  $\varphi$  avec la position angulaire  $\theta$ , pour tout point  $M$  sur la tangente.



En considérant un cercle centré sur la tête de fissure, mesurer la position angulaire  $\theta$ , des isochromes successives à une valeur constantes de  $r$ , choisie de telle façon à obtenir suffisamment de points sans s'éloigner du domaine de validité de l'étude. **NB : la valeur de  $r$  doit être prise dans le domaine de validité de l'équation (1).**

Tracer  $N$  en fonction de  $\theta$ . NB : pour des valeurs négatifs de  $\theta$ , considérer  $N$  avec un signe négatif, pour des raisons qui seront manifestes plus tard. En analysant la répartition des points expérimentaux, déterminer la relation  $N=f_2(\theta)$ ,  $f$  étant une fonction trigonométrique simple. Notons que le *bord libre* que constitue l'entaille est un facteur déformant pour l'allure du champ de contraintes: dans l'absolu, ce dernier est parfaitement symétrique en tête de la fissure. Penser à exploiter les symétries du modèle et du chargement.

### Dépouillement

En utilisant les résultats précédents, déterminer la relation entre le cisaillement maximal  $\tau_m$  au point  $M$  et ses coordonnées  $r$  et  $\theta$  (c'est-à-dire si  $\tau_m = J \cdot f_1(r) \cdot f_2(\theta)$ , que valent les fonctions  $f_1(r)$  et  $f_2(\theta)$ ).

Il est bien établi par convention que  $J = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}}$ . Quelle est la dimension de la constante  $J$  préfacteur de cette relation ? A quelle grandeur physique est-il relié ?

La différence des contraintes principale dans le plan  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  est donnée par :

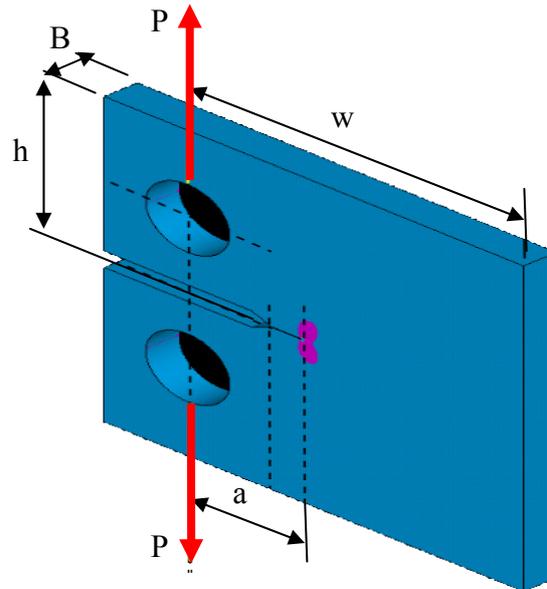
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} |\sin \theta|$$

En utilisant cette formule théorique avec l'équation de base de la photoélasticité, trouver une relation qui lie  $K_I$  avec l'ordre de frange  $N$  et le coefficient  $f$  (0.007MPa.m/frange) de la photoélasticité.

- Calculer  $K_I$  pour  $N = 5$  a  $\theta = 90^\circ$
- A partir de la valeur de  $K_I$  calculée précédemment, estimer la charge  $P$  appliquée en utilisant le calcul analytique de  $K_I$  déterminé par *Paris et Irwin's* pour l'échantillon CT (**mécanique linéaire de la rupture** (1973)):
- Conclusions et commentaires.

$$K_I = \frac{P}{h\sqrt{w}} f(\lambda), \quad \lambda = \frac{a}{w}$$

$$f(\lambda) = 16.7 \lambda^{\frac{1}{2}} - 104.7 \lambda^{\frac{3}{2}} + 369.9 \lambda^{\frac{5}{2}} - 573.8 \lambda^{\frac{7}{2}} + 360.5 \lambda^{\frac{9}{2}}$$



**Figure 4 :** Schématique représentation de la géométrie CT.

#### 4. Champ de contrainte

Établir la relation liant  $\sigma_{r\theta}$  au cisaillement maximum  $\tau_m$ , en utilisant le cercle de Mohr des contraintes (Figure 5) et la relation  $\theta_p = m\theta + \theta_0$  établie précédemment. En déduire la relation  $\sigma_{r\theta} = f(r, \theta)$ .

L'équation d'équilibre qui lie les contraintes normales et tangentielles du champ de contraintes en tout point d'un solide élastique linéaire en équilibre statique s'écrit en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

Toujours en utilisant le cercle de Mohr exprimer cette relation en fonction de  $r$  et  $\theta$  et en déduire l'expression de  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ .

Récapituler les expressions donnant les trois composantes du champ de contraintes en tête de fissure. Il est plus simple d'exprimer les différentes fonctions trigonométriques en fonction de  $\frac{\theta}{2}$ .

Conclusions et commentaires.

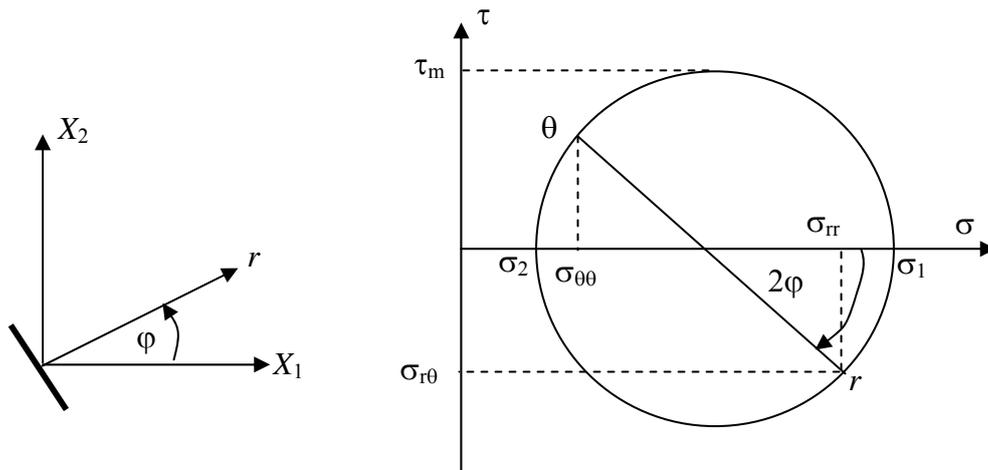


Figure 5 : Cercle de Mohr des contraintes

**Rappels trigonométriques :**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$