

Phénomènes de Transport 2018

D'après "Stabilization of Leidenfrost vapour layer by textured superhydrophobic surfaces", I. Vakarelski et al. Nature, 489, 274 (2012).

Lorsqu'un corps solide, à une température supérieure à 100°C , est immergé dans l'eau il provoque l'ébullition du liquide. Celle-ci peut se produire soit sous forme de bulles, soit sous forme d'un film continu de vapeur. Cette dernière situation que nous allons analyser est en particulier observée lorsque la surface solide est superhydrophobe.

Dans l'expérience, une sphère d'acier de rayon $R = 1\text{ cm}$, portée à une température T_0 variant entre 200 et 400°C est immergée dans un bain d'eau à 100°C . La sphère est maintenue en lévitation dans l'eau par un champ magnétique. La vapeur forme un film continu sur le solide et est évacuée en bulles de 3 à 4 mm de rayon émises au sommet de la sphère (fig. 1). Après un temps de l'ordre de 3 min , la température de la sphère est ramenée à celle du bain d'eau (fig. 2). Le flux de chaleur échangé entre la sphère et le bain de liquide peut être déduit de l'évolution de la température (fig. 3).

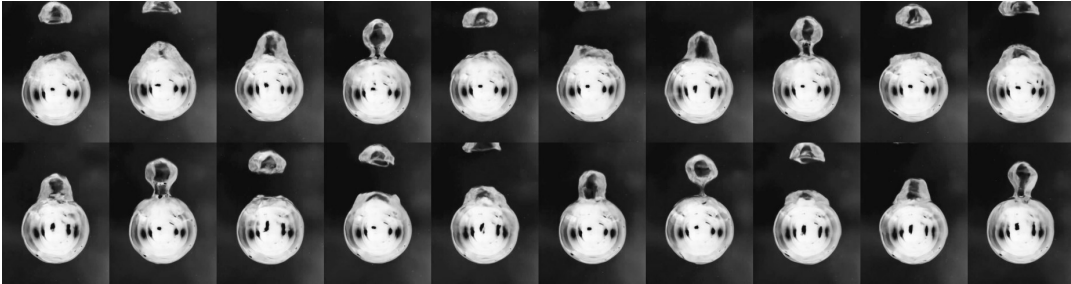


FIGURE 1 – Evolution du film de vapeur autour de la sphère. Intervalle entre 2 images = $0,2\text{s}$. Température initiale de la sphère 380°C .

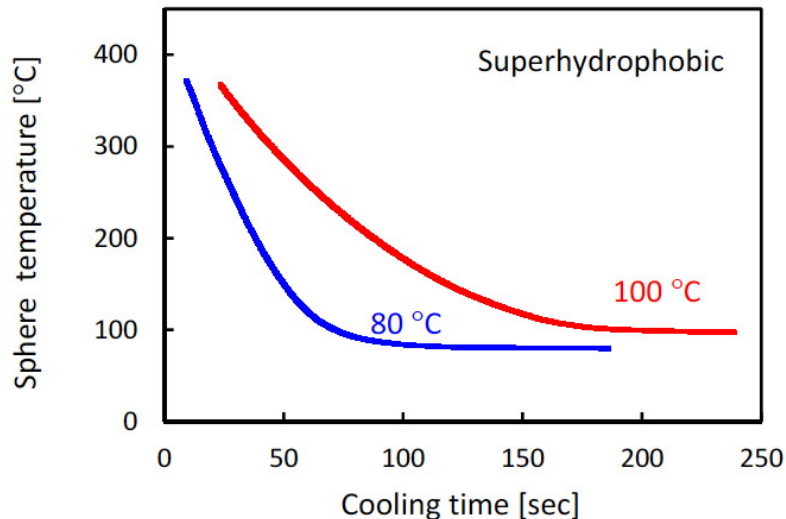


FIGURE 2 – Température de la sphère en fonction du temps, pour deux températures différentes du bain d'eau, 80 et 100°C .

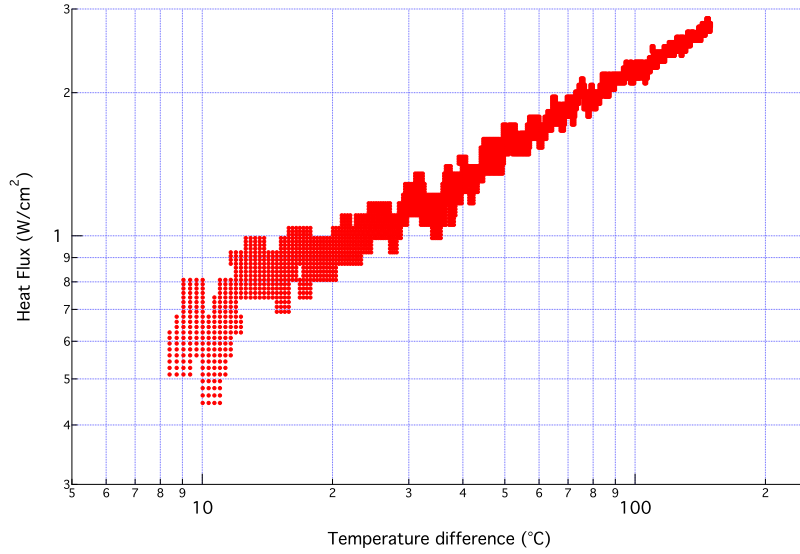


FIGURE 3 – Flux de chaleur moyenné sur la sphère en fonction de l'écart de température entre la sphère et l'eau (à 100°C)

1 Bilan global

1. Donner un ordre de grandeur de la quantité de chaleur transférée par unité de temps entre la sphère et l'eau.

La température de la sphère s'abaisse de 300°C en un temps Δt de l'ordre de 150s. Le volume de la sphère est de l'ordre de $\Omega = 4 \text{ cm}^3$ ce qui correspond à une masse $M = \rho_A \Omega \approx 8.10^3 \times 4.10^{-6} = 32\text{g}$. La quantité de chaleur perdue est donc $Q = C_A M \delta T = 460 \times 0,03 \times 300 \approx 4\text{kJ}$. Et le flux de chaleur moyen $\dot{Q} = Q/\Delta t$ est de l'ordre de 25 W. La surface de la sphère étant égale à 12 cm^2 , cela correspond à un flux par unité de surface \dot{q} de l'ordre de 2W/cm² (ou 20kW/m²).

2. A quel volume de vapeur créé par unité de temps ce flux de chaleur correspond-il ? Est-ce cohérent avec la fréquence d'émission des bulles de vapeur ?

Si toute la chaleur évacuée de la sphère est utilisée pour créer de la vapeur, la masse de vapeur créée par unité de temps est $\dot{M}_V = \dot{Q}/L$ et le débit volumique de vapeur est donc $D_V = \dot{M}_V/\rho_V = \dot{Q}/(\rho_V L)$. On a donc $D_V \approx 25/(2,2 \times 10^6 \times 0,6) \text{ m}^3/\text{s}$, soit $D_V \approx 20 \text{ cm}^3/\text{s}$. Pour des bulles dont le rayon est 4mm, de volume 0,25 cm^3 , cela correspondrait à 80 bulles émises par s. Or le film montre plutôt une bulle émise toutes les 5 Images, c'est-à-dire toutes les secondes. Ceci signifie que toute la chaleur évacuée ne sert pas à vaporiser l'eau, mais qu'une part significative doit également être évacuée dans le bain d'eau.

2 Transfert radiatif

3. Donner un ordre de grandeur du flux de chaleur radiatif entre la sphère et l'eau, en supposant que la couche de vapeur d'eau est complètement transparente au rayonnement électromagnétique. On prendra un facteur géométrique égal à l'unité pour le transfert entre la sphère et l'eau.

Le flux de chaleur émis par la sphère est : $\sigma \epsilon_A T_s^4$ et celui émis par l'eau est $\sigma \epsilon_E T_E^4$. L'absorptivité étant égale à l'émissivité, le flux de chaleur absorbé par l'eau est $\sigma \epsilon_A \epsilon_E T_s^4$ et le flux de chaleur absorbé par la sphère est $\sigma \epsilon_E \epsilon_A T_E^4$. Le flux net de chaleur perdu par la sphère est donc :

$$\dot{q}_R = \sigma \epsilon_A \epsilon_E (T_s^4 - T_E^4) = \sigma \epsilon_A \epsilon_E (T_s^2 - T_E^2)(T_s^2 + T_E^2).$$

En prenant $T_s = 673\text{K}$ et $T_e = 373\text{K}$, on a $q_R \approx 700 \text{ W.m}^{-2}$. En considérant la surface de la sphère de 12 cm^2 , l'ordre de grandeur du flux total radiatif est $\dot{Q}_R \approx 700 \times 12 \times 10^{-4} = 0,8\text{W}$.

4. Le transfert radiatif peut-il jouer un rôle significatif dans le refroidissement de la sphère ?

Cette estimation est plus petite que le flux moyen de plus d'un ordre de grandeur. On peut donc considérer que le flux radiatif est négligeable dans le refroidissement de la sphère.

3 Modèle transferts diffusif et convectif découplés

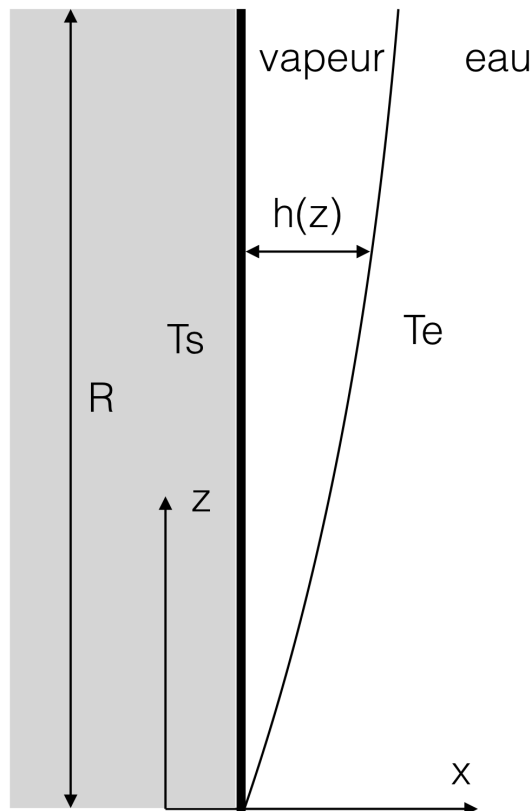


FIGURE 4 – Géométrie simplifiée pour le calcul du flux de chaleur et de l'écoulement dans le film de vapeur.

Considérons dans un premier temps un modèle de transfert de chaleur simplifié, où le flux de chaleur dans la vapeur est uniquement due à la diffusion et n'a qu'une composante horizontale, alors que la vapeur remonte dans le film sous l'effet de la gravité. On utilise un modèle géométrique simplifié, où la paroi de la sphère est plane et verticale (fig.4). Sa hauteur est d'ordre R et sa largeur dans la direction y est également d'ordre R . Le film de vapeur a une épaisseur $h(z)$ lentement variable, petite devant R .

5. Quel serait l'ordre de grandeur de l'épaisseur moyenne \bar{h} du film de vapeur pour que le flux de diffusion soit égal au flux moyen calculé initialement ?

Le flux diffusif est donné par $q_D = -\lambda_V \nabla T = -\lambda_V \Delta T / \bar{h}$. L'épaisseur moyenne est donc $\bar{h} = \lambda_V \Delta T / \dot{q}$. Avec $\lambda_V = 0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\Delta T = 300\text{K}$ et $\dot{q} = 2 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}$, $\bar{h} \approx 30\mu\text{m}$.

6. Pour décrire le mouvement de la vapeur dans le film, on fait les hypothèses suivantes :

- l'eau à l'extérieur du film de vapeur est immobile et la répartition de pression est hydrostatique

- on néglige les effets de la tension interfaciale entre l'eau et la vapeur
- l'écoulement dans le film de vapeur est dominé par la viscosité, les effets inertiels y sont négligeables
- la vapeur d'eau est considérée comme un fluide incompressible

Montrer que la vitesse moyenne de la vapeur dans le film est donnée en ordre de grandeur par :

$$\bar{u}_z \propto \frac{h^2}{\eta_v} (\rho_e - \rho_v) g \quad (1)$$

où η_v est la viscosité dynamique de la vapeur et ρ_e et ρ_v sont les masses volumiques de l'eau et de la vapeur.

La projection de l'équation de Stokes sur la verticale donne :

$$\eta \Delta u_z = \frac{\partial p_V}{\partial z} + \rho_v g$$

La pression dans la vapeur p_V est égale à la pression dans l'eau $p_E = p_0 - \rho_e g z$. L'épaisseur du film de vapeur étant petite devant le rayon de la sphère, $\Delta u_z \approx \partial^2 u_z / \partial x^2$ et l'équation de Stokes s'écrit :

$$\eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = (\rho_v - \rho_e) g$$

En ordre de grandeur, on en déduit que :

$$\bar{u}_z \propto \frac{h^2}{\eta_v} (\rho_e - \rho_v) g$$

Plus précisément, on peut intégrer deux fois par rapport à x , avec les conditions aux limites $u_z = 0$ en $x = 0$ et $x = h$, ce qui conduit à :

$$u_z = \frac{(\rho_v - \rho_e) g}{2\eta_v} (x^2 - xh)$$

et :

$$\bar{u}_z = \frac{1}{h} \int_0^h u_z dx = \frac{h^2}{12\eta_v} (\rho_e - \rho_v) g$$

7. Montrer que l'épaisseur du film est donnée par :

$$h(z) \propto \left(\frac{\lambda_V \nu_v \Delta T}{L \rho_e g} \right)^{1/4} z^{1/4} \quad (2)$$

et estimer son épaisseur maximale.

La conservation du volume de vapeur dans une tranche d'épaisseur dz s'écrit :

$$\bar{u}_z h|_z + \dot{q}_V dz = \bar{u}_z h|_{z+dz}$$

soit :

$$\frac{d(\bar{u}_z h)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{h^3}{12\eta_v} (\rho_e - \rho_v) g \right) = \dot{q}_V$$

où \dot{q}_V est le volume de vapeur créé par l'ébullition, par unité de temps, par unité d'aire interfaciale. Cette quantité est liée au flux de chaleur $\lambda_V \Delta T / h$ par la chaleur latente de vaporisation : $\dot{q}_V = \lambda_V \Delta T / (h L \rho_v)$. d'où :

$$3 \frac{dh}{dz} \frac{h^3}{12\eta_v} (\rho_e - \rho_v) g = \frac{\lambda_V \Delta T}{L \rho_v}$$

$$\frac{dh^4}{dz} \propto \frac{\lambda_V \eta_v \Delta T}{L \rho_v (\rho_e - \rho_v) g}$$

En intégrant par rapport à z et en prenant une épaisseur de film nulle en $z = 0$, on a :

$$h \propto \left(\frac{\lambda_V \eta_v \Delta T}{L \rho_v (\rho_e - \rho_v) g} \right)^{1/4} z^{1/4} \approx \left(\frac{\lambda_V \nu_v \Delta T}{L \rho_e g} \right)^{1/4} z^{1/4}$$

où ν_v est la viscosité cinématique de la vapeur.

L'épaisseur maximale est atteinte pour $z = R$, avec :

$$h(R) \approx \left(\frac{\lambda_V \nu_v \Delta T R}{L \rho_e g} \right)^{1/4}$$

Avec les valeurs des paramètres physiques, on trouve $h(R) \approx 90 \mu\text{m}$.

8. Calculer le flux de chaleur intégré sur la surface de la sphère en fonction des paramètres physiques, en estimer un ordre de grandeur et comparer avec la valeur déduite de la variation de température de la sphère.

Le flux de chaleur intégré sur toute la surface de la sphère est, dans ce modèle :

$$\dot{Q} = R \int_0^R \frac{\lambda_V \Delta T}{h(z)} dz = R \lambda_V \Delta T \left(\frac{L \rho_e g}{\lambda_V \nu_v \Delta T} \right)^{1/4} \int_0^R \frac{dz}{z^{1/4}}$$

soit :

$$\dot{Q} = \left(\frac{L \rho_e g \lambda_V^3}{\nu_v} \right)^{1/4} R^{7/4} \Delta T^{3/4}$$

Avec les valeurs des paramètres physiques, on trouve une valeur $\dot{Q} \approx 7\text{W}$ inférieure à l'estimation initiale de 25 W, mais on a laissé de côté tous les préfacteurs dans le calcul de flux.

9. Est-ce que la variation du flux de chaleur avec la différence de température est compatible avec les données expérimentales ?

L'expression du flux de chaleur prédit que celui-ci augmente avec la puissance 3/4 de la différence de température. La fig. 3 montre effectivement un flux de chaleur qui varie comme une loi de puissance de l'écart en température (une variation linéaire en coordonnées logarithmiques), mais l'exposant est inférieur à 3/4.

4 Effet de la température du bain d'eau

Le modèle utilisé ci-dessus décrit le refroidissement de la sphère dans un bain d'eau maintenu à 100°C , la température d'ébullition et il ne tient compte que du flux de chaleur par diffusion. Nous considérons maintenant le cas où le bain d'eau est à une température inférieure à 100°C . Nous prenons en compte le fait que la masse volumique de l'eau liquide change avec la température.

11. En utilisant toujours la géométrie simplifiée, avec les hypothèses $dh/dz \ll 1$ et $h \ll R$, écrire les équations décrivant de manière plus générale la distribution de température dans le film de vapeur et dans le bain d'eau, au voisinage du film de vapeur.

Dans le film de vapeur, l'équation de transport de la chaleur est :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa_v \Delta T$$

Avec la géométrie considérée, elle se réduit à :

$$u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Dans le bain d'eau, au voisinage du film de vapeur, l'équation de transport est :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa_e \Delta T$$

En faisant l'hypothèse qu'une mince couche d'eau, réchauffée par la sphère, monte le long du film de vapeur, on a les mêmes approximations sur la géométrie de l'écoulement qui conduisent à une équation similaire :

$$u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

12. *Quelles sont les conditions aux limites pour la température et les flux de chaleur aux différentes interfaces ?*

Il y a continuité de la température aux différentes interfaces. Sur l'interface vapeur/eau, la température est la température d'ébullition, 100°C à pression ambiante.

Le flux de chaleur est continu à l'interface sphère/vapeur, mais discontinu à l'interface vapeur/eau parce qu'il faut prendre en compte la chaleur latente de vaporisation.

13. *Si nous normalisons le flux de chaleur entre la sphère et l'eau par la différence de température ΔT , est-ce que nous attendons un transfert de chaleur plus efficace lorsque la température du bain d'eau est inférieure à 100°C ?*

Le gradient de température dans l'eau va créer un écoulement de convection thermique qui va augmenter le transfert thermique. On attend donc un flux de chaleur normalisé (nombre de Nusselt) plus grand si la température du bain est inférieure à 100°C.

5 Données

L'équation de Stokes pour l'écoulement des fluides visqueux est : $\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p + \mathbf{f}$ où \mathbf{u} est la vitesse, p la pression et \mathbf{f} la force en volume appliquée.

TABLE 1 – Propriétés physiques. Conductivité thermique λ , chaleur spécifique C , masse volumique ρ , viscosité dynamique η .

	λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	C (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	ρ (kg.m ⁻³)	η (Pa.s)
Acier	50	460	7800	
Eau	0,6	4180	1000	10 ⁻³
Vapeur	0,02	2000	0,6	1,2 × 10 ⁻⁵

La chaleur latente de vaporisation de l'eau est : $L = 2257$ kJ/kg. L'émissivité de l'acier poli est $\epsilon_A = 0,07$. L'émissivité de l'eau est $\epsilon_E = 0,95$.