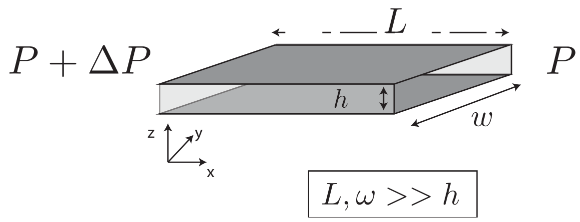
TD 1 : ECOULEMENT DE POISEUILLE ENTRE DEUX PLAQUES



Soit un conduit rectangulaire de longueur L, et de dimensions perpendiculaires à l'écoulement w et h, rempli d'un fluide de viscosité η. On impose une surpression ΔP pour mettre le fluide en mouvement. En régime stationnaire, on obtient un débit constant *Q*, que nous allons essayer de déterminer et de relier aux grandeurs impliquées.

1) L'écoulement se fait selon l'axe *x*. Quelle(s) symétrie(s) pouvez-vous trouver à ce problème ?

2) Définissez un élément de volume infinitésimal; sur celui-ci évaluez les forces de pression qui s'appliquent d'une part, les contraintes de cisaillement d'autre part.

3) La viscosité dynamique est définie par le coefficient de proportionnalité entre les contraintes de cisaillement et les variations de vitesses dans un écoulement.

La relation dans le cas décrit ici est la suivante : $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial U_x}{\partial z}$

Déduisez-en la relation entre les variations de pression selon *x* et les variations de vitesse selon *z*.
Montrez que la pression est une fonction de x uniquement.

4) Intégrez la relation trouvée précédemment et trouvez l'expression de u.

5) Calculez le débit volumique *Q* et la vitesse moyenne d'écoulement.

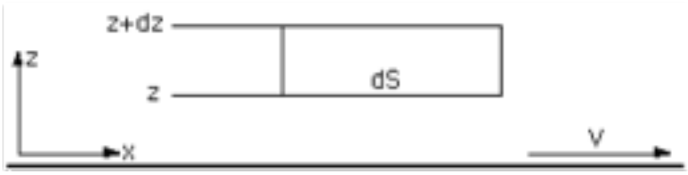
⟶ <u>Pour aller plus loin</u>: faire la même chose dans un canal cylindrique et trouver l'expression de Q:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

TD 2 : DIFFUSION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DUE À LA VISCOSITÉ

On considère le problème suivant : un fluide de viscosité η est contenu entre deux cylindres concentriques. Le cylindre intérieur a un rayon R et le cylindre extérieur (immobile) un rayon $R_{ext} = R + \Delta R$. À l'instant $t = 0$ le cylindre intérieur commence à tourner une vitesse *V*. Nous allons essayer de montrer comment l'ensemble du liquide se met en mouvement.

On se limite à l'écoulement 2D, que l'on considèrera plan pour commencer. On se ramène donc à l'écoulement d'un fluide compris entre deux plaques, dont seule celle du dessous se déplace. On considère l'élément de surface suivant:



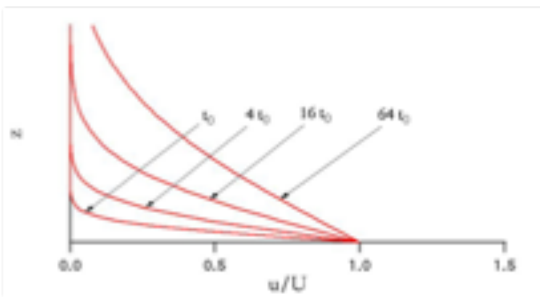
1) Faire le bilan des forces appliquées sur cet élément de surface par l'écoulement créé par le mouvement de la plaque.

2) Appliquer le PFD à cet élément de surface, et montrer que cela permet de retrouver une équation classique en physique, qu'on appellera (1).

3) Estimer à partir de l'équation précédente, le temps nécessaire pour qu'un élément de volume situé à une distance L du mur se mette en mouvement.

4) En pratique, pour résoudre l'équation (1), on utilise la variable autosimilaire $\zeta = z(\nu t)^{-1/2}$. Réécrire (1) en fonction de cette nouvelle variable. L'équation obtenue est (2)

5) La solution à (2) est de la forme donnée ci-dessous. Déterminer les deux constantes d'intégration.
$$u = A\int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) dy + B$$
On obtient alors les profils suivants pour u.



6) Écrire l'expression des forces visqueuses s'exerçant sur le fluide en fonction de η, de la vitesse caractéristique V et d'une distance caractéristique L. Écrire ensuite l'expression des forces inertielles pour le fluide. Le ratio de ces deux expressions est un nombre sans dimensions très utilisé en mécanique des fluides, c'est le nombre de Reynolds *Re*.

lucie.domino@espci.fr