TD3 : Ascension capillaire et dynamique d'imprégnation

Nikita Kavokine*, Marc Fermigier

Lorsqu'on plonge un fin tube en verre dans de l'eau, on observe que l'eau remonte dans le tube jusqu'à une hauteur limite. Le but de ce TD est d'étudier en détail ce phénomène, important notamment pour comprendre l'imprégnation par un liquide d'un milieu poreux.

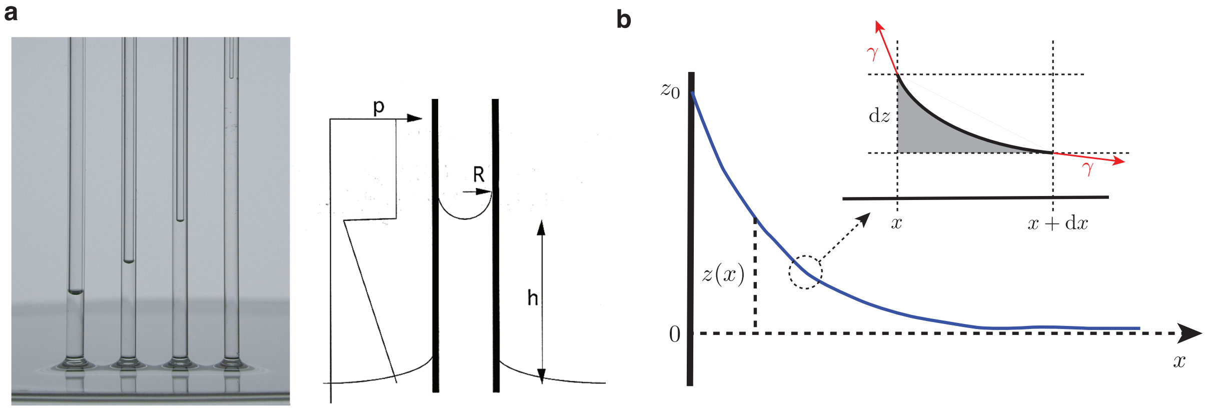

FIGURE 1 – **a.** Ascension capillaire de l'huile silicone dans des tubes de différents rayons, et dimensions du système considéré. **b.** Schéma d'un ménisque au voisinage d'une paroi solide.

1 Forme d'un ménisque et longueur capillaire

1. On considère une goutte de liquide de taille caractéristique R. Exprimer son énergie de surface et son énergie potentielle de pesanteur. Pour quelle valeur de R ces deux énergies sont-elles égales ? La longueur trouvée s'appelle la longueur capillaire ℓ_c.

Au voisinage d'une paroi solide, une surface liquide ne reste pas plane, mais remonte le long de la paroi solide pour former un ménisque.

2. Faire un bilan des forces sur l'élément de volume représenté ci-dessus (figure 1b). En déduire une équation différentielle sur la forme du ménisque $z(x)$.
3. Résoudre cette équation dans la limite $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x \ll 1$. Où voit-on apparaître la longueur capillaire ?

2 Hauteur d'équilibre : loi de Jurin

On suppose que le rayon R du tube est très inférieur à la longueur capillaire ℓ_c. Si de plus les parois du tube sont très hydrophiles, on peut supposer que l'interface eau-air est une demi-sphère de rayon R.

4. Utiliser alors la loi de Laplace pour déterminer la hauteur maximale h_0 de montée dans le tube.

On appelle ce résultat la loi de Jurin.

*nikita.kavokine@ens.fr

3 Dynamique d'imprégnation : loi de Washburn

On étudie maintenant la dynamique de montée du fluide dans le tube. A l'instant initial, on immerge le tube dans le fluide.

5. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le fluide dans le tube ? Lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.
6. Montrer que pour des temps suffisamment courts, les forces visqueuses et le poids sont négligeables devant le terme inertiel. Montrer alors que la hauteur de montée est donnée par
$$h(t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho R}}t. \tag{1}$$
7. Déterminer l'ordre de grandeur du temps τ au bout du quel les forces visqueuses ne sont plus négligeables. A quoi correspond-t-il au regard du transport de quantité de mouvement ?
8. On considère des temps $t > \tau$, de façon à pouvoir maintenant négliger le terme inertiel. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide. Sa résolution donne le champ de vitesse
$$u(r) = G(R^2 - r^2), \tag{2}$$
9. En déduire que la force de frottement visqueux qui s'exerce sur le fluide s'exprime en fonction de sa vitesse moyenne V comme $F_\eta = 8\pi\eta hV$.
10. On suppose que le poids est négligeable (par exemple le tube est horizontal). Montrer que la hauteur de montée est donnée par
$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma R}{2\eta}}t. \tag{3}$$
C'est la loi de Washburn. Qualitativement, comment expliquer un tel comportement ?
11. On ne suppose plus le poids négligeable. Déterminer une équation implicite sur $h(t)$ faisant intervenir la hauteur en régime stationnaire h_0. Retrouver la loi de Washburn dans la limite $h \ll h_0$. On donne
$$\int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{(h_0/z) - 1} = h_0 \ln\left(\frac{h_0}{h_0 - h}\right) - h. \tag{4}$$
12. Retrouver la loi de Washburn par un raisonnement énergétique.

Référence

P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*