Dynamique des fluides newtoniens. Équation de Navier-Stokes

1 Bilan de quantité de mouvement dans un milieu continu

La variation temporelle de la quantité d'un mouvement d'un élément de fluide de volume Ω borné par une surface $\partial\Omega$ (Fig. 1) est donnée par la somme de trois termes :
- le flux net de quantité de mouvement traversant la surface $\partial\Omega$
- la somme des forces en volume agissant sur Ω
- la somme des forces de surface agissant sur $\partial\Omega$.

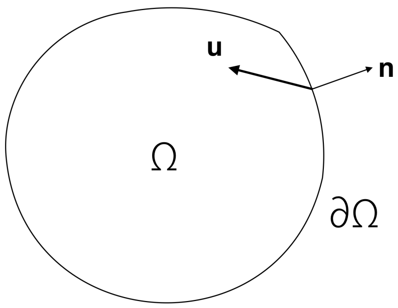

FIGURE 1 – Volume de contrôle pour le bilan de quantité de mouvement.

Le volume de fluide traversant la frontière $\partial\Omega$ par unité de surface et par unité de temps est $-\mathbf{u.n}$ et la quantité de mouvement transportée par unité de volume est $\rho\mathbf{u}$. Le bilan de quantité de mouvement dans le volume Ω s'écrit donc :

$$\int_\Omega \frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{uu.n}\, dS + \int_\Omega \rho\mathbf{f}\, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}.\mathbf{n}\, dS \tag{1}$$

où $\mathbf{f}$ est la force en volume par unité de masse (par exemple $\mathbf{g}$), $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est le tenseur des contraintes et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$.

En utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_\Omega \frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.\rho\mathbf{uu}\, dV = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\, dV + \int_\Omega \nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\, dV \tag{2}$$

Le terme $\nabla.\rho\mathbf{uu}$ s'écrit, pour sa composante i (la sommation sur les indices répétés est implicite) :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = u_i \frac{\partial\rho u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

et le terme $\nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ s'écrit pour sa composante i :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le volume Ω, on peut l'écrire sous forme locale et non plus intégrale :

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla.\rho\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} + \nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{3}$$

soit :

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho\mathbf{u}\right) + \rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} + \nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{4}$$

La conservation de la masse du fluide impose : $\partial_t\rho + \nabla.\rho\mathbf{u} = 0$ et l'équation pour la quantité de mouvement se ramène donc à :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) = \rho\mathbf{f} + \nabla.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{5}$$

Le terme entre parenthèses dans le membre de gauche est l'accélération d'une particule de fluide. Elle fait intervenir, d'une part le caractère instationnaire de l'écoulement par la *variation temporelle* du champ de vitesse eulérien et, d'autre part, l'accélération convective due à la *variation spatiale* du champ de vitesse.

Pour obtenir une équation de la dynamique ne faisant intervenir que le champ de vitesse, il faut définir la relation existant entre le tenseur des contraintes et la vitesse, de la même façon qu'en élasticité l'équation de Lamé est obtenue en exprimant la relation entre contraintes et déformations.

2 Tenseur des contraintes dans un fluide visqueux incompressible (newtonien)

L'établissement rigoureux des relations entre le tenseur des contraintes et le champ de vitesse peut se faire dans un cadre de physique statistique hors d'équilibre en décrivant le mouvement microscopique des atomes ou des molécules et en évaluant le transfert de quantité de mouvement au sein du fluide. Dans un fluide au repos (sans écoulement macroscopique), le tenseur des contraintes se ramène à la pression : $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$. Il n'y a que des contraintes normales et elles sont indépendantes de l'orientation. La pression p est ici la pression au sens de la thermodynamique et elle obéit à l'équation d'état du fluide.

Pour une large classe de fluides (les gaz, les liquides constitués de petites molécules), l'écoulement macroscopique ne modifie pas la structure microscopique du fluide. On peut alors faire l'hypothèse que les contraintes dépendent linéairement du champ de vitesse macroscopique. Le tenseur des contraintes (qui est symétrique) ne peut dépendre que de la partie symétrique du gradient de vitesse $\underline{\underline{\boldsymbol{e}}} = 1/2(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ sous la forme générale : $\sigma_{ij} = \sum_k \sum_l A_{ijkl}\ e_{kl}$.

Si le fluide est isotrope (contrairement par exemple aux cristaux liquides), le tenseur des propriétés mécaniques $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ n'a que deux composantes non nulles. De la même manière, un matériau élastique isotrope est caractérisé par les deux coefficients de Lamé, ou par son module d'Young et son coefficient de Poisson.
Si le fluide est de plus incompressible, il est caractérisé par sa seule viscosité dynamique η et la relation entre contrainte et champ de vitesse est :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

où p est toujours appelée la pression, mais ce n'est plus la pression au sens de la thermodynamique parce qu'elle dépend de l'écoulement.
Seule la partie symétrique du gradient de vitesse intervient, parce que la partie antisymétrique correspond à la rotation d'un élément de fluide sur lui-même, mais sans déformation.
En coordonnées cartésiennes l'expression du tenseur des contraintes est :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{6}$$

3 Équation de Navier-Stokes

En prenant en compte l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien incompressible, la divergence de $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ s'écrit : $-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{u}$ et l'équation d'évolution de la quantité de mouvement est *l'équation de Navier-Stokes* qui s'écrit, en notation vectorielle pour le champ de vitesse eulérien $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{7}$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique et $\mathbf{f}$ la force extérieure exercée sur un élément de volume de masse unité.
En notation indicielle pour la composante i de vitesse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \tag{8}$$

où la sommation sur les indices répétés est implicite, en l'occurence :

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1,3} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

En coordonnées cartésiennes (x, y, z), les trois composantes de l'équation de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + f_x \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + f_y \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + f_z \tag{11}$$

Noter que dans une direction où il n'y a pas de composante de vitesse, le gradient de pression dans cette direction est nul, en l'absence de force extérieure.
Par ailleurs, le champ de vitesse obéit à la condition d'incompressibilité $\nabla.\mathbf{u} = 0$.

4 Quelques données sur la viscosité dynamique

Il est bon d'avoir en tête quelques ordres de grandeur sur la viscosité dynamique des fluides. L'unité de viscosité du système international est le Pa.s ou Poiseuille.
La viscosité de l'eau à 20°C est 1 mPa.s. Celle de l'air, toujours à 20°C est $1,8 \times 10^{-5}$ Pa.s. Le glycérol est typiquement mille fois plus visqueux que l'eau.
La viscosité des liquides décroit avec la température. C'est un effet qu'on observe clairement en faisant chauffer de l'huile dans une poële. En revanche, la viscosité des gaz augmente avec la température. Cette différence de comportement s'explique par la différence de structure microscopique : un liquide est une phase dense où la distance moyenne entre molécules est comparable à leur taille alors que dans un gaz le libre parcours moyen est beaucoup plus grand que la taille des atomes ou des molécules.
A très basse température, on peut observer des effets quantiques sur la viscosité. L'hélium qui est liquide en dessous de 4,2° K, présente une transition de superfluidité à 1,6°K : la viscosité devient complètement nulle, résultat d'une condensation de Bose et d'un comportement "cohérent" des atomes d'hélium.