TD7 : Ondes de surface

Nikita Kavokine*, Marc Fermigier

On considère une interface eau-air, invariante dans la direction y, et décrite par la fonction $\eta(x,t)$. On étudie la propagation d'ondes harmoniques en régime linéaire le long de cette interface : on pose $\eta(x,t) = \eta_0 \Re e \left[\exp(i(kx - \omega t))\right]$ et on suppose $\eta_0 k \ll 1$. On néglige la viscosité, et on note γ la tension de surface.

1. *Vitesse de phase et vitesse de groupe.* On considère un paquet d'ondes défini par

$$\eta(x,t) = \int \mathrm{d}k A(k) \Re e \left[e^{i(kx - \omega(k)t)}\right]. \tag{1}$$

On suppose que la fonction $A(k)$ est très piquée autour d'un vecteur d'onde k_0. Montrer alors que l'amplitude du paquet d'ondes peut s'écrire

$$\eta(x,t) = F(x - v_g t) \Re e \left[e^{ik_0(x - v_\varphi t)}\right], \tag{2}$$

avec $v_\varphi = \omega/k_0$ et $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k_0}$. À quoi correspondent physiquement v_g et v_φ ?

2. L'écoulement lié à la propagation des ondes est considéré incompressible et irrotationnel. Quelle est l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses ?

3. On cherche une solution sous la forme

$$\Phi(z) = f(z) e^{i(kx - \omega t)} \tag{3}$$

Déterminer $f(z)$ en utilisant la condition aux limites à la surface libre.

4. Quelle condition s'applique sur la différence de pression au niveau de la surface libre ?

5. Ecrire l'équation d'Euler qui s'applique dans l'eau. Quel terme peut-on négliger ? En déduire une relation entre le potentiel des vitesses et la pression.

6. Déduire de ce qui précède la relation de dispersion $\omega(k)$. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Tracer v_φ et v_g en fonction de k.

7. Lorsqu'on place un obstacle dans un écoulement, on observe des ondes de petite longueur d'onde en amont et des ondes de grande longueur d'onde en aval (comme sur l'image ci-dessus). Pourquoi ?

*nikita.kavokine@ens.fr