TD7 : Ondes de surface

Nikita Kavokine*, Marc Fermigier

1. *On considère un paquet d'ondes défini par*

$$\eta(x,t) = \int \mathrm{d}k A(k)\, \Re e\left[e^{i(kx-\omega(k)t)}\right]. \tag{1}$$

On suppose que la fonction $A(k)$ est très piquée autour d'un vecteur d'onde k_0. Montrer alors que l'amplitude du paquet d'ondes peut s'écrire

$$\eta(x,t) = F(x - v_g t)\, \Re e\left[e^{ik_0(x-v_\varphi t)}\right], \tag{2}$$

avec $v_\varphi = \omega/k_0$ et $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k_0}$. À quoi correspondent physiquement v_g et v_φ ?
$A(k)$ étant nulle partout sauf autour de k_0, on va développer $\omega(k)$ à l'ordre 1 autour de k_0 :

$$\omega(k_0 + \delta k) = \omega(k_0) + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0} \delta k + O(\delta k^2). \tag{3}$$

En injectant dans l'expression de l'amplitude de l'onde, on trouve

$$\eta(x,t) = \Re e\left[\int \mathrm{d}(\delta k) A(k_0 + \delta k)\, e^{i\delta k(x-v_g t)} e^{ik_0(x-v_\varphi t)}\right], \tag{4}$$

donc

$$\eta(x,t) = \Re e\left[F(x - v_g t)\, e^{ik_0(x-v_\varphi t)}\right], \tag{5}$$

corrigeant légèrement l'énoncé. v_φ est la vitesse de phase, c'est la vitesse de propagation de l'onde plane de vecteur d'onde k_0 qui est délocalisée dans tout l'espace. Lorsque l'on superpose des ondes planes de vecteur d'onde proche de k_0, la perturbation devient localisée dans l'espace (sa forme est donnée par la fonction F) et elle se propage à la vitesse de groupe v_g.

2. *L'écoulement lié à la propagation des ondes est considéré incompressible et irrotationnel. Quelle est l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses ?* Si le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est de rotationnel nul, on peut définir un potentiel des vitesses Φ tel que $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Si de plus l'écoulement est incompressible alors $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, donc Φ vérifie l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$.

3. *On cherche une solution sous la forme*

$$\Phi(x,z,t) = f(z) e^{i(kx-\omega t)} \tag{6}$$

Déterminer $f(z)$ en utilisant la condition aux limites à la surface libre. Pour que la forme de Φ donnée soit solution de l'équation de Laplace, il faut $f''(z) - k^2 f(z) = 0$, donc $f(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}$, avec A et B indépendantes de z. Il n'y a pas d'écoulement à l'infini dans la profondeur du fluide, donc le potentiel des vitesses ne peut pas diverger quand $z \to -\infty$ et $A = 0$. Pour déterminer B, on regarde l'interface eau-air, qui a une forme $z = \eta(x,t)$. La composante de la vitesse normale à l'interface doit être égale à la vitesse de l'interface. Comme la perturbation η est petite, l'écriture de cette condition à l'ordre le plus bas non nul est $v_z(x, z = 0) = \partial_t \eta(x,t)$, donc $kBe^{i(kx-\omega t)} = \partial_t\eta(x,t)$, et finalement

$$\Phi(x,z,t) = (\partial_t\eta/k) e^{kz}. \tag{7}$$

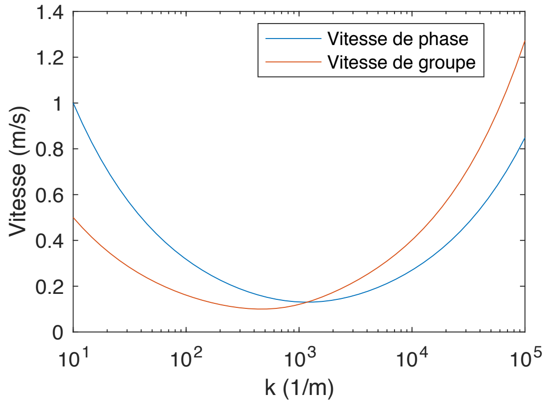
*nikita.kavokine@ens.fr

4. *Quelle condition s'applique sur la différence de pression au niveau de la surface libre ?* La surface libre n'étant pas plane, il y a une différence de pression à travers la surface donnée par la loi de Laplace. Pour une courbe $\eta(x)$ qui varie lentement (ce qui est assuré ici par la condition $\eta_0 k \ll 1$), le rayon de courbure local est $R(x) = 1/\partial_x^2\eta$, et donc la loi de Laplace s'écrit
$$P_0 - p(z = \eta^-, x) = \frac{\gamma}{R(x)} = \gamma\partial_x^2\eta(x,t). \tag{8}$$
On peut aussi s'en convaincre en faisant un bilan des forces sur un élément de fluide.

5. *Ecrire l'équation d'Euler qui s'applique dans l'eau. Quel terme peut-on négliger ? En déduire une relation entre le potentiel des vitesses et la pression.* L'équation d'Euler s'écrit
$$\rho\partial_t\mathbf{v} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\mathbf{g}. \tag{9}$$
Evaluons l'ordre de grandeur des termes impliquant la vitesse. Pendant une période T de l'onde, une particule fluide parcourt environ l'amplitude η_0, donc la vitesse est de l'ordre de η_0/T. La vitesse varie significativement à l'échelle de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Donc $\partial_t\mathbf{v} \sim \eta_0/T^2$, et $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \sim (\eta_0 k)\eta_0/T^2$. La condition $\eta_0 k \ll 1$ implique alors que $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \ll \partial_t\mathbf{v}$ et l'équation d'Euler se réduit à
$$\nabla\cdot(\rho\partial_t\Phi + p + \rho g z) = 0. \tag{10}$$
La quantité sous le gradient est constante. En profondeur, il n'y a pas d'écoulement et la pression est égale à la pression hydrostatique : $p = P_0 - \rho g z$, donc on a
$$\rho\partial_t\Phi + p + \rho g z = P_0. \tag{11}$$

6. *Déduire de ce qui précède la relation de dispersion $\omega(k)$. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Tracer v_φ et v_g en fonction de k.* On applique maintenant la relation précédente à la surface libre, en utilisant l'expression de Φ et la loi de Laplace pour la pression. Il vient
$$\rho\frac{\partial_t^2\eta}{k} - \gamma\partial_x^2\eta + \rho g\eta = 0. \tag{12}$$
En remplaçant η par son expression en onde plane $\eta(x,t) = \eta_0 e^{i(kx-\omega t)}$, on obtient la relation de dispersion :
$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3 = gk(1 + \ell_c^2k^2), \tag{13}$$
avec $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ la longueur capillaire. La relation de dispersion a deux formes limites selon la longueur d'onde considérée. Pour les longueurs d'onde grandes devant la longueur capillaire ($k\ell_c \ll 1$), la relation de dispersion ne fait intervenir que la gravité : $\omega = \sqrt{gk}$. On parle d'ondes de gravité. Dans la limite opposée ($k\ell_c \gg 1$), la relation de dispersion ne fait intervenir que la tension de surface et $\omega = \sqrt{\gamma k^3/\rho}$: on parle d'ondes capillaires. La longueur capillaire apparait de nouveau comme l'échelle de transition entre effets de gravité et effets capillaires.

   En dérivant, on obtient
$$v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}\sqrt{1 + (\ell_c k)^2} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{1 + 3(\ell_c k)^2}{\sqrt{1 + (\ell_c k)^2}} \tag{14}$$
v_φ et v_g on un minimum au voisinage de $k = 1/\ell_c$ et deviennent grandes pour les très petites ou les très grandes longueurs d'onde (voir figure). Dans le régime de gravité $v_g = (1/2)v_\varphi$ alors que dans le régime capillaire $v_g = (3/2)v_\varphi$.



7. *Lorsqu'on place un obstacle dans un écoulement, on observe des ondes de petite longueur d'onde en amont et des ondes de grande longueur d'onde en aval (comme sur l'image ci-dessus). Pourquoi ?* Moyennant changement de référentiel, on peut considérer un objet qui se déplace par rapport à un fluide stationnaire. S'il y a des ondes qui peuvent se propager à la surface dont la vitesse de phase est égale à la vitesse de l'objet, alors elles peuvent être excitées par son passage. La vitesse de phase des ondes de surface possède un minimum (environ 23 $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ pour l'eau) : si l'objet ce déplace plus lentement, il n'y a pas d'ondes qui peuvent être excitées. Si l'objet va plus vite que la vitesse limite, il peut exciter deux longueurs d'onde, une dans le domaine capillaire, l'autre dans le domaine de gravité. Les deux paquets d'ondes excités vont se propager à leur vitesse de groupe respective. Pour les ondes capillaires, de petite longueur d'onde, la vitesse de groupe est plus grande que la vitesse de phase : elle sont donc en avant de l'objet. Pour les ondes de gravité c'est l'inverse, et elles sont en arrière de l'objet.