

Ecoulements redressés : le Streaming de couche limite, dit de Rayleigh

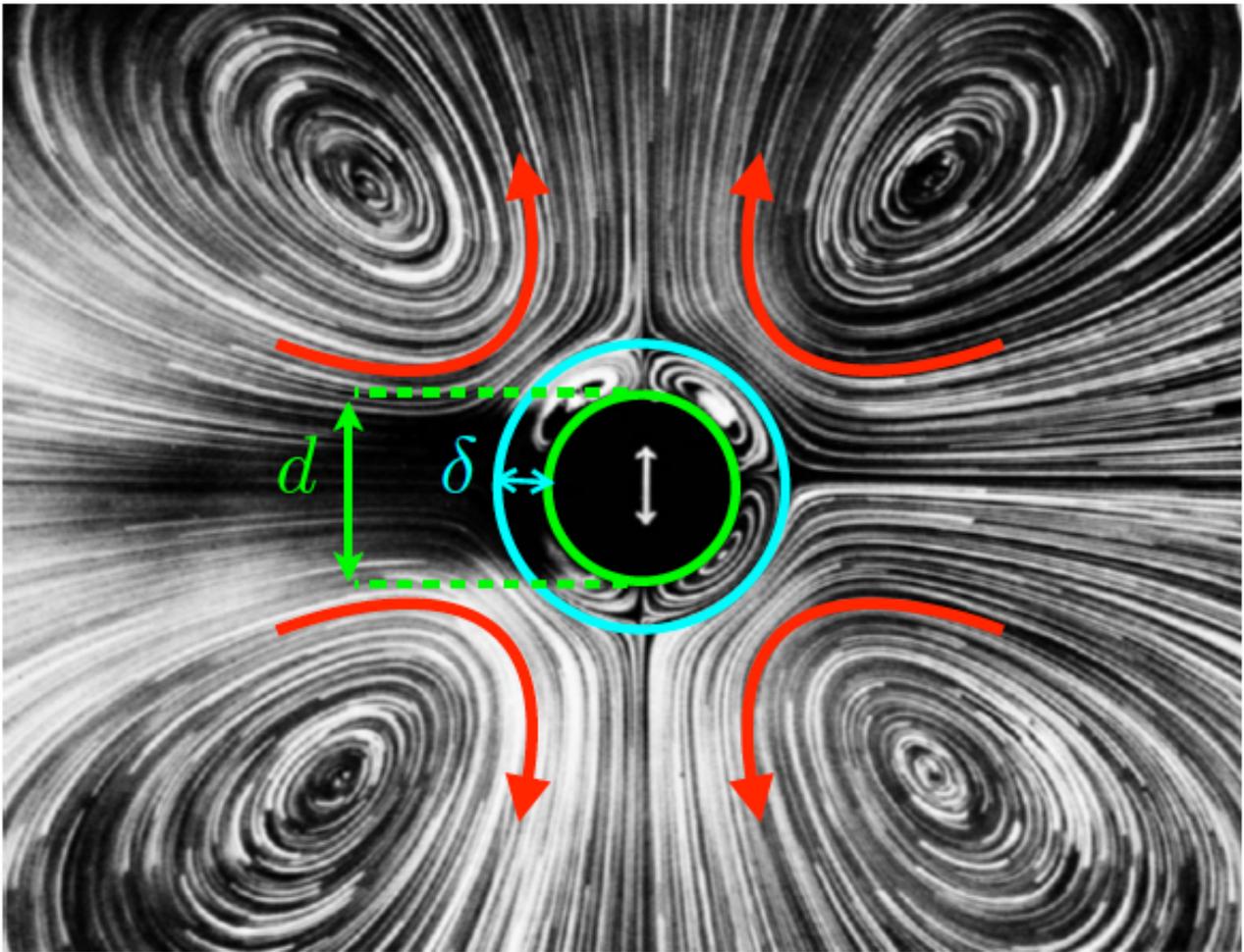


Figure 1 : Ecoulement constant généré par la vibration d'un cylindre le long de l'axe vertical, immergé dans un fluide, visualisé par les trajectoires de particules réfléchissantes. Le cylindre, de diamètre d est délimité par le cercle vert. L'écoulement dans la couche limite interne est

Lorsqu'un objet immergé dans un fluide se met à vibrer - une variation de sa position sinusoïdale de sa position dans le temps pour simplifier, un écoulement moyen constant est généré. On l'observe en enregistrant les positions successives de particules réfléchissantes dans le fluide, à une même phase de chaque période d'oscillation, ceci sur une durée longue d'un grand nombre de périodes. Le résultat typique est illustré sur la figure 1, tirée de *M. Tatsuno, J. Phys. Soc. Jpn 35 915-920 (1973)*, où le cylindre oscillant est délimité par un cercle vert.

On remarque sur la figure 1 que l'écoulement est divisé en deux zones : l'une d'épaisseur δ autour de l'objet (délimitée par un cercle bleu clair) montre 4 vortex (tourbillons) disposés symétriquement autour de l'objet; l'autre zone comprend aussi 4 tourbillons, mais de taille beaucoup plus grande (en fait de l'ordre de la taille de l'objet d) et de sens de rotation opposés (flèches rouges) à ceux des tourbillons internes qui leur sont juxtaposés.

On cherche à déterminer l'origine de l'écoulement dans la couche d'épaisseur δ . En utilisant le seul temps caractéristique du problème associé au forçage, proposez une loi d'échelle pour δ incluant la viscosité. Calculez un ordre de grandeur pour l'eau, la glycérine et $f=100$ Hz, et comparez avec le diamètre typique de l'objet (environ 1 cm).

On en conclut que le mouvement oscillatoire du cylindre communique de la vorticité au fluide par frottement visqueux. Quelle est la condition de bord   appliquer sur le cylindre, liée   ce

phénomène ? Hors de la couche limite ($r > d+\delta$) l'écoulement est irrotationnel, voir schéma de la figure 2 tirée de S.S.Sadhil Lab on a Chip 12, 2292–2300 (2012).

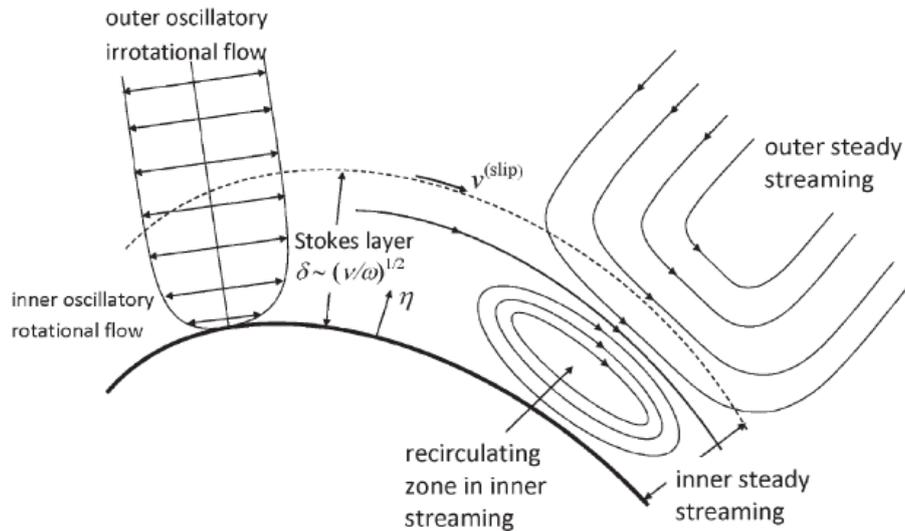


Figure 2 : Vue schématique de l'écoulement, avec à gauche la réponse périodique au forçage (couche limite instationnaire d'épaisseur δ) et à droite l'écoulement constant avec ses vortex internes et externes.

Mais cela n'explique toujours pas pourquoi cet écoulement constant ! (on remarquera au passage une caractéristique assez récurrente en dynamique des fluides : la non-symétrie entre causes et effets, ici un forçage oscillant à f produisant une réponse à fréquence nulle).

Recherche de lois d'échelles :

Théoriquement, on résout le problème en écrivant les champs de vitesse et de pression en développement perturbatif :

$$\vec{u} = \epsilon \vec{u}_1 + \epsilon^2 \vec{u}_2 + \dots$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots$$

où $\epsilon = A/d \ll 1$ et A , l'amplitude de vibration de l'objet. Dans ce développement, on admet que l'écoulement est incompressible et par ailleurs, on fixe $\langle u_1 \rangle = 0$ (symbole $\langle . \rangle$: moyenne temporelle sur une période d'oscillation) : la partie oscillatoire de l'écoulement a une moyenne nulle. La partie redressée (ou constante) de l'écoulement ϵu_2 est quant à elle plus faible en norme, mais de valeur moyenne non nulle.

Montrez que l'équation de Navier-Stokes moyennée sur une période s'écrit :

$$\langle \rho_0 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 \rangle = - \langle \vec{\nabla} p_2 \rangle + \langle \mu \Delta \vec{u}_2 \rangle \quad (1)$$

En déduire la loi d'échelle suivante pour la vitesse caractéristique de l'écoulement redressé :

$$\langle u_2 \rangle \simeq \frac{A^2 \omega}{d} \quad (2)$$

Un calcul plus rigoureux (Voir : G. Batchelor, *An introduction to Fluid Dynamics*) donne :

$$\langle u_2 \rangle = -\frac{3}{4\omega} U_1 \frac{dU_1}{dx} \quad (3)$$

en coordonnées cartésiennes, projetée sur l'axe vertical aussi celui de l'oscillation, avec U_1 la vitesse de l'objet projetée suivant la normale au cylindre, une expression valable pour un cylindre et qui permet de confirmer la loi d'échelle.

Remarques :

- L'écoulement est généré par le terme inertiel de l'équation de Navier Stokes, qui agit comme une force effective via le terme de gauche dans l'équation (1).
- Il y a deux nombres de Reynolds dans le problème, l'un associé à l'écoulement oscillant (1er ordre) Re_1 et l'autre associé à l'écoulement constant (2e ordre) Re_2 . Déterminez leur expression. Que se passe-t-il si $Re_2 > 1$?
- L'écoulement constant/redressé semble indépendant de la viscosité. Assez contre-intuitif pour un phénomène qui prend son origine dans la génération d'une couche limite visqueuse. Comment peut-on expliquer cela ?

Analyse du film fourni :

La séquence fournie montre les mouvements des particules dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre (éclairé par une nappe laser), autour du cylindre oscillant. La zone noire à gauche du cylindre correspond à l'ombre créée par l'objet. On a filmé 10 images par période, durant 20 périodes. Dédurre l'écoulement redressé en construisant les trajectoires des particules sur les 20 périodes. Utiliser le logiciel Image J ou équivalent (Matlab, ...).

Expériences à réaliser :

Matériel : un petit haut parleur, un générateur de fonctions (pouvant délivrer 10 à 20 Vpp), une tige cylindrique de quelques millimètres de diamètre et légère (plexiglass ou dural), un peu de colle forte, quelques liquides plus ou moins visqueux, du poivre fin, une caméra (smartphone ou autres).

Remplissez un bac assez large (saladier) de fluides de différentes viscosités (eau, huiles, liquide vaisselle, savon liquide, miel bon marché, sirop de canne, ...) et immergez partiellement la tige fixée au haut parleur de façon à ce qu'elle vibre à une fréquence entre quelques Hz et quelques dizaines de Hz. Utilisez des traceurs à la surface (grains de poivre ou autres) pour visualiser l'écoulement. Filmez avec la caméra et enregistrez le mouvement sur une durée assez longue pour voir apparaître les tourbillons. Retrouve-t-on les lois prévues par la théorie ?

Si vous ne trouvez pas de générateur de fonctions, des applications « générateur de fonctions » existent sur de nombreux smartphones (voir : <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.keuwl.functiongenerator&hl=fr>). A relier sans doute à un ampli audio !

Pour aller plus loin :

- Essayez la même expérience avec une suspension d'eau+maïzena, afin d'induire un effet rhéo-épaississant (augmentation de la viscosité avec le taux de cisaillement) près de l'objet. Décrivez vos observations.
- Réduisez la taille du récipient (en prenant un verre fin, au lieu d'un saladier par exemple). Que remarque-t-on ?

Bibliographie :

[1] L. Petit, P. Gondret. *Redressement d'un écoulement alternatif*. J. Phys. II 2115-2144 (1992).