

# Écoulements à petits nombres de Reynolds

## 1 Le monde surprenant des petits nombres de Reynolds

Le transport de la quantité de mouvement peut être dû à la viscosité ou bien à la convection par l'écoulement lui-même (inertie). L'importance relative de ces deux mécanismes de transport peut être appréciée par la valeur du nombre de Reynolds  $Re = UL/\nu$ . La faible valeur de la viscosité de l'eau et de l'air fait que la plupart des écoulements que nous observons dans la vie courante sont des écoulements à grand nombre de Reynolds où l'inertie est prépondérante devant la viscosité. Aussi, nombre de raisonnements "intuitifs" que nous avons sur les écoulements sont influencés par cette expérience quotidienne et ne s'appliquent pas lorsque le nombre de Reynolds est petit.

Nous allons maintenant examiner les circonstances dans lesquelles les effets visqueux sont dominants et quelles sont les particularités des écoulements correspondants. La définition de  $Re$  nous montre que nous pouvons rendre la viscosité prépondérante de trois manières : i) : en diminuant la vitesse, ii) : en diminuant la taille de l'écoulement, iii) : en augmentant la viscosité.

Des écoulements à vitesse extrêmement faible sont rencontrés en géophysique : l'écoulement d'un glacier ou le mouvement du magma dans le manteau terrestre. Bien que les matériaux mis en jeu ne soient pas, à proprement parler, des fluides, leur mouvement sur des échelles de temps suffisamment longues peuvent être décrits comme ceux d'un liquide très visqueux avec une inertie complètement négligeable.

Parmi les écoulements avec des échelles de longueur très petites, mentionnons les écoulements dans les milieux poreux (roches poreuses, colonnes de chromatographie) et les écoulements autour de petites objets en suspension (micro-organismes, macromolécules, particules colloïdales). Les développements récents des microsystèmes mécaniques (MEMS) et des dispositifs d'analyse physico-chimique intégrés ("labs on chips") accroissent encore le champ d'application des écoulements à petits nombres de Reynolds.

Ce monde des petits nombres de Reynolds est particulièrement bien décrit dans le "MOOC" de G.I. Taylor : <https://youtu.be/51-6QCJTAjU>

### 1.1 L'équation de Stokes

En éliminant de l'équation de Navier-Stokes les termes proportionnels à la masse volumique du fluide, on obtient l'équation de Stokes :

$$\eta\Delta\mathbf{u} = \nabla p - \rho\mathbf{f} \quad (1)$$

Le point fondamental est que le terme non linéaire en vitesse de l'équation de Navier-Stokes a disparu ; l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles *linéaire*. Les écoulements à petit nombres de Reynolds ont presque toujours lieu dans des conditions où le fluide est incompressible. Le mouvement du fluide est donc spécifié par l'équation de Stokes et par l'équation de conservation :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . En combinant ces deux équations, il est possible de reformuler l'équation de Stokes de deux manières :

— i) en prenant le rotationnel de (1), on obtient :

$$\Delta\omega = 0 \quad (2)$$

où on a introduit la vorticité  $\omega$  qui est le rotationnel du champ de vitesse. Dans un écoulement à très petit nombre de Reynolds, la vorticité obéit donc à l'équation de Laplace. On utilisera (2) en particulier si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction du champ de vitesse.

— ii) en prenant la divergence de (1), on obtient :

$$\Delta p = 0 \tag{3}$$

ce qui montre que le champ de pression obéit à l'équation de Laplace.

On utilisera (3) si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction de la pression. Après calcul de  $p$ , la vitesse sera déterminée à l'aide de (1).

On peut remarquer que la viscosité a disparu des équations (2) et (3) :  $\eta$  détermine seulement l'amplitude relative du gradient de pression et de la vitesse. C'est-à-dire que, pour des conditions aux limites données, les lignes de courant seront toujours les mêmes, quelle que soit la viscosité du fluide, à condition que le nombre de Reynolds reste très petit devant 1.

## 1.2 Réversibilité cinématique

Une des conséquences remarquables de la linéarité de l'équation de Stokes est la *réversibilité cinématique* des écoulements à très petits nombres de Reynolds. Si l'écoulement du fluide est crée par le mouvement de parois solides, lorsqu'on inverse le mouvement des parois, les particules de fluide reprennent exactement les mêmes trajectoires, mais en sens inverse. Cette réversibilité peut également être comprise comme une diffusion "instantanée" de la quantité de mouvement à travers tout l'écoulement : la présence de parois solides influence l'écoulement par la condition de non glissement sur les parois. Lorsque les effets visqueux sont totalement prépondérants, c'est la diffusion de la quantité de mouvement par la viscosité qui "véhicule" cette information.

La réversibilité cinématique peut être mise en évidence par l'expérience illustrée en Fig. 1. On place un fluide très visqueux dans une cellule de Couette et on injecte localement dans le fluide du colorant dilué dans le même fluide très visqueux de façon à former un dessin dans le liquide. Puis, un des deux cylindres est mis en mouvement et on lui fait effectuer une rotation de plusieurs tours. Le dessin coloré est évidemment complètement distordu par le cisaillement. Ensuite, on inverse le sens de rotation du cylindre et on lui fait effectuer exactement le même nombre de tours qu'à l'aller. Comme par enchantement, le dessin coloré se reconstitue exactement au même endroit qu'au départ du mouvement. La seule transformation irréversible subie par le colorant est une légère diffusion due à l'agitation moléculaire.

En l'absence d'inertie, les lignes de courant peuvent être parcourues dans un sens ou dans l'autre. Si  $\mathbf{u}$  est solution de l'équation de Stokes, alors  $-\mathbf{u}$  l'est aussi. Ce n'est plus le cas dès l'instant où l'inertie du fluide joue un rôle. Sur la Fig. 2 nous voyons les lignes de courant dans un élargissement brusque (ou rétrécissement brusque selon la direction de l'écoulement). A  $Re = 0$ , les lignes de courant sont les mêmes pour les deux sens d'écoulement. En revanche, à  $Re = 50$ , l'écoulement dans le divergent forme un "jet" au centre de la partie large. Ce jet n'est pas visible si l'écoulement est convergent : souffler ou aspirer dans un entonnoir ne produit le même écoulement que si  $Re$  est très petit.

La réversibilité a également une conséquence sur la symétrie des lignes de courant. Considérons l'écoulement autour d'un obstacle possédant un plan de symétrie (par exemple, le plan  $x = 0$ ). Si  $u(x, y, z)$  est solution de l'équation de Stokes, alors  $-u$  est également solution. En renversant l'écoulement, la face amont est devenue la face aval et vice versa et comme l'obstacle est symétrique, on doit obtenir les mêmes lignes de courant que dans la configuration initiale, ce qui implique que :  $u(x, y, z) = -u(-x, y, z) = -u(x, y, z)$ . On peut observer cette symétrie sur l'écoulement autour d'une barrière placée perpendiculairement à la direction de l'écoulement (Fig. 3).

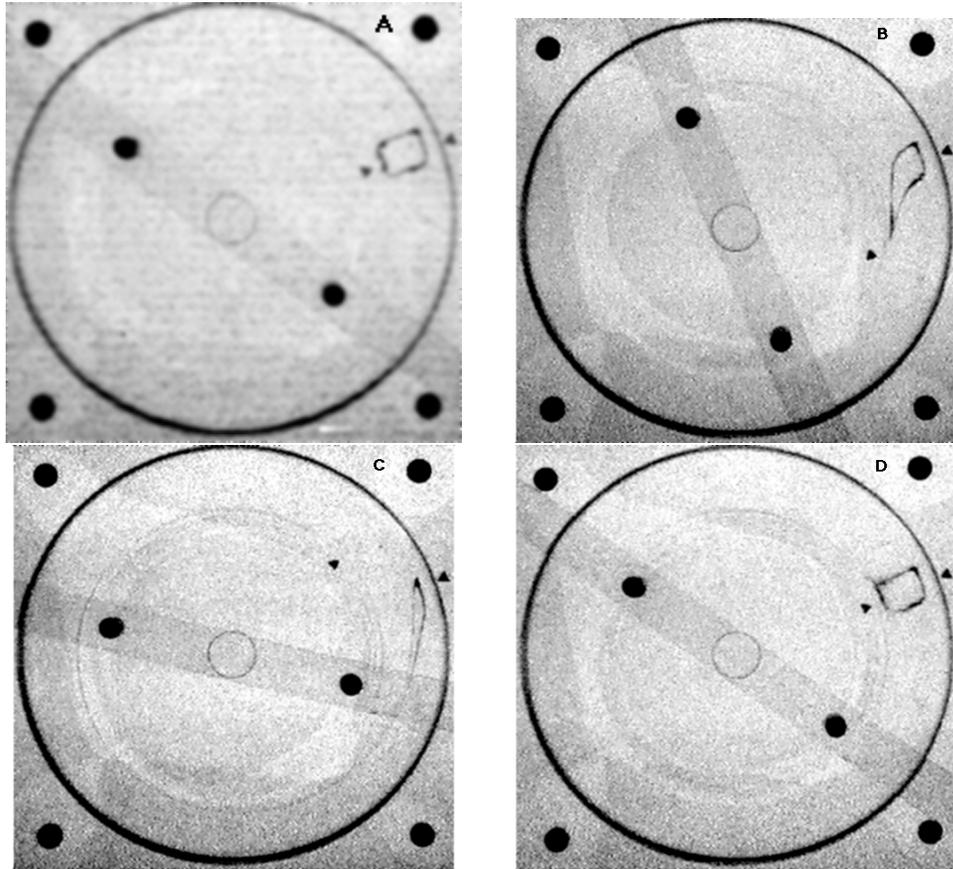


FIGURE 1 – Réversibilité de l'écoulement de Couette (vue de dessus). Au départ (en haut à gauche), on dessine un carré avec du colorant entre les deux cylindres. La position des cylindres est repérée par deux petits triangles. La rotation du cylindre intérieur déforme complètement le carré (en haut, à droite :  $\theta = 20^\circ$ , en bas à gauche,  $\theta = 345^\circ$ ). Ensuite, on ramène le cylindre intérieur à son point de départ (en bas, à droite); le carré coloré se reconstitue. Il est seulement légèrement déformé par la diffusion.

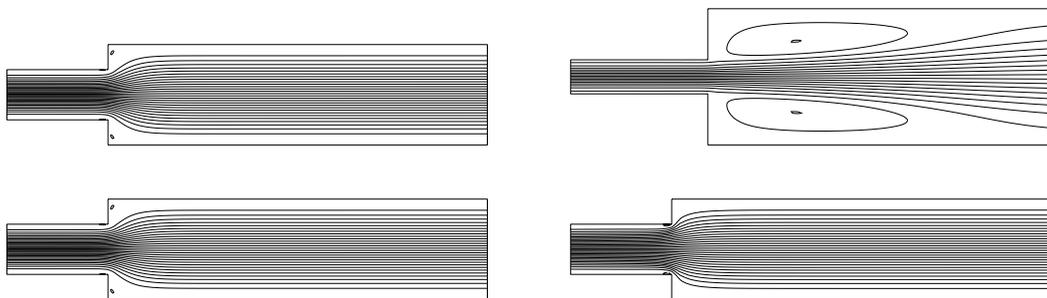


FIGURE 2 – Écoulement dans un convergent (ou divergent) à  $Re = 0$  (à gauche) et  $Re = 50$  (à droite). Sur les figures du haut l'écoulement va de gauche à droite, sur les figures du bas, de droite à gauche. Lignes de courant déterminées par résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes.

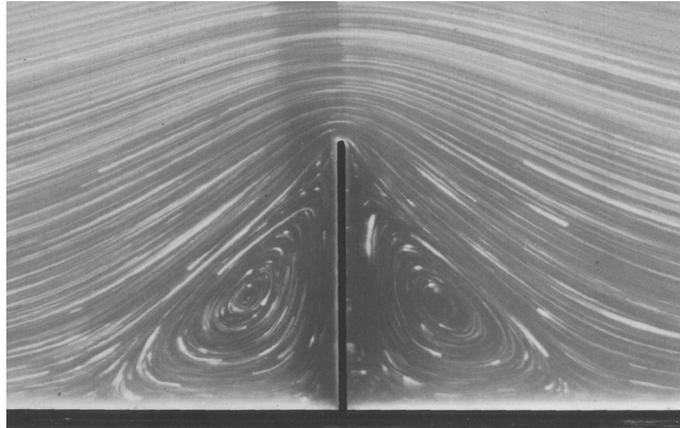


FIGURE 3 – Écoulement à très petit nombre de Reynolds autour d'une barrière perpendiculaire à l'écoulement. Photographie tirée de S. Taneda, *J. Phys. Soc. Jpn.* 46, 1935 (1979).

Enfin, la réversibilité cinématique a des conséquences fondamentales sur les modes de propulsion animale. Les organismes de très petite taille comme les bactéries et les spermatozoïdes vivent dans un monde où l'inertie est négligeable devant la viscosité. L'évolution a donc conduit à des modes de propulsion utilisant des cils ou des flagelles (fig. 4) qui sont radicalement différents des modes de propulsion des organismes plus grands qui tirent partie de l'inertie du fluide <sup>1</sup>.

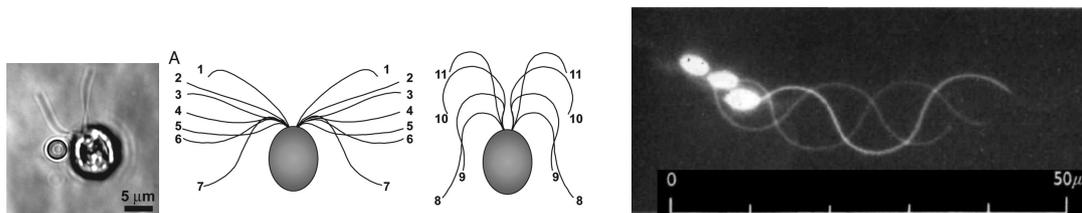


FIGURE 4 – Deux microorganismes nageant à petit Reynolds. À gauche, une algue verte *Chlamydomonas* qui possède deux flagelles dont on montre la cinématique. À droite, un spermatozoïde qui se propulse grâce à une onde propagative sur un flagelle unique.

## 2 Écoulement autour d'une sphère. Suspensions

Une applications importantes de l'équation de Stokes concerne les fluides contenant de petites particules solides (suspensions) ou des gouttelettes (émulsions). Le transport de sédiments fluviaux et marins, la flottation des minerais, l'écoulement de pâtes de céramiques, les solutions diluées de polymères sont, entre autres, décrits par la physique des suspensions. Si les dimensions des particules ou gouttelettes sont assez petites, l'écoulement sera décrit (au moins localement) par l'équation de Stokes. La première approche des écoulements de suspensions consiste à examiner le cas simplifiée de l'écoulement autour d'une sphère solide.

### 2.1 Écoulement autour d'une sphère solide

Commençons par déterminer l'ordre de grandeur de la force de traînée  $\mathbf{T}$  sur une sphère à petit nombre de Reynolds.  $\mathbf{T}$  est l'intégrale des contraintes sur la surface de la sphère. D'après l'équation de Stokes, l'ordre de grandeur de la pression et des contraintes de cisaillement est :  $\eta U/a$ ,  $U$  étant

1. E.M. Purcell, "Life at low Reynolds number", *Am. J. Phys.* 45, 3 (1977)

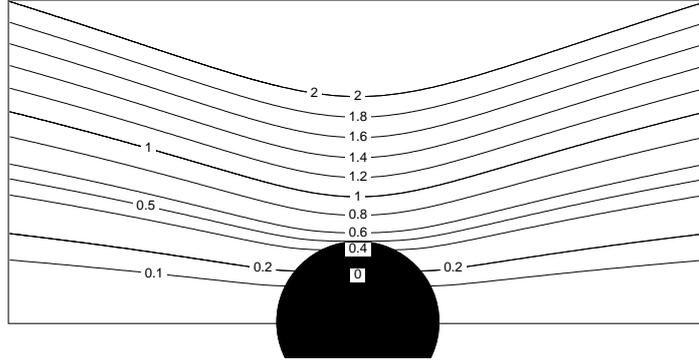


FIGURE 5 – écoulement à petit  $Re$  autour d'une sphère. Lignes de courant dans le repère où le fluide est immobile à l'infini. Les valeurs de  $\psi$  sont normalisées par  $Ua^2$ .

la vitesse de déplacement de la sphère. Le rayon de la sphère  $a$  est en effet la seule longueur caractéristique du problème et :  $\Delta u \approx U/a^2$  et  $\nabla p \approx p/a$ . En intégrant la contrainte sur la surface totale de la sphère, on obtient :  $T \approx a^2\eta U/a = \eta aU$ .

Dans ces conditions, la vitesse de sédimentation est telle que la force de traînée  $T$  équilibre le poids apparent de la sphère :  $P = 4/3\pi a^3\delta\rho g$  où  $\delta\rho$  est la différence de masse volumique entre la sphère et le fluide. La vitesse de sédimentation  $U_{sed}$  est donc donnée par :

$$U_{sed} \approx \frac{P}{\eta a} \approx \frac{\delta\rho g a^2}{\eta} \quad (4)$$

Ce raisonnement simple nous montre que la vitesse de sédimentation varie comme le carré du rayon de la particule.

Pour déterminer exactement la force de traînée, il faut calculer complètement le champ de vitesse autour de la sphère. La résolution complète de l'équation de Stokes est un peu longue et nous allons simplement donner les résultats du calcul. Dans le référentiel où la sphère est en mouvement à une vitesse  $U$  et le fluide à l'infini immobile, le champ de vitesse est donné par :

$$u_r = U \cos \phi \left( \frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) \text{ et } u_\phi = -U \sin \phi \left( \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (5)$$

où  $r$  et  $\phi$  sont les coordonnées polaires définies par le centre de la sphère et l'axe  $x$  suivant lequel la sphère se déplace. Les lignes de courant correspondant au champ de vitesse donné par (5) sont représentées sur la figure 5. Elles correspondent à une fonction de courant :

$$\psi = Ur^2 \sin^2 \phi \left( \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right)$$

Pour obtenir le champ de vitesse dans le repère où la sphère est immobile, il suffit d'ajouter  $-U$  partout à la vitesse, ce qui correspond à ajouter  $-1/2Ur^2 \sin^2 \phi$  à la fonction de courant. Les lignes de courant correspondantes sont représentées sur la Fig. 6. Il faut noter que la perturbation engendrée par la sphère décroît très lentement (en  $1/r$ ). En revanche, dans un écoulement à nombre de Reynolds élevé, le sillage d'un objet en mouvement s'atténue très rapidement (dans la direction normale à l'écoulement). Cette lente décroissance de la perturbation à  $Re \ll 1$  fait que dans une suspension les particules interagissent fortement entre elles dès l'instant où la concentration dépasse quelques % en volume. Ce sont des interactions hydrodynamiques dues au mouvement du fluide entre les particules et qui se rajoutent aux autres interactions (électrostatiques par exemple).

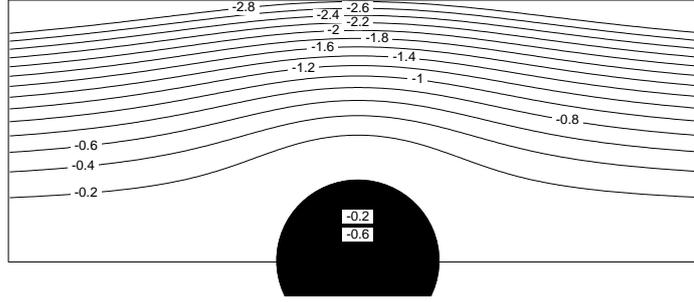


FIGURE 6 – Écoulement à petit  $Re$  autour d'une sphère. Lignes de courant dans le référentiel où la sphère est immobile.

À partir du champ de vitesse (5) on calcule les contraintes à la surface de la sphère et on obtient la formule de Stokes pour la force de traînée :

$$T = 6\pi\eta aU \quad (6)$$

La valeur exacte de la vitesse de sédimentation est donc :

$$U_{sed} = \frac{2}{9} \frac{\delta\rho g a^2}{\eta} \quad (7)$$

## 2.2 Écoulement autour d'une sphère fluide

Un calcul similaire à celui effectué pour une sphère solide peut être fait pour une goutte ou une bulle, à condition que les interfaces se déforment peu. Il faut remplacer la condition de non glissement à la surface de la sphère par la continuité des vitesses et des contraintes. Si la viscosité du fluide à l'intérieur de la sphère est  $\lambda\eta$ , la force de traînée est :

$$\mathbf{F} = -2\pi\eta a\mathbf{U} \frac{3\lambda + 2}{\lambda + 1}. \quad (8)$$

Dans la limite  $\lambda \gg 1$  qui correspond à une sphère solide, on retrouve la formule de Stokes avec le préfacteur  $6\pi$ . En revanche, si la viscosité du fluide interne est beaucoup plus petite que celle du fluide externe (cas d'une bulle de gaz dans un liquide),  $\lambda \rightarrow 0$  et le préfacteur est  $4\pi$ .

## 2.3 Force sur un objet très allongé

La détermination de la force exercée sur un objet très allongé est essentielle pour comprendre les modes de propulsion par cils et flagelles des microorganismes. Dans le cas d'un objet cylindrique de grand rapport d'aspect ( $L \gg a$ ) la force de traînée  $F_n$  pour un déplacement perpendiculaire à l'axe et  $F_t$  pour un déplacement parallèle à l'axe sont :

$$F_n = \frac{4\pi\eta L V_n}{\ln(L/a) + 0.5} \quad \text{et} \quad F_t = \frac{2\pi\eta L V_t}{\ln(L/a) - 0.5} \quad (9)$$

où  $V_n$  et  $V_t$  sont les composantes de vitesse normale et parallèle à l'axe.

Pour les très grands allongements  $\ln(L/a) \gg 1$ , la résistance au déplacement orthogonal à l'axe est deux fois plus grande que la résistance au déplacement longitudinal. Cette anisotropie des résistances implique que la force de traînée n'est pas colinéaire à la vitesse lorsque l'axe du bâtonnet est incliné par rapport à la direction de déplacement (Fig. 7).

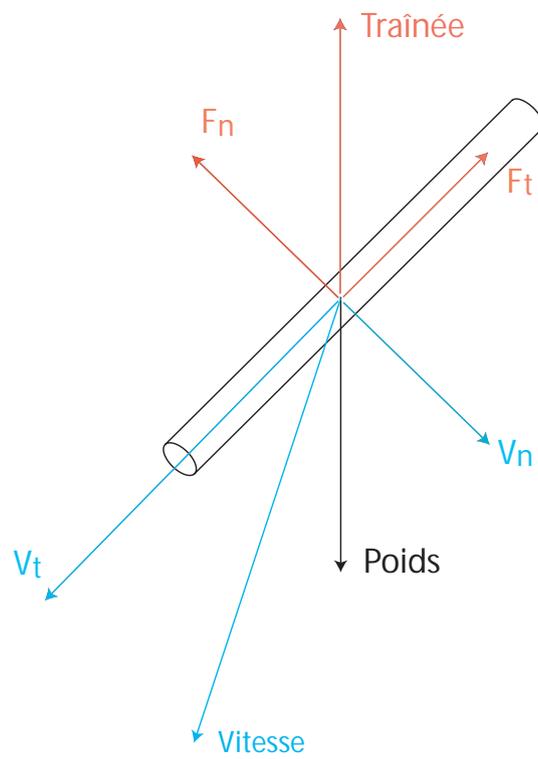


FIGURE 7 – Décomposition des composantes de vitesse et de force sur un objet allongé qui sédimente à petit nombre de Reynolds. Le poids est équilibré par la force de traînée qui se décompose suivant l'axe de l'objet et sa normale en  $F_t$  et  $F_n$ .