Similitude

1 Notion de similitude dynamique

Une fois qu'une solution de l'équation de Navier-Stokes a été obtenue avec des conditions aux limites particulières, on peut se demander si cette solution est également observée dans des écoulements géométriquement similaires. Deux écoulements sont géométriquement similaires si toutes leurs dimensions sont homothétiques. Considérons par exemple l'écoulement autour d'un obstacle placé dans un canal (Fig. 1). En l'occurrence, la géométrie de l'écoulement est complètement définie par la donnée de la largeur L du canal et par tous les rapports entre L, la longueur du canal et les dimensions de l'obstacle.

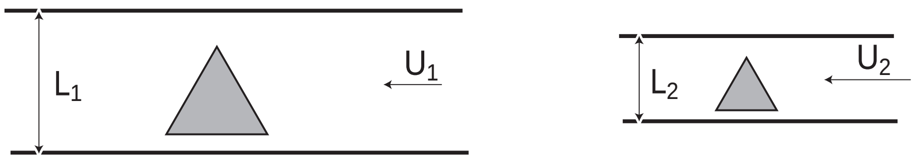

FIGURE 1 – Deux écoulements géométriquement similaires caractérisés par les longueurs L_1 et L_2 et par les vitesses U_1 et U_2

De la même manière, il est possible de caractériser le champ de vitesse par une vitesse représentative U. Pour ce qui concerne l'écoulement dans un canal, U peut être la vitesse moyenne d'écoulement. Le champ de vitesse est alors fixé par la donnée de L et U par des fonctions sans dimensions $u' = u/U$ de coordonnées d'espace sans dimensions $r' = r/L$.

Ecrivons l'équation de Navier- Stokes avec ces variables sans dimension, en omettant le terme de force en volume. Nous définissons un temps caractéristique $\tau = L/U$.
L'équation s'écrit :

$$\frac{U}{\tau}\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L}\mathbf{u}'.\nabla'\mathbf{u}' - \frac{U}{L^2}\nu\Delta'\mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho L}\nabla' p' \tag{1}$$

où t' est un temps adimensionnel : $t' = t/\tau$ et les dérivées spatiales avec des ' sont prises par rapport à la variable sans dimension r' ($\partial/\partial r = 1/L\ \partial/\partial r'$).
En reportant la valeur de τ dans 1 et en divisant par U^2/L, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}'.\nabla'\mathbf{u}' - \frac{\nu}{UL}\Delta'\mathbf{u}' = -\nabla' p' \tag{2}$$

où nous avons défini une pression adimensionnelle : $p' = p/\rho U^2$. En effet, $1/2\ \rho U^2$ qui est l'énergie cinétique (typique) par unité de volume a la dimension d'une pression. C'est ce qu'on nomme la *pression dynamique*.

L'équation de Navier-Stokes ainsi écrite ne comporte plus que des termes sans dimension et les paramètres physiques qui déterminent l'écoulement apparaissent uniquement dans le rapport : ν/UL qui est l'inverse du nombre de Reynolds. Si on obtient une solution de l'équation de Navier-Stokes avec des conditions aux limites prescrites par U, L et par des combinaisons des variables d'espace sans dimension, cette solution sera également valide si la vitesse caractéristique U, la longueur caractéristique L ou la viscosité du fluide sont modifiées *à condition que le nombre de Reynolds reste le même*. Ces écoulements ont une *similitude dynamique* (Fig. 2).

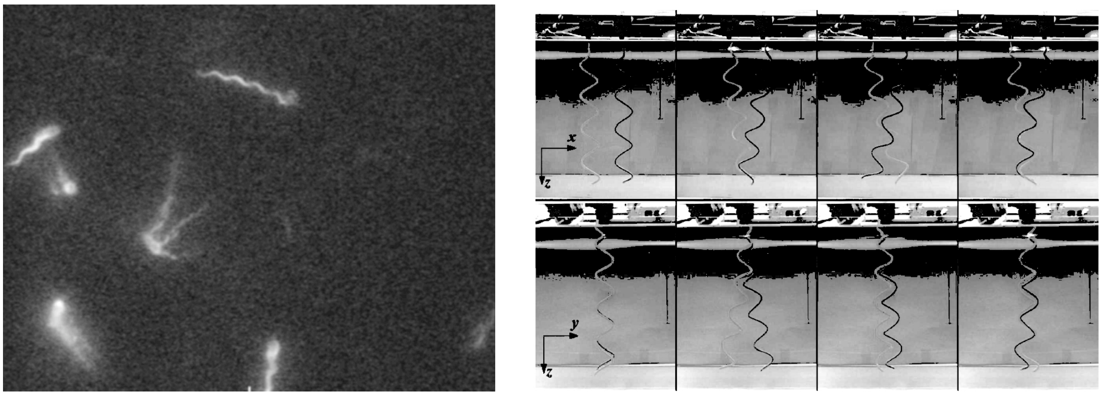

FIGURE 2 – Un exemple de similitude en nombre de Reynolds : l'étude de la propulsion de la bactérie Escherischia Coli. À gauche, des bactéries vues au microscope, les flagelles moteurs (quelques microns de longueur, tournant dans l'eau à une centaine de Hz) sont visualisés par des marqueurs fluorescents. Image réalisée par le groupe de H.C. Berg à Harvard (`http://www.rowland.harvard.edu/labs/bacteria/index.html`). À droite, un modèle macroscopique réalisé avec des hélices (de taille centimétrique) qui tournent dans un bain de glycérine, à une vitesse angulaire de l'ordre du Hz. La séquence d'images montre l'appariement des deux hélices tournant dans le même sens. Image tirée de M. Kim et al., "A macroscopic scale model of bacterial flagellar bundling", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **100**, 15481 (2003).

Lorsqu'il n'y a pas de force en volume, les seuls paramètres qui caractérisent le fluide sont sa viscosité dynamique et sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est une estimation du rapport entre les effets d'inertie et les effets de viscosité. On peut le voir également en considérant l'importance relative des termes $\mathbf{u}'.\nabla'\mathbf{u}'$ et $(\nu/UL)\Delta'\mathbf{u}'$ dans l'équation 2. Si U et L sont convenablement choisis pour représenter l'écoulement, toutes les variables sans dimension (avec des ') sont d'ordre unité, de telle sorte que $\mathbf{u}'.\nabla'\mathbf{u}'$ et $\Delta'\mathbf{u}'$ sont du même ordre de grandeur. Le rapport du terme inertiel $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ et du terme lié à la viscosité $\nu\Delta\mathbf{u}$, dans l'équation de Navier-Stokes, est précisément le nombre de Reynolds.

Lorsque des effets physiques autres que l'inertie et la viscosité entrent en jeu, d'autres paramètres de similitude apparaissent. Par exemple, si on rajoute un terme de gravité à l'équation de Navier-Stokes, le rapport des effets inertiels sur les effets de gravité est, en ordre de grandeur, U^2/gL . Ce rapport est le nombre de Froude. Si l'on veut respecter l'importance relative des effets inertiels et des effets de gravité, par exemple pour étudier le sillage d'un bateau dans un essai sur maquette, il faut travailler à nombre de Froude constant.

2 Petit catalogue de nombres sans dimension en mécanique des fluides

Les paramètres physiques intervenant dans les nombres sans dimension sont une échelle de longueur L, de temps t, de vitesse U, de température T ainsi que les propriétés physiques du fluide masse volumique ρ, viscosité dynamique η et la tension superficielle γ.

— nombre de Bond : rapport des effets de gravité et de la tension superficielle.

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma} = \frac{L^2}{l_c^2}$$

où $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire.

— nombre capillaire : rapport des effets de la viscosité et de la tension superficielle.

$$Ca = \frac{\eta U}{\gamma}$$

— nombre d'Ekman : rapport des effets visqueux et de la force de Coriolis dans un écoulement en rotation à vitesse angulaire Ω

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2}$$

— nombre de Froude : rapport des effets inertiels et de la gravité.

$$Fr = \frac{U^2}{gL}$$

— nombre de Mach : rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son c.

$$M = \frac{U}{c}$$

— nombre de Rayleigh : rapport entre la force d'Archimède créée par l'expansion thermique et des effets de diffusion thermique et de quantité de mouvement.

$$Ra = \frac{\alpha \rho g \Delta T L^3}{\nu \kappa}$$

où α est le coefficient d'expansion thermique, κ la diffusivité thermique et ΔT est la variation de température sur l'échelle L.

— nombre de Reynolds : rapport des effets inertiels et des effets de viscosité

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

— nombre de Rossby : rapport de l'accélération convective et de la force de Coriolis dans un écoulement en rotation à vitesse angulaire Ω

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}$$

— nombre de Stokes : rapport de l'inertie d'une particule solide et des forces visqueuses

$$St = \frac{\rho_s L U}{\eta}$$

où ρ_s est la masse volumique de la particule et L sa taille.

— nombre de Strouhal : fréquence normalisée pour un écoulement instationnaire

$$St = \frac{L}{Ut}$$

— nombre de Weber : rapport des effets inertiels et de la tension superficielle

$$We = \rho U^2 L / \gamma$$