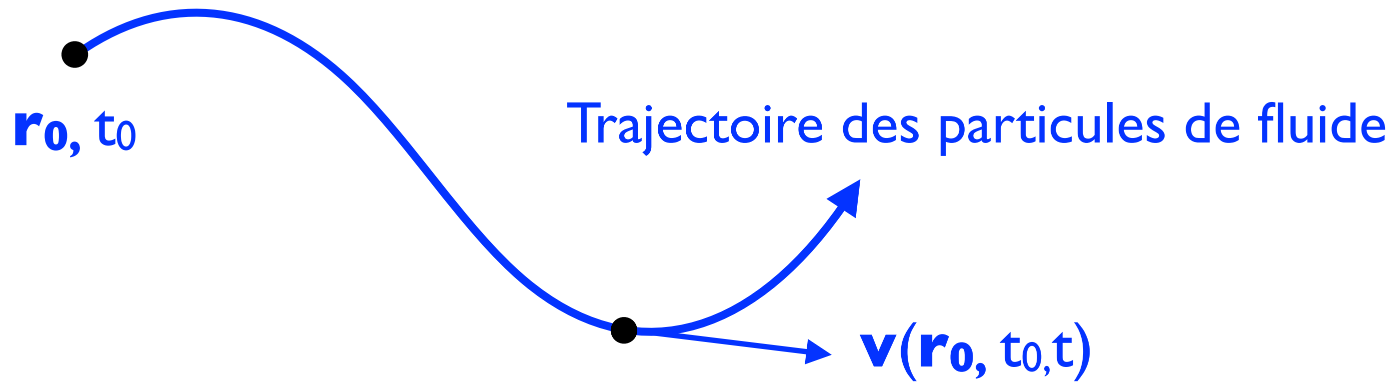
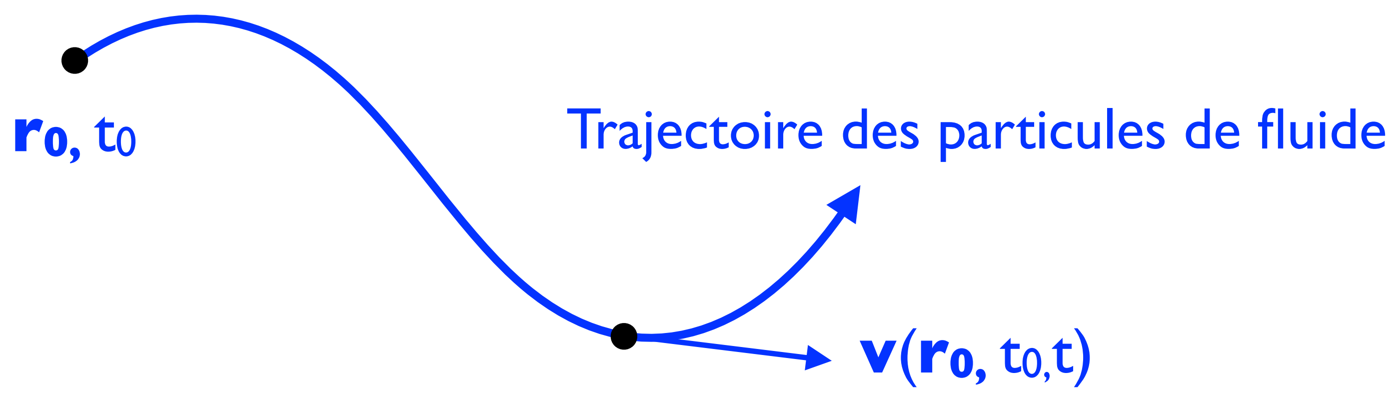
Description des écoulements

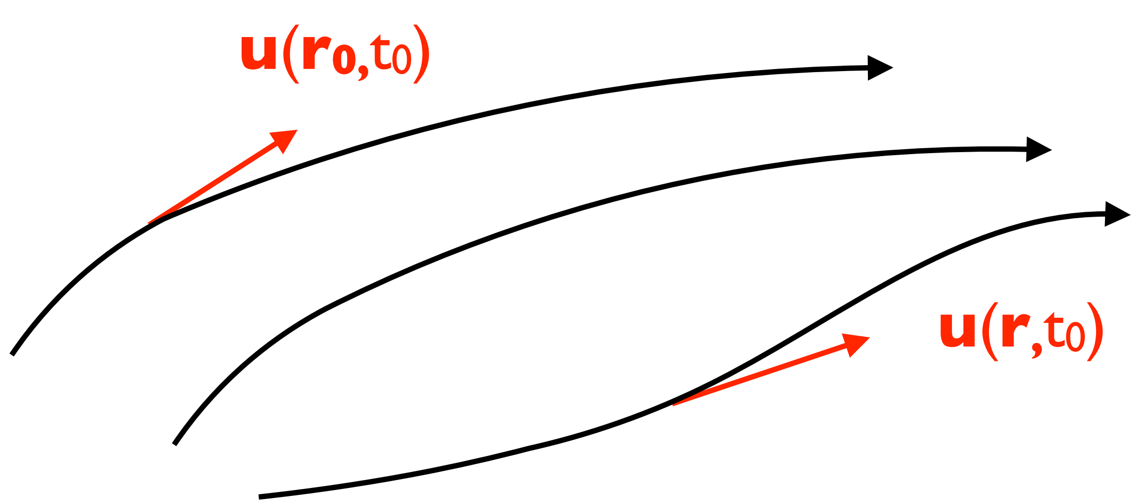
Description lagrangienne



Description des écoulements

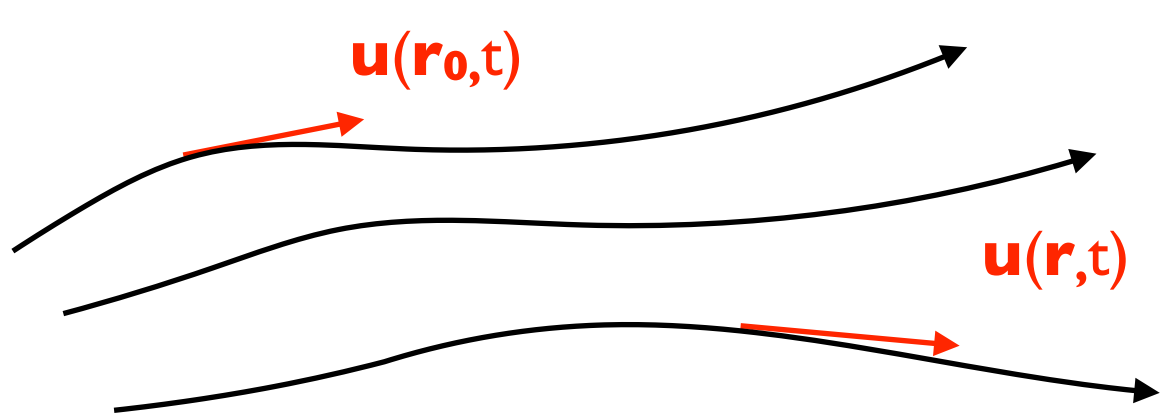
Description lagrangienne





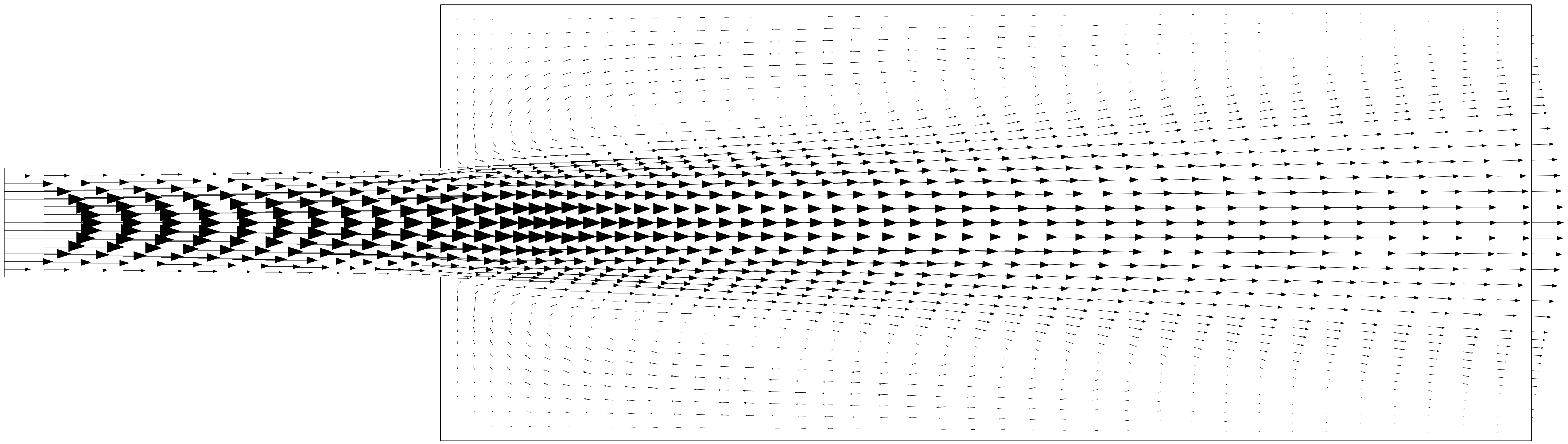
Lignes de courant à t_0

Description eulerienne

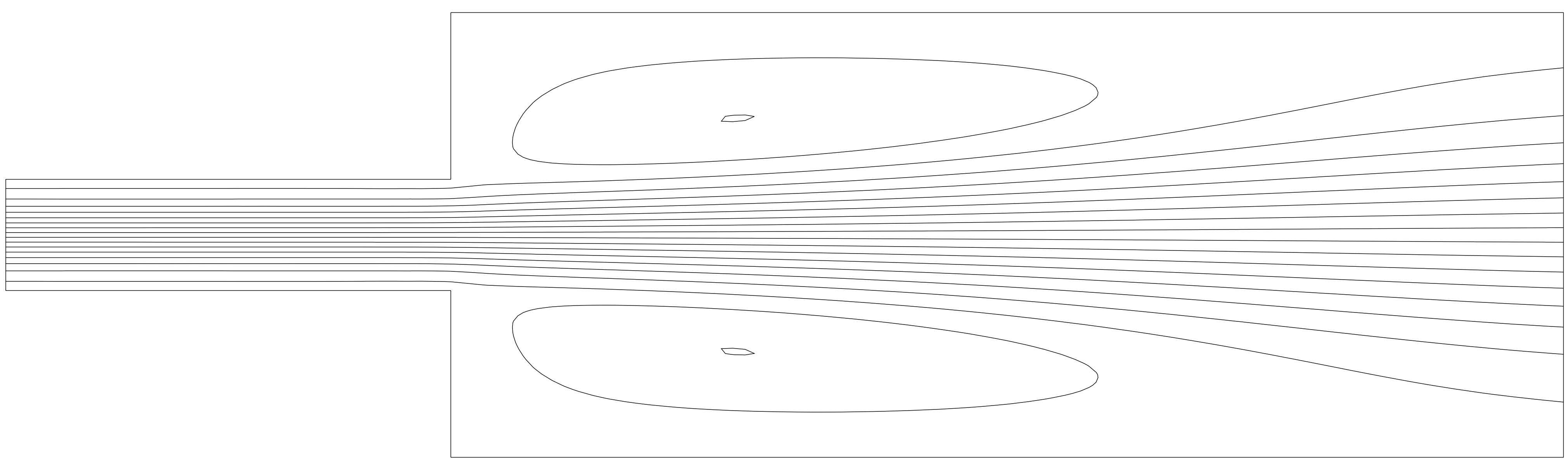


Lignes de courant à t

Un exemple de champ de vitesse eulérienne

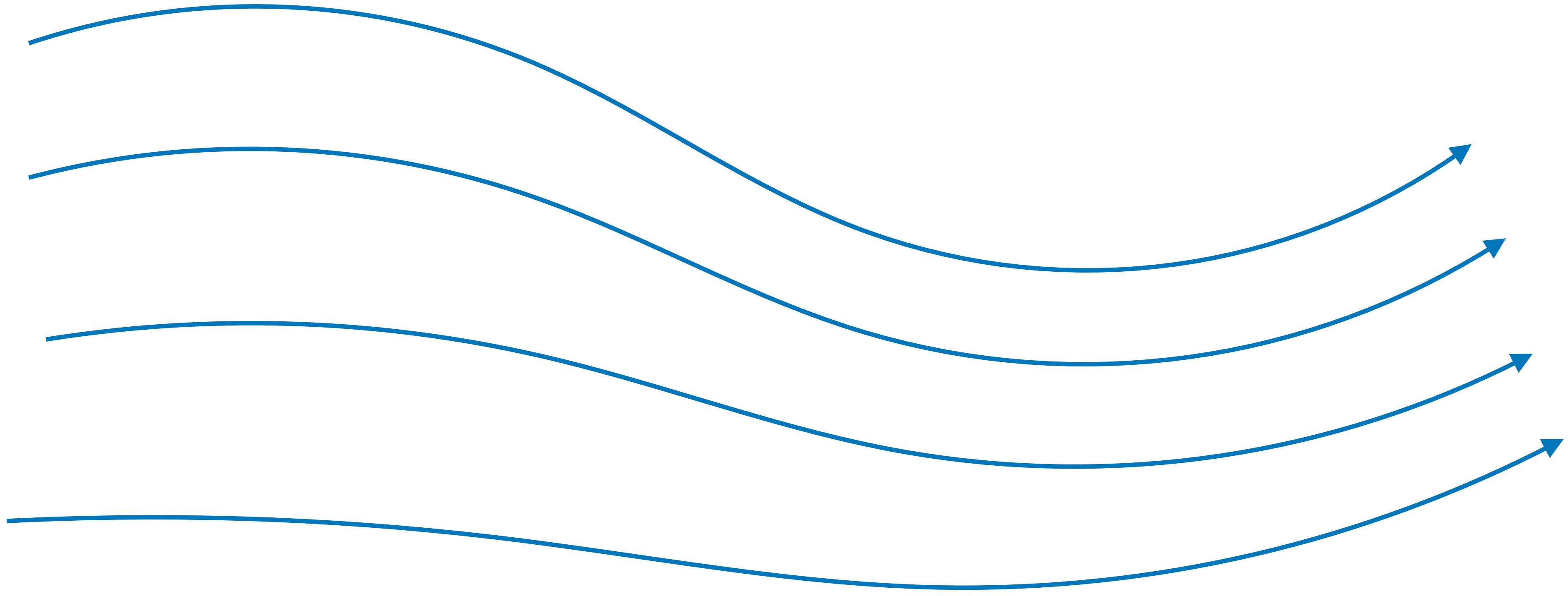


Vecteurs vitesse

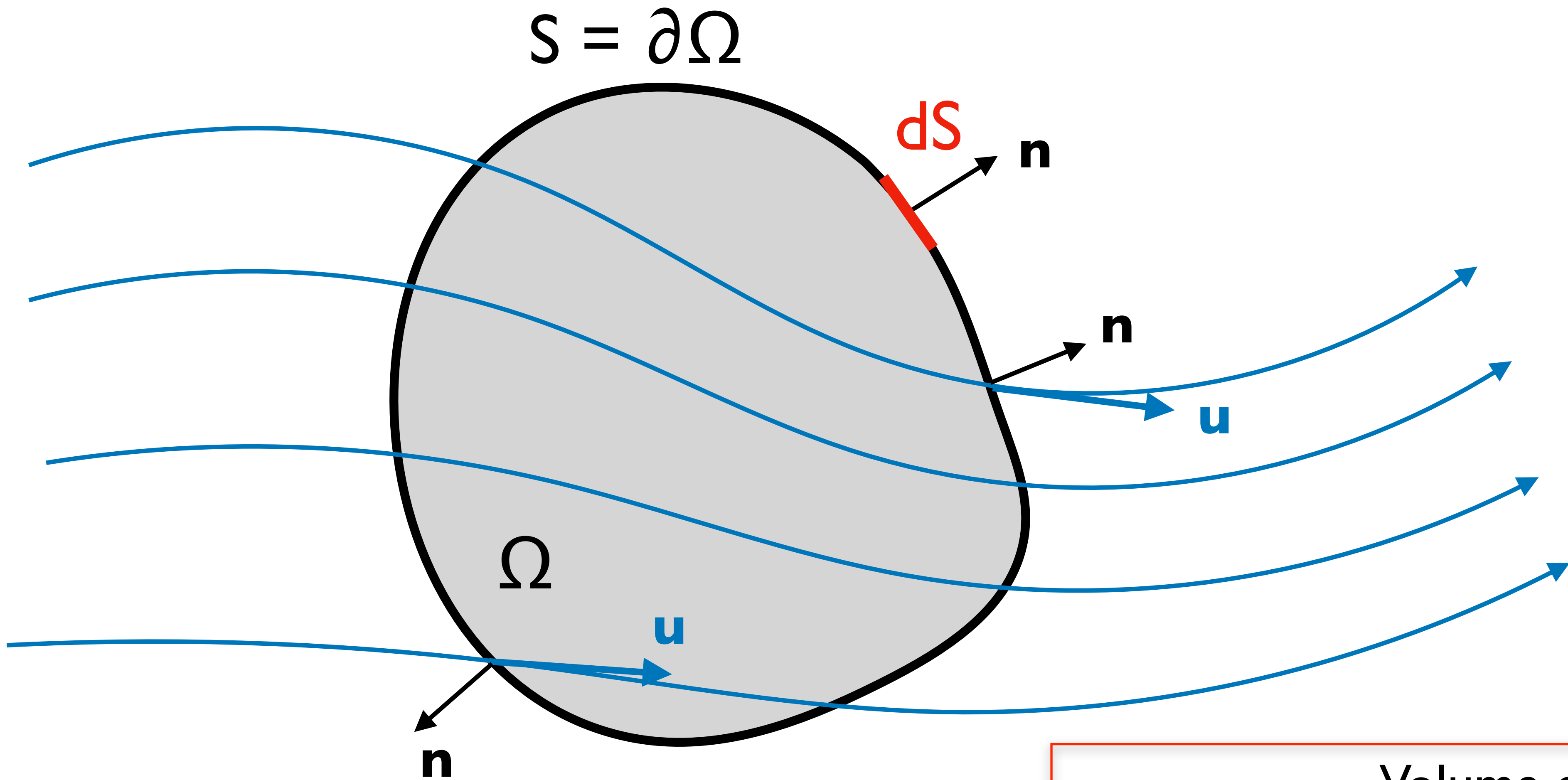


Lignes de courant

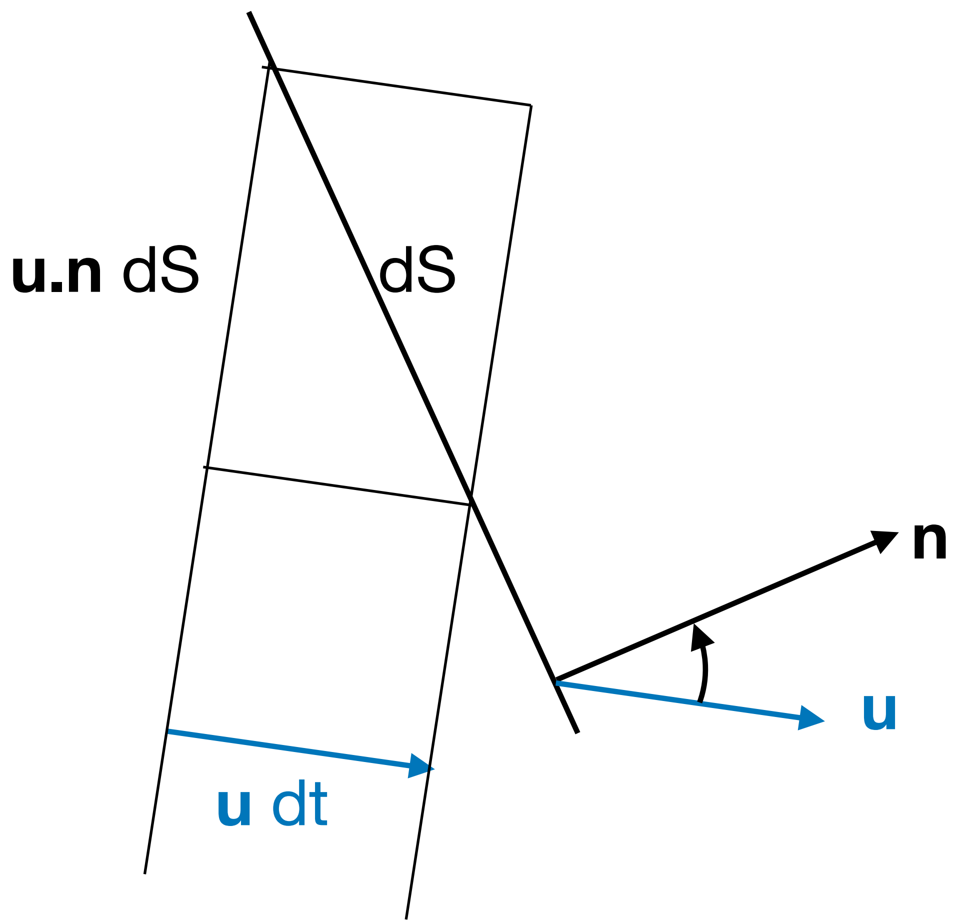
Conservation de la masse dans un écoulement



Conservation de la masse dans un écoulement

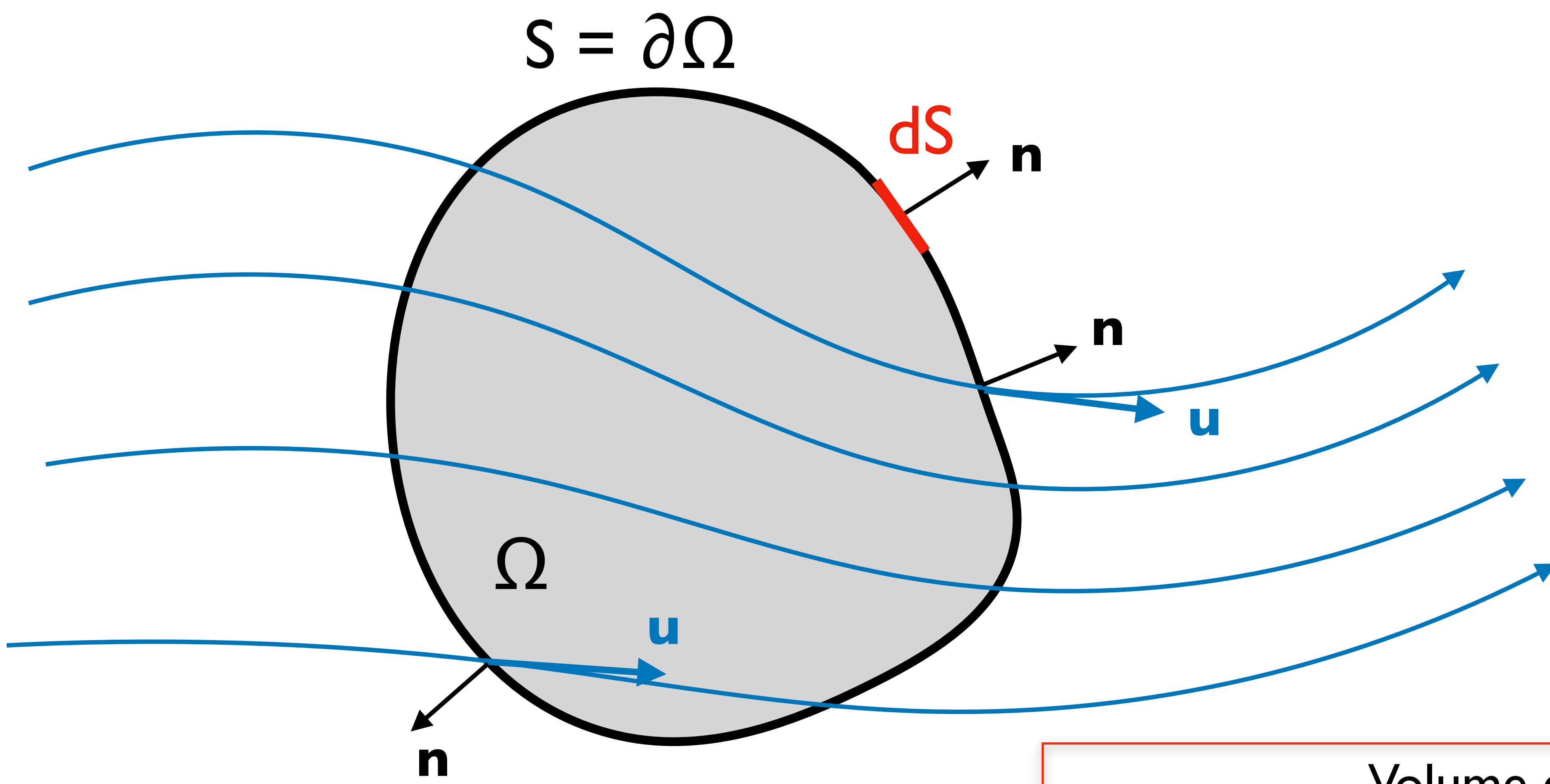


$-\mathbf{u}.\mathbf{n}$ Volume entrant par unité de surface par unité de temps



u.n dS
dS
n
u
u dt

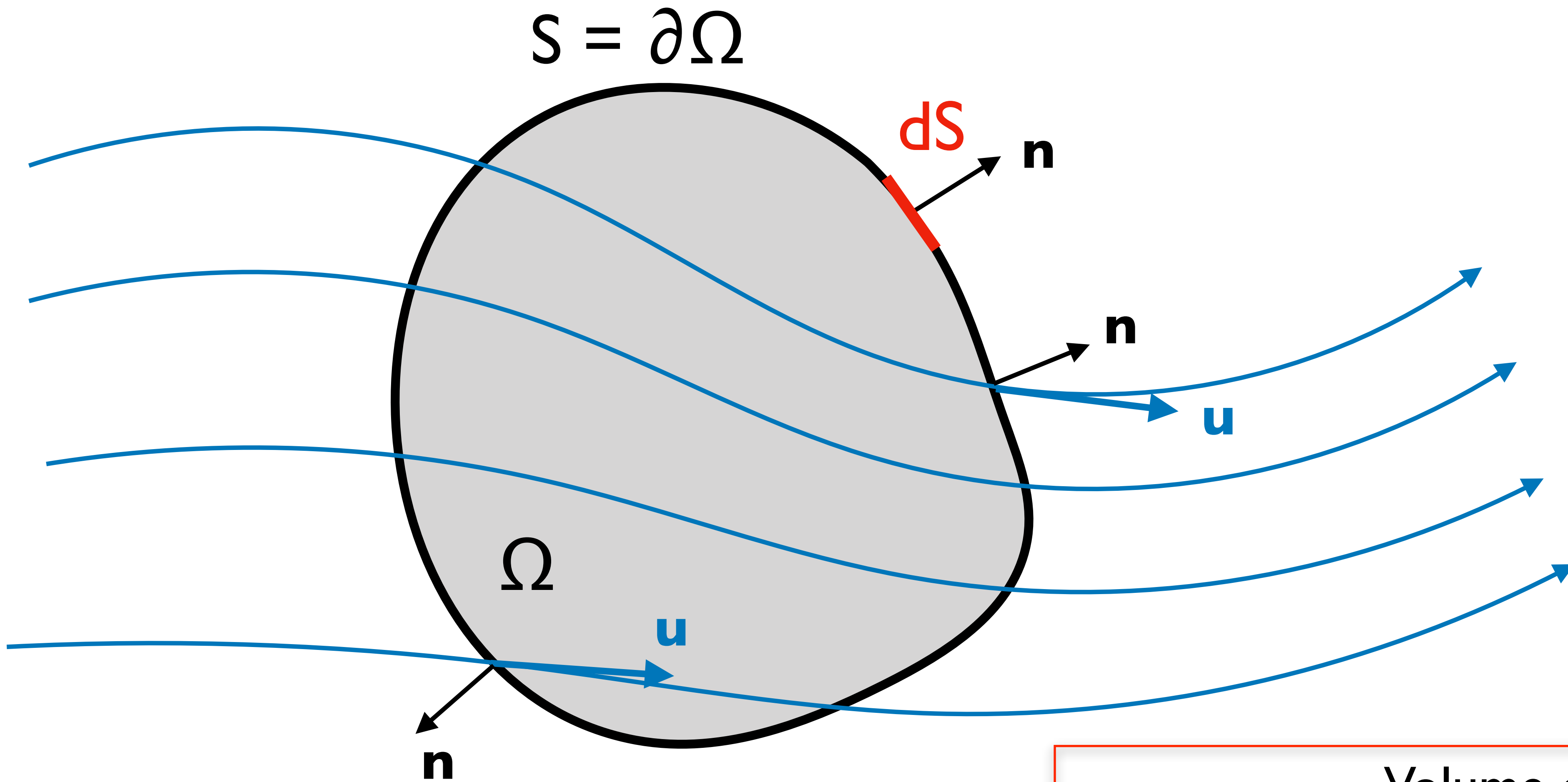
Conservation de la masse dans un écoulement



$-\mathbf{u}.\mathbf{n}$ Volume entrant par unité de surface par unité de temps

$$-\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

Conservation de la masse dans un écoulement



$-\mathbf{u}.\mathbf{n}$ Volume entrant par unité de surface par unité de temps

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla.(\rho \mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla. \equiv$ divergence

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.(\rho \mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla. \equiv$ divergence

En l'absence de source de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla\rho = 0$$

$\nabla \equiv$ gradient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla.(\rho \mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla. \equiv$ divergence

En l'absence de source de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla \rho = 0$$

$\nabla \equiv$ gradient

Si le fluide est « incompressible », masse volumique constante

$$\boxed{\nabla.\mathbf{u} = 0}$$

Fluide comme “incompressible” ?

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2}\delta p$$

c : vitesse du son

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2}\delta p$$

c : vitesse du son

En écoulement dominé par l’inertie du fluide: $\delta p \sim \rho u^2$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2} = M^2$$

M : Nombre de Mach

Fluide comme "incompressible" ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2}\delta p$$

c : vitesse du son

En écoulement dominé par l'inertie du fluide: $\delta p \sim \rho u^2$

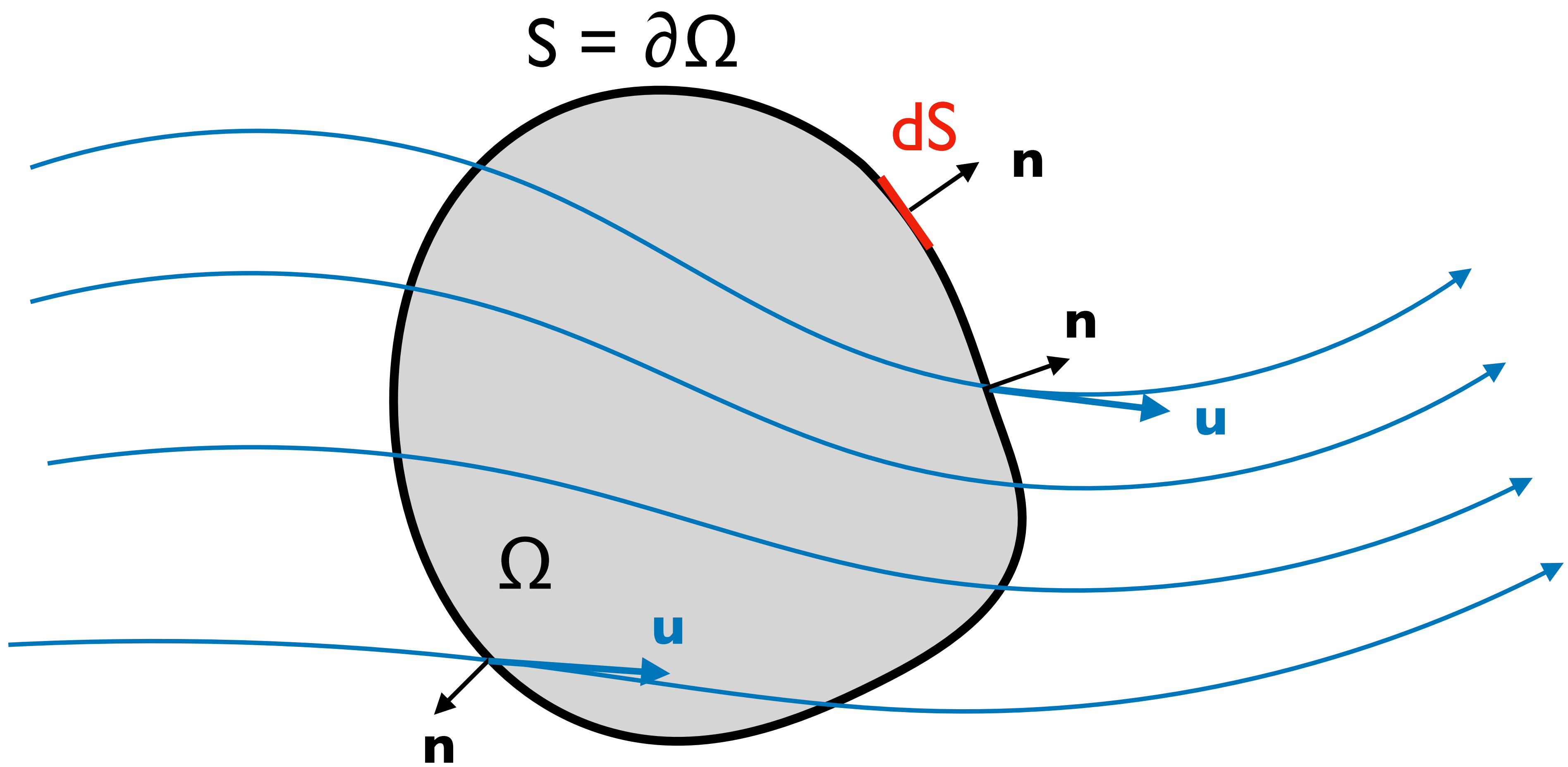
$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2} = M^2$$

M : Nombre de Mach

$\boxed{M \ll 1 \quad \text{Fluide quasi incompressible}}$

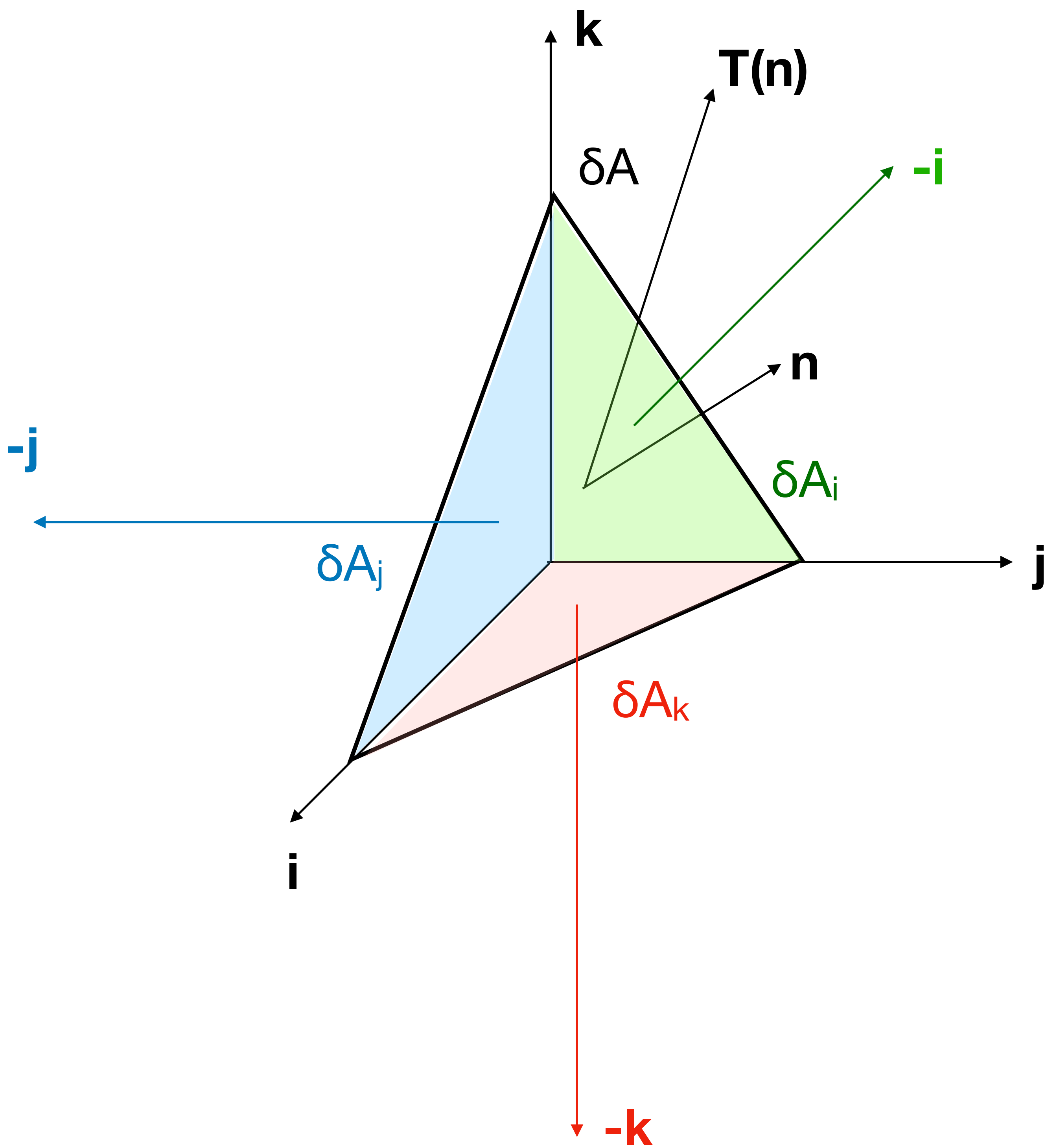
$M \sim 1$ ou $M > 1$ Ondes de choc

Conservation de la quantité de mouvement



$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\ dV - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\rho \mathbf{u}}_{\text{vecteur}}\ \underbrace{\mathbf{u}.\mathbf{n}}_{\text{scalaire}}\ dS \ + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}}_{\text{contraintes}}.\mathbf{n}\ dS$$

T(n) : vecteur contrainte totale sur la face de normale **n**



Forces de surface

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A$$

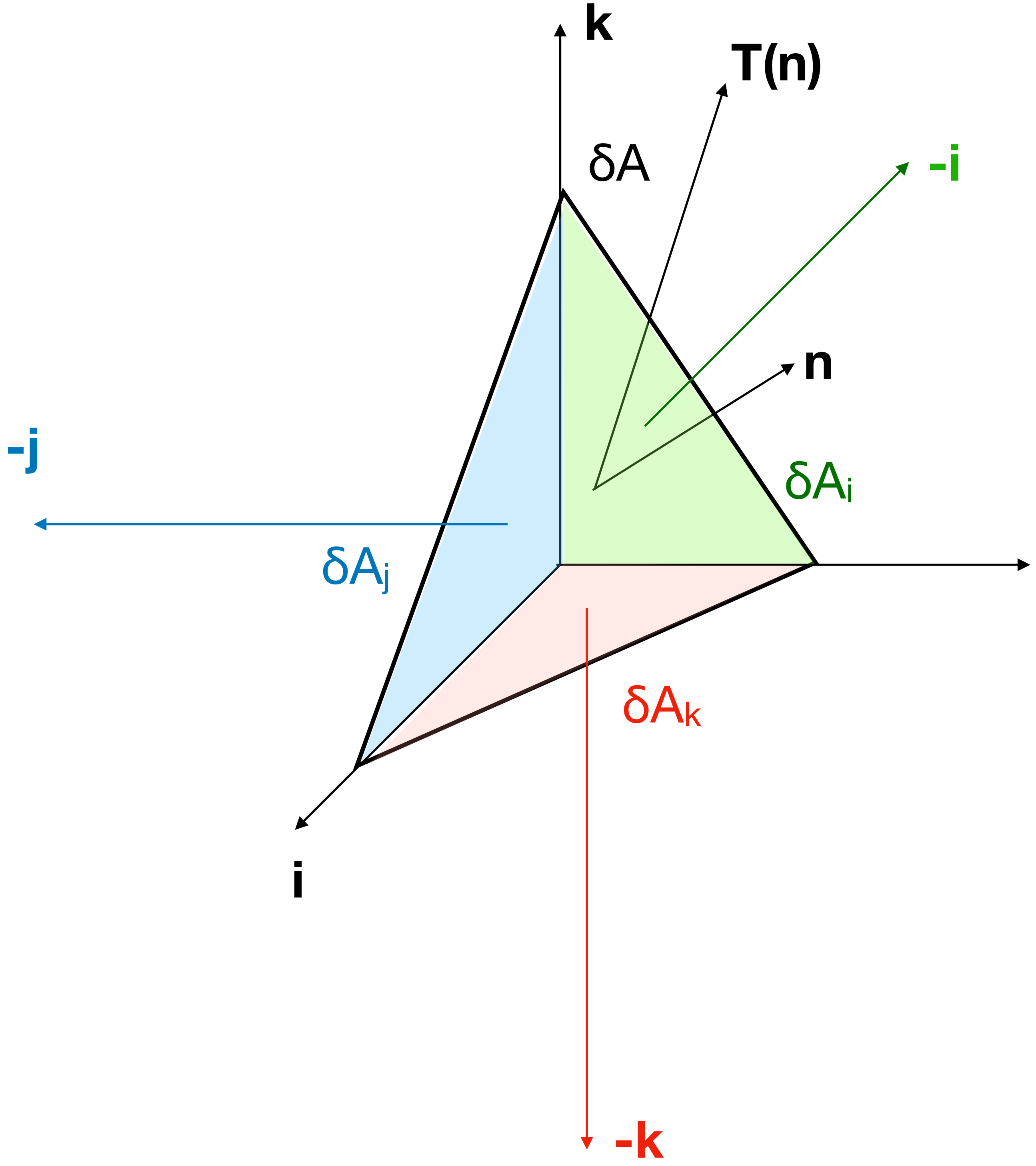
$$\mathbf{T}(-\mathbf{i})\delta A_i$$

$$\mathbf{T}(-\mathbf{j})\delta A_j$$

$$\mathbf{T}(-\mathbf{k})\delta A_k$$

$$\mathbf{T}(-\mathbf{i}) = -\mathbf{T}(\mathbf{i})$$

$$\delta A_i = \delta A\ \mathbf{i}.\mathbf{n}$$



Forces de surface

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A$$

$$-\mathbf{T}(\mathbf{i})\ \mathbf{i.n}\ \delta A$$

$$-\mathbf{T}(\mathbf{j})\ \mathbf{j.n}\ \delta A$$

$$-\mathbf{T}(\mathbf{k})\ \mathbf{k.n}\ \delta A$$

$$\mathbf{F_{surface}} = \sum \mathbf{T}\ \delta A$$

pfd sur l'élément de volume :

$$\rho \; \delta V \; \mathbf{a} = \rho \; \mathbf{f} \; \delta V + \sum \mathbf{T} \; \delta A$$

$$\rho \; \mathbf{a} = \rho \; \mathbf{f} + \sum \mathbf{T} \; \frac{\delta A}{\delta V}$$

$$\frac{\delta A}{\delta V} \sim \frac{1}{L} \to \infty \qquad L \to 0$$

$$\sum \mathbf{T} = 0$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{i})\ \mathbf{i.n} + \mathbf{T}(\mathbf{j})\ \mathbf{j.n} + \mathbf{T}(\mathbf{k})\ \mathbf{k.n}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{i})\ n_x + \mathbf{T}(\mathbf{j})\ n_y + \mathbf{T}(\mathbf{k})\ n_z$$

Composante x $$T_x(\mathbf{n}) = T_x(\mathbf{i})\ n_x + T_x(\mathbf{j})\ n_y + T_x(\mathbf{k})\ n_z$$

$$T_x(\mathbf{n}) = \sigma_{xx}\ n_x + \sigma_{xy}\ n_y + \sigma_{xz}\ n_z$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

contraintes normales

contraintes tangentielles

Tenseur des contraintes

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Vecteur contrainte (force/unité de surface)

Tenseur des contraintes

Normale à la surface considérée

$$\mathbf{T} = \sigma.\mathbf{n}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}\ \mathbf{u}.\mathbf{n}\ dS + \int_\Omega \rho \mathbf{f}\ dV + \int_{\partial\Omega} \sigma.\mathbf{n}\ dS$$

Théorème de la divergence:

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.\rho\mathbf{u}\mathbf{u}\, dV = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\, dV + \int_\Omega \nabla.\sigma\, dV$$

$\rho\mathbf{u}\mathbf{u}$: Flux de quantité de mouvement,

produit tensoriel $\longrightarrow$ tenseur de composantes $\rho u_i u_j$

Sa divergence :
(somme sur *j*)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Divergence des contraintes

$$\nabla.\sigma = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Pour un volume élémentaire de fluide :

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla.\rho\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho\mathbf{u}\right)}_{\substack{= 0 \\ \text{Conservation de la masse}}} + \rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

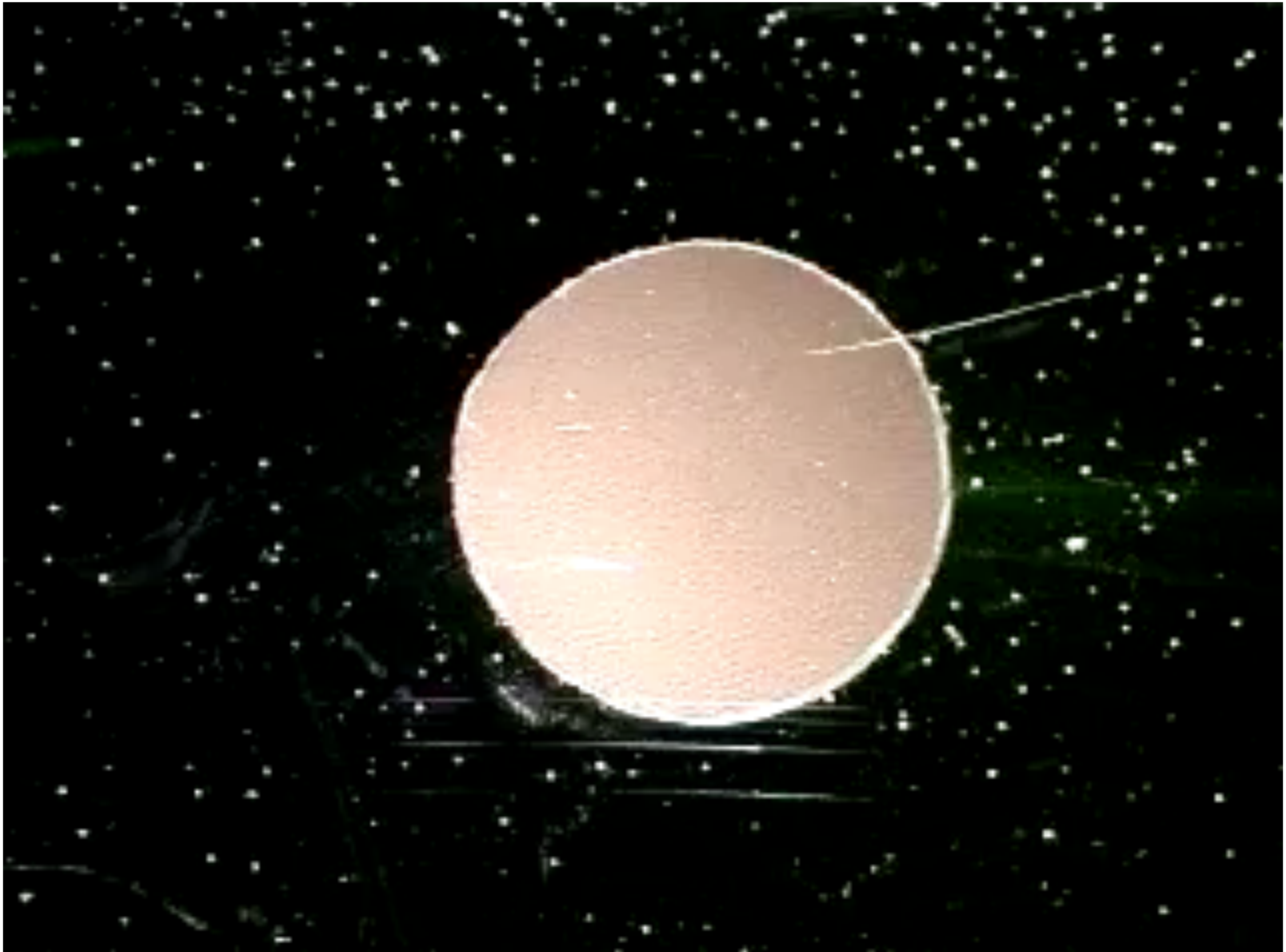
Accélération d'un élément de fluide

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$\mathbf{a} = \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} + \boxed{\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}}$$

instationnarité   accélération convective un écoulement stationnaire où $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} \neq 0$



Écriture de l'accélération convective

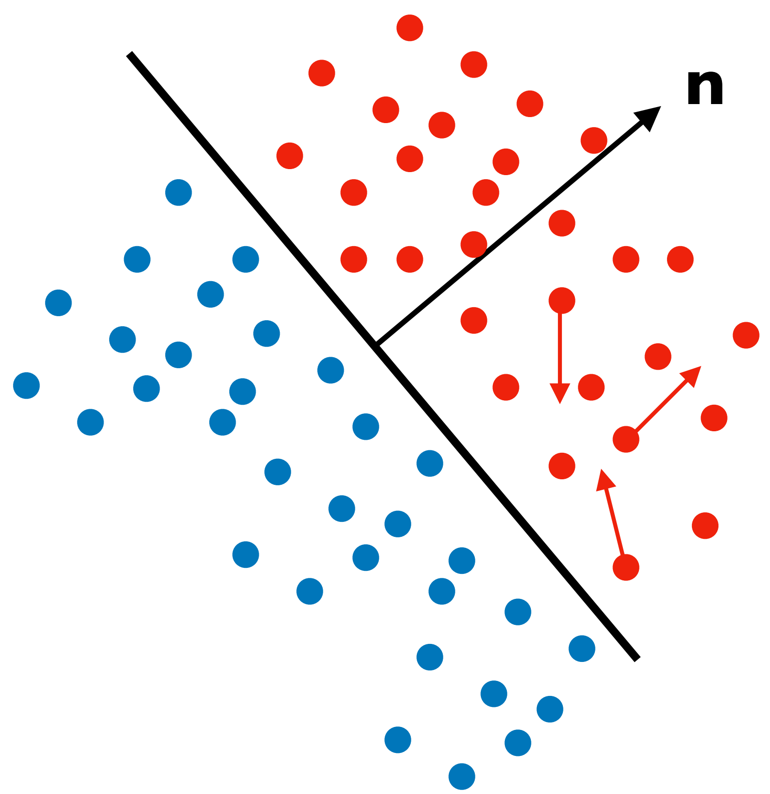
Pour la composante *i* : $$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1,3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Pour la composante *x* : $$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Variation spatiale de u_x projetée sur la vitesse (u_x, u_y, u_z)

Les contraintes dans un fluide

Dans un fluide à l'équilibre, sans écoulement macroscopique



La résultante des interactions entre atomes ou molécules est une pression isotrope

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p \, \delta ij$$

$$\nabla . \sigma = -\nabla p = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans un fluide à l'équilibre, sans écoulement macroscopique

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right)} = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$0 = \rho\mathbf{g} - \nabla p$$

$$p = p_0 - \rho g z$$