Lubrification

1 Principe de la lubrification

Une des circonstances importantes dans laquelle l'inertie du fluide peut être négligée concerne les écoulements dits de lubrification. Ce terme recouvre en particulier les écoulements de fluides visqueux confinés entre deux parois solides très proches en mouvement relatif, mais les approximations associées s'étendent plus généralement aux couches minces de fluides.

Considérons deux parois qui délimitent un espace de très grand rapport d'aspect : l'épaisseur moyenne $< h >$ est très petite devant la longueur L. De plus, si l'épaisseur h varie d'un point à un autre de l'écoulement, nous nous restreignons au cas où cette variation est très lente, c'est-à-dire : $dh/dx \ll 1$.

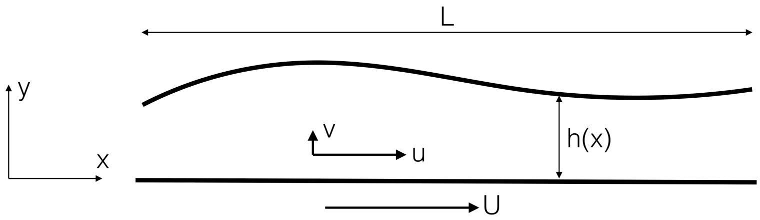

FIGURE 1 – Géométrie typique d'un écoulement de lubrification.

Cette géométrie particulière a deux conséquences :

i) la composante longitudinale de vitesse u est beaucoup plus grande que la composante transverse v. En effet, la conservation de la masse impose :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{u}{L} + \frac{v}{h} = 0 \tag{1}$$

d'où :

$$u \approx v\frac{L}{h} \gg v \tag{2}$$

ii) la force qui s'exerce sur les parois est beaucoup plus grande dans la direction normale à l'écoulement que dans la direction parallèle à l'écoulement. La force normale F_n (par unité de longueur dans la troisième direction z) est l'intégrale de la pression sur une des parois solides : $F_n = \int_0^L (p - p_0)\, dx \approx (p - p_0)L$. Toujours en tenant compte du rapport d'aspect $L/h \gg 1$, il est possible de déterminer un ordre de grandeur de la pression à partir de l'équation de Stokes :

$$\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \approx \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \eta\frac{U}{h^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{p - p_0}{L} \tag{3}$$

d'où :

$$p - p_0 \approx \eta\frac{UL}{h^2} \; et \; F_n \approx \eta\frac{UL^2}{h^2} \tag{4}$$

D'autre part la force F_t (toujours par unité de longueur dans la troisième direction z) dans la direction parallèle à l'écoulement est l'intégrale de la contrainte tangentielle sur la paroi solide :

$$F_t = \int_0^L \sigma_{xy}\, dx = \int_0^L \eta\frac{\partial u}{\partial y}\, dx \approx \eta\frac{UL}{h} \tag{5}$$

d'où :

$$F_t = F_n \frac{h}{L} \ll 1 \tag{6}$$

Le rapport des deux composantes de force est égal au rapport des dimensions caractéristiques de l'écoulement. Ceci permet de supporter des charges importantes tout en conservant la possibilité d'un mouvement relatif avec une résistance faible. C'est le principe utilisé dans la lubrification des pièces mécaniques en rotation, dans les articulations entre les os, dans la sustentation des têtes de lecture de disques magnétiques ...

Notons que les approximations faites ci-dessus peuvent aussi s'appliquer au cas d'une couche mince de liquide confinée entre une surface solide et une surface libre (c'est le cas de l'étalement d'un liquide par centrifugation, "spin coating") ou bien d'une couche mince confinée entre deux surfaces libres (films de savon, nappes liquides). L'approximation est également valide si la couche mince de liquide a une courbure globale, pourvu que le rayon de courbure soit grand par rapport à l'épaisseur de la couche (pensons par exemple à un film de liquide ruisselant sur un cylindre ou une sphère).

2 Comment résoudre un problème de lubrification ?

2.1 Fluide confiné entre deux parois solides

Nous prenons ici l'exemple d'un écoulement entre deux parois solides, l'une plane placée en $y = 0$ et l'autre définie par $y = h(x)$, avec $0 \leq x \leq L$. On se place dans le repère où la surface supérieure est immobile, la surface plane se déplaçant horizontalement à la vitesse U (fig. 1) .

Avec les approximations énoncées ci-dessus, l'équation de Stokes se réduit à :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

En supposant que u varie très lentement avec x, on intégre deux fois la première équation par rapport à y, pour obtenir :

$$u = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + Ay + B.$$

La condition $u_{y=0} = U$, donne $B = U$ et la condition $u_{y=h} = 0$ donne

$$A = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{h}$$

d'où le profil de vitesse :

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - yh) + U\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Le débit de fluide Q (par unité de longueur dans la troisième dimension) est obtenu par intégration sur l'épaisseur $h(x)$:

$$Q = \int_0^h u \; dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2}.$$

Le fluide étant incompressible, le débit Q est ici indépendant de x et on peut exprimer le gradient de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta Q}{h^3} + \frac{6\eta U}{h^2}.$$

La variation de l'épaisseur h avec x étant donnée, on peut intégrer cette dernière équation. Les conditions aux limites pour la pression en $x = 0$ et $x = L$ étant fixées, on détermine la distribution de pression et le débit Q.

Enfin, pour calculer les forces exercées sur les parois solides, on intègre d'une part les contraintes normales :

$$F_y = \int_0^L p(x)dx$$

et d'autre part les contraintes tangentielles :

$$F_x = \int_0^L \eta \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} dx = -\int_0^L \left[\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h} \right] dx$$

2.2 Fluide confiné entre un solide et une interface fluide ou entre deux interfaces fluides

Si la couche de fluide est délimitée par des interfaces avec d'autres fluides non miscibles, les conditions aux limites qui s'appliquent sont maintenant la continuité des vitesses et des contraintes de part et d'autre de l'interface. En particulier, si l'interface est courbée, il faut tenir compte de la pression de Laplace dans la continuité des contraintes normales.