TD2 : Écoulements de Couette

Nikita Kavokine*, Marc Fermigier

1 Diffusion de la quantité de mouvement

Le but de ce problème est de mettre en évidence le transport diffusif de la quantité de mouvement dans un fluide. On verra en particulier que la viscosité dynamique joue le rôle de coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement. On considère un système modèle : le demi-espace $z > 0$ est occupé par un fluide newtonien incompressible de viscosité cinématique η et de masse volumique ρ. Une plaque solide occupe le plan $z = 0$. A l'instant $t = 0$, la plaque est mise en mouvement dans la direction x à une vitesse constante V.

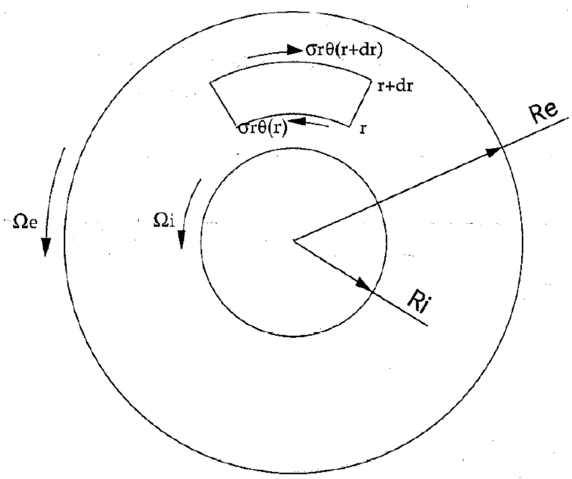
On note $\sigma_{xz}(z_0)$ la contrainte tangentielle en $z = z_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale $\mathbf{e}_z$ par le fluide situé en $z > z_0$. Les contraintes tangentielles sont reliées à la viscosité par $\sigma_{xz} = \eta \partial_z v$.

1. Appliquer le PFD à un élément de volume infinitésimal et montrer que le champ de vitesse $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ vérifie
$$\partial_t u = \nu \partial_z^2 u, \tag{1}$$
où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité dynamique.
2. Résoudre l'équation précédente en posant $\xi = z/\sqrt{\nu t}$. On supposera une condition de non-glissement $u(z = 0) = V$. Que représente la quantité $\sqrt{\nu t}$?
3. Exprimer le flux de quantité de mouvement du fluide dans la direction z en fonction de u et de η. En donner un ordre de grandeur en fonction de la vitesse typique d'écoulement U et de l'échelle de longueur typique L. C'est le flux de quantité de mouvement dû à la diffusion.
4. Exprimer maintenant le flux de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement et en donner l'ordre de grandeur en fonction de U.
5. Exprimer l'ordre de grandeur du rapport de ces deux flux (convection/diffusion). Ce rapport porte le nom de nombre de Reynolds et il mesure l'importance relative des deux modes de transport de quantité de mouvement. Il aura une très grande importance en mécanique des fluides.

*nikita.kavokine@ens.fr

2 Viscosimètre de Couette

On considère un fluide incompressible compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_e et R_i et de hauteur $H \gg R_e, R_i$, tournant respectivement à des vitesses angulaires Ω_e et Ω_i, comme représenté sur le schéma ci-dessous. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z).



1. Si le fluide est incompressible, le volume d'une particule fluide ne change pas au cours du temps. En utilisant la particule fluide représentée ci-dessus, montrer que cela implique l'absence d'écoulement dans la direction radiale.
2. Faire un bilan des forces dans la direction radiale. En déduire une équation reliant la pression et la vitesse.
3. Exprimer le couple (par rapport à l'axe z) s'exerçant sur la particule fluide. En déduire une équation différentielle vérifiée par la contrainte tangentielle.
4. Dans le cas considéré, la contrainte tangentielle est reliée à la vitesse par

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} \right) \tag{2}$$

   En déduire le champ de vitesse (on considèrera des conditions de non-glissement sur les parois des cylindres).
5. (Retrouver l'écoulement entre deux plans parallèles dans la limite où la distance entre les cylindres est très faible devant leur rayon.)
6. Calculer le couple exercé par le fluide sur le cylindre extérieur. Pourquoi ce dispositif permet-il de mesurer une viscosité ?