

Cinématique

Avant d’aborder la dynamique des fluides elle-même, c’est-à-dire les lois qui relient les diverses forces agissant sur les fluides et les écoulements, leur organisation spatiale et leur évolution temporelle, il est nécessaire de définir quelques notions de cinématique :

- comment décrit-on les écoulements par les champs de vitesse ?
- quelle est la relation entre l’accélération d’une particule de fluide et le champ de vitesse ?
- quelle est la conséquence de la conservation de la masse sur le champ de vitesse ?
- quelles sont les particularités d’un écoulement à deux dimensions ?
- comment représente-t-on graphiquement les écoulements et comment met-on en évidence le champ de vitesse expérimentalement ?

1 Descriptions eulérienne et lagrangienne.

La description des écoulements est faite, dans la très grande majorité des cas, à partir du champ de vitesse \mathbf{u} défini comme une fonction des variables d’espace et du temps : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. C’est-à-dire qu’on définit ou mesure en chaque point \mathbf{x} de l’espace, et à tout instant, la vitesse macroscopique du fluide, moyennée sur une longueur grande devant les distances intermoléculaires. Du point de vue expérimental, cette description dite “eulérienne” correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l’écoulement. Dans cette description, on observe différentes particules de fluide qui se succèdent en un même point de l’espace, comme lorsqu’on regarde l’eau défilier sous un pont. Si le champ de vitesse eulérien ne dépend pas du temps, l’écoulement est qualifié de stationnaire ; s’il dépend du temps, l’écoulement est instationnaire.

L’autre description, dite “lagrangienne”, consiste à suivre le mouvement d’une même particule de fluide au cours du temps. Le champ de vitesse est alors spécifié sous la forme : $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t)$ qui est la vitesse à l’instant t d’une particule de fluide qui se trouvait en \mathbf{r}_0 à l’instant t_0 . Cette description lagrangienne correspond aux expériences de visualisation dans lesquelles on dépose un traceur (particule solide, tache de colorant) en un point de l’écoulement et on suit la trajectoire de ce traceur. La trajectoire d’une particule de fluide est donnée par l’intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t') dt'$.

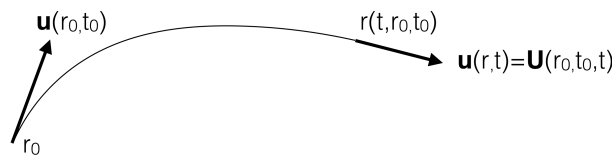


FIGURE 1 – Trajectoire d’une particule de fluide.

2 Dérivée “particulaire” de la vitesse.

Dans un écoulement, l’accélération d’une particule de fluide comporte, en général, deux contributions : la première contribution est due à la variation au cours du temps de la vitesse en chaque point de l’écoulement (caractère instationnaire de l’écoulement). La seconde contribution est due à l’exploration d’un champ de vitesse non uniforme par la particule de fluide. Même lorsque l’écoulement est stationnaire, si l’écoulement n’est pas uniforme, une particule de fluide va explorer au cours de son déplacement des zones de plus grande ou plus faible vitesse (voir, par

exemple, l'écoulement dans un élargissement brusque représenté sur la fig. 2); il en résulte un terme d'accélération "convective".

La première contribution à l'accélération est la dérivée temporelle de la vitesse eulérienne : $\partial \mathbf{u} / \partial t$. La seconde contribution est liée au fait que la particule peut explorer des régions où la vitesse est différente. Si la particule de fluide se trouve en \mathbf{r}_0 à l'instant t , elle parcourt en un temps δt une distance $\delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \delta t + O(\delta t^2)$. La vitesse du fluide au point $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}$ est : $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}$. L'accélération correspondante de la particule de fluide est : $(\nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}) / \delta t$. En prenant la limite $\delta t \mapsto 0$, $\delta \mathbf{r} / \delta t \mapsto \mathbf{u}$ et l'accélération convective s'écrit : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de telle sorte que l'accélération totale d'une particule de fluide s'écrit :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1)$$

Il faut noter que le gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$ est une quantité tensorielle dont les composantes sont $\partial u_i / \partial x_j$. En coordonnées cartésiennes, les trois composantes de l'équation 1 s'écrivent :

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4)$$

L'accélération convective est la projection du gradient de vitesse sur la direction locale de l'écoulement, c'est la variation spatiale de la vitesse vue en se déplaçant avec le fluide.

3 Conservation de la masse.

Ecrivons le bilan de quantité de fluide entrant et sortant d'un volume de référence Ω , fixe par rapport au système de coordonnées dans lequel est exprimée la vitesse eulérienne \mathbf{u} . La variation par unité de temps de la masse contenue dans le volume Ω est égale à la masse traversant, par unité de temps, la surface $\partial \Omega$ qui délimite le volume Ω . Soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, d\tau = - \int_{\partial \Omega} \rho \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

où ρ est la masse volumique du fluide, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface $\partial \Omega$ et orienté vers l'extérieur de celle-ci. En utilisant le théorème de la divergence pour transformer le second membre en intégrale de volume, et en intervertissant la différentiation temporelle et l'intégration dans le premier membre, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0.$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume Ω considéré et l'intégrand est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

soit, en développant le second terme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

La somme des deux premiers termes du membre de gauche est la dérivée “particulaire” (en suivant le mouvement du fluide) de la masse volumique. Si le fluide est incompressible, la masse volumique n’évolue pas au cours du temps et l’équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

L’équation 7 exprime la conservation du volume d’un élément de fluide au cours de sa déformation par l’écoulement. En pratique, un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible si plusieurs conditions sont réunies :

- i) la vitesse typique de l’écoulement U est petite devant la vitesse du son c , c’est-à-dire, le nombre de Mach $M = U/c$ est petit devant l’unité. Dans l’eau où la vitesse du son est voisine de 1500 m/s cette condition est presque toujours vérifiée. En revanche, dans l’air où c est de l’ordre de 300 m/s, de nombreux écoulements, en particulier en aéronautique, sont influencés par la compressibilité du fluide.
- ii) dans un écoulement instationnaire, si ν est la fréquence typique de variation temporelle de la vitesse, ν doit être tel que $1/\nu \ll c/L$ où L est une dimension caractéristique de l’écoulement. C’est-à-dire qu’à l’échelle du temps typique de fluctuation de la vitesse, une onde de pression se propage très rapidement à travers tout l’écoulement. Il est évident que si on s’intéresse à la propagation des ondes sonores, par exemple au bruit rayonné par un jet turbulent, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide.
- iii) enfin, il est nécessaire que la variation de pression due à une force extérieure (la gravité par exemple) soit petite devant la pression absolue. Cette dernière condition est presque toujours satisfaite, même si on considère des écoulements atmosphériques sur des échelles verticales très grandes.

En pratique, à l’exception notable des applications aéronautiques et de l’acoustique, les effets de compressibilité sont négligeables dans les écoulements et nous les ignorerons dans la suite de ce cours.

4 Écoulement bidimensionnel incompressible. Fonction de courant.

Dans deux nombreuses situations, il est possible de considérer que l’écoulement étudié est à la fois incompressible et bidimensionnel, ce qui en simplifie nettement la description. Le vecteur vitesse est alors décrit par deux composantes qui sont reliées par la condition de conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette condition peut être satisfaite en posant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

La fonction ψ ainsi définie est la *fonction de courant*. En effet, les lignes $\psi = C^{te}$ ont la propriété d’être des lignes de courant. L’équation des lignes de courant est : $vdx - udy = 0$, soit en remplaçant les composantes de vitesse par les dérivées de la fonction de courant :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -d\psi = 0.$$

Le débit entre deux lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ est donné par la différence de valeur de la fonction de courant entre ces deux lignes : $Q = \psi_2 - \psi_1$. En effet, $Q = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl$ où \mathbf{n} est la normale à une ligne quelconque joignant les lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$. Si (dx, dy) sont les composantes du vecteur tangent à la ligne d’intégration, celles de $\mathbf{n} dl$ sont $(dy, -dx)$ et le débit Q est :

$$Q = \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} (-dy) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Ainsi, lorsqu'on représente un écoulement par des lignes de courant correspondant à des valeurs de ψ régulièrement espacées, le débit de fluide $Q = \Delta\psi$ est le même entre tous les couples de lignes adjacentes. L'espacement des lignes reflète alors directement la vitesse du fluide : la distance d entre les lignes de courant est inversement proportionnelle à la vitesse locale du fluide : $u = \Delta\psi/d$. De la même manière que le champ magnétique, qui est à divergence nulle, dérive d'un potentiel vecteur, le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel incompressible dérive du potentiel vecteur $\mathbf{A} = \psi\mathbf{k}$, \mathbf{k} étant le vecteur unitaire sur l'axe z .

Il est également possible de définir une fonction de courant dans un écoulement axisymétrique incompressible, par exemple, l'écoulement autour d'une sphère. Si le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée azimutale θ autour de l'axe de symétrie, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru_r}{\partial r} = 0$$

où x est la coordonnée le long de l'axe de symétrie. Cette équation est satisfaite si :

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \text{ et } u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

5 Différentes représentations d'un écoulement

5.1 Lignes de courant

La structure d'un écoulement bidimensionnel est appréhendée facilement par une représentation des lignes de courant, tangentes en tout point au champ de vitesse instantané.

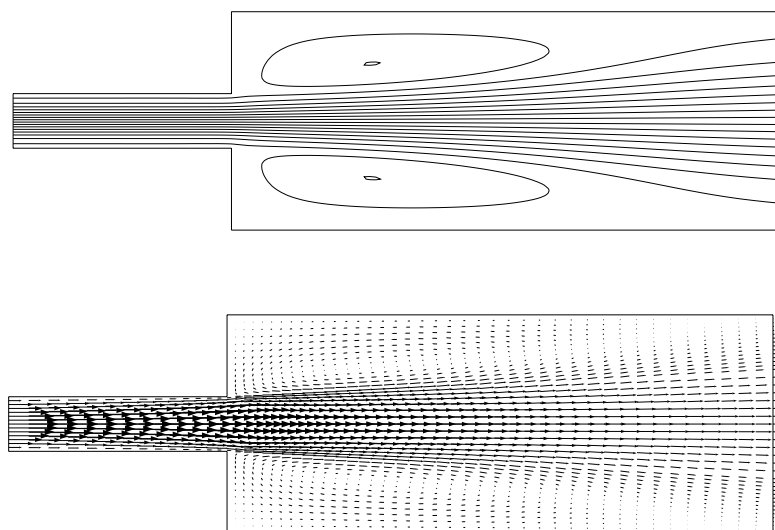


FIGURE 2 – Deux représentations du même écoulement bidimensionnel dans un expansion brusque, avec des lignes de courant (en haut) et des vecteurs vitesse (en bas). Les lignes de courant correspondent à des valeurs régulièrement espacées de la fonction de courant ; la distance entre deux lignes de courant est donc ici inversement proportionnelle à la vitesse locale.

5.2 Trajectoires de particules

Expérimentalement, on ne peut pas mettre en évidence directement les lignes de courant. Pour matérialiser l'écoulement, on met en suspension des particules solides (idéalement de densité égale à

celle du fluide) dont on suit la position au cours du temps (Fig. 3). Dans un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules et les lignes de courant sont identiques, mais, attention, ce n'est pas le cas dans un écoulement instationnaire.

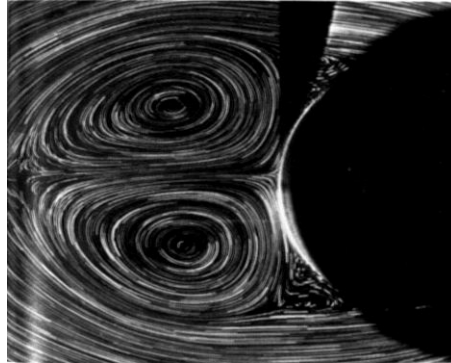


FIGURE 3 – Écoulement dans le sillage d'un cylindre mis brusquement en mouvement, matérialisé par des particules en suspension dans le fluide. Le temps d'exposition de la photographie est choisi pour que les trajectoires de particules matérialisent les lignes de courant. Photographie : R. Bouard et M. Coutanceau, *J. Fluid Mech.* **79**, 257 (1977)

5.3 Lignes d'émission

Une autre manière de visualiser expérimentalement un écoulement est d'injecter un traceur (par exemple un colorant dans un liquide, de la fumée dans l'air) en un ou plusieurs points. Les lignes ainsi matérialisées sont des *lignes d'émission*. En écoulement stationnaire, elles sont confondues avec les lignes de courant, mais pas en écoulement instationnaire (Fig. 4).



FIGURE 4 – Écoulement instationnaire dans le sillage d'un cylindre (non visible, à gauche du cadre de la photo). Visualisation simultanée des lignes d'émission créées par injection de colorant sur le cylindre et de trajectoires de particules en suspension. Ces dernières révèlent la direction instantanée du vecteur vitesse. Cliché PMMH.

5.4 Champs de vortacité

Le rotationnel de la vitesse ou *vortacité* joue un rôle particulier dans la dynamique des écoulements, par exemple dans la compréhension des forces subies par une surface portante (aile d'avion, d'oiseau ou insecte). La vortacité est une mesure de la vitesse de rotation locale d'un élément de fluide. La concentration de la vortacité permet d'identifier des structures tourbillonnaires comme dans le sillage d'un obstacle (Fig. 5).

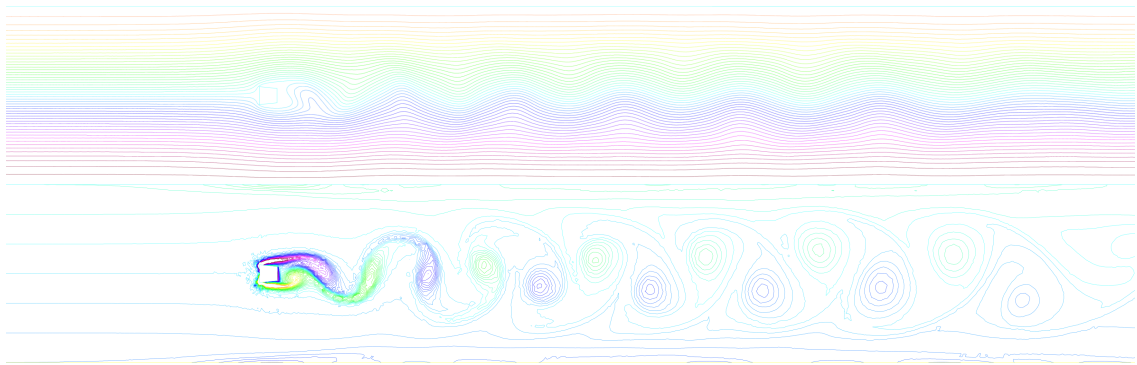


FIGURE 5 – Écoulement instationnaire dans le sillage d'un obstacle de section carrée, résultat de simulation numérique. En haut, lignes de courant. En bas, lignes d'égales valeur de la vorticité au même instant.