

Chapitre 8

INSTABILITES ET TURBULENCE

En caricaturant à l'extrême, on pourrait affirmer que ce qui a été énoncé dans les chapitres précédents ne s'applique pas à la grande majorité des écoulements que nous sommes susceptibles de rencontrer. En effet, la faible viscosité de l'eau et de l'air et les échelles de longueur mises en jeu font que les nombres de Reynolds associés aux écoulements dans la nature ou dans l'activité industrielle sont en général très grands et ces écoulements sont turbulents. La nature particulière de la turbulence et, spécialement, la multiplicité d'échelles spatiales empêche d'appliquer simplement les résultats obtenus en négligeant les termes dus à la viscosité dans l'équation de Navier-Stokes. Nous allons examiner quelques types d'écoulements où le développement d'instabilités successives conduit à un comportement chaotique, puis nous essaierons de dégager les caractéristiques importantes de la turbulence.

8.1 Instabilités : de l'écoulement laminaire à la turbulence développée

8.1.1 Instabilité de Taylor-Couette

Le passage d'un écoulement laminaire où la vitesse est indépendante du temps à un écoulement turbulent où la vitesse varie de manière aléatoire dans le temps s'effectue par une série d'instabilités qui rendent l'écoulement de plus en plus complexe. Regardons, par exemple, l'écoulement entre deux cylindres concentriques, lorsqu'on fait tourner le cylindre intérieur et que le cylindre extérieur est immobile. A faible vitesse, les lignes de courant sont des cercles concentriques, il n'y a pas de structure particulière visible dans l'écoulement. Au delà d'une vitesse critique, des "rouleaux" apparaissent dans l'écoulement (fig. 8.1). Il apparaît une composante de vitesse axiale et une composante radiale qui sont périodiques le long de l'axe des cylindres. Les trajectoires des éléments de fluides s'enroulent sur des tores. La vitesse reste indépendante du temps. Cette première instabilité est due à la force centrifuge. En augmentant encore la vitesse de rotation, une seconde instabilité apparaît au delà d'une autre vitesse critique. Cette seconde instabilité se manifeste par une ondulation des rouleaux. La vitesse du fluide devient alors périodique dans le temps. En continuant à augmenter la vitesse de rotation, on constate que la vitesse varie aléatoirement dans le temps, l'écoulement est devenu turbulent. Néanmoins, les visualisations montrent que l'écoulement garde une périodicité spatiale le long de l'axe des cylindres. En augmentant considérablement la vitesse de rotation, on finit par faire disparaître la périodicité spatiale, l'écoulement a atteint un état de turbulence développée.

La séquence d'instabilités qui conduit à la turbulence varie d'un écoulement à l'autre ; elle est notablement plus complexe dans l'écoulement de Poiseuille ou dans une couche limite. La transition dans l'écoulement de Couette-Taylor peut être considérée comme un modèle assez simple : l'instabilité primaire fait apparaître une structure spatiale périodique. L'instabilité secondaire fait apparaître une périodicité temporelle. Les instabilités suivantes vont briser cette périodicité et

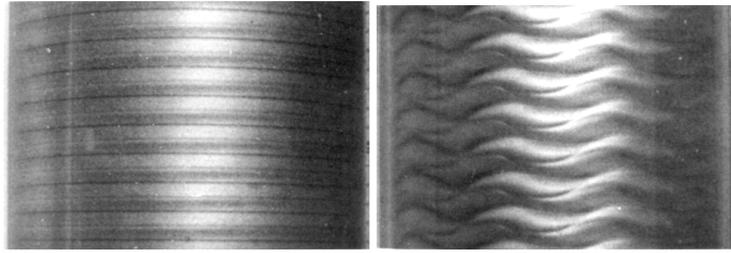


FIG. 8.1 – visualisations des instabilités successives de l'écoulement entre cylindres coaxiaux (écoulement de Couette-Taylor). A gauche : instabilité primaire en "rouleaux". A droite : rouleaux sinusoidaux. Photos : Burkhalter et Koschmieder.

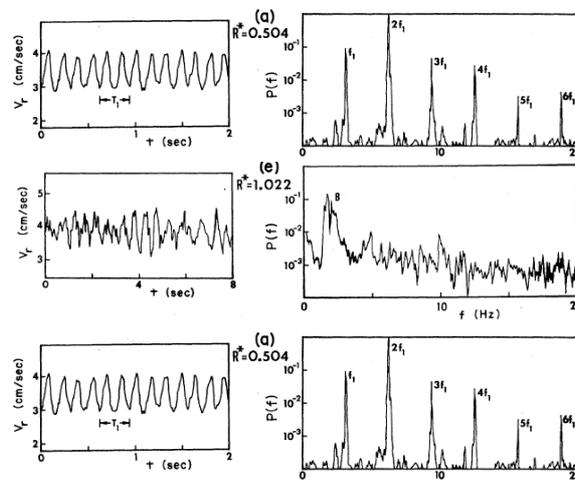


FIG. 8.2 – Dépendance temporelle de la vitesse radiale (à gauche) et spectre de puissance (à droite) dans l'instabilité de Taylor Couette. Les enregistrements sont effectués à des nombres de Reynolds croissants (du haut vers le bas). Le premier montre une seule fréquence fondamentale et ses harmoniques. Le second montre deux fréquences fondamentales et leurs harmoniques. Le dernier montre seulement une bande large. le comportement temporel correspondant est chaotique, sans aucune périodicité apparente. Figures tirées de Gollub et Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 927 (1975)

conduire l'écoulement vers la chaos spatial et temporel. Contrairement à l'idée admise jusqu'aux années 70, la transition vers la turbulence ne nécessite pas une séquence infinie d'instabilités successives. H. Swinney et J. Gollub ont montré clairement, dans une expérience réalisée à l'université de Princeton en 1975, que quelques étapes suffisent pour conduire de l'écoulement laminaire vers un état chaotique (fig. 8.2).

D'autres expériences, en particulier sur l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard, ont confirmé l'existence d'étapes bien définies dans la transition vers le chaos¹.

8.1.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité d'une "couche de mélange" entre deux courants de fluide de vitesses différentes, appelée aussi instabilité de Kelvin-Helmholtz présente elle aussi une succession d'instabilités : apparition de tourbillons périodiques dans la couche de mélange (périodicité spatiale et temporelle), interactions entre les tourbillons provoquant une modification locale de la périodicité, apparition

¹Voir par exemple, P. Bergé, Y.Pomeau, M. Dubois-Gance, "Des rythmes au chaos", Odile Jacob, 1994

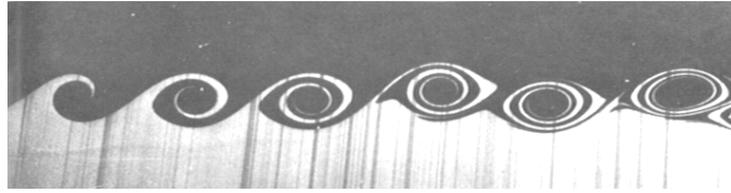


FIG. 8.3 – instabilité de Kelvin-Helmholtz entre deux courants d'eau parallèles. Visualisation par fluorescence induite par laser. Photo par F. Roberts, P. Dimotakis et A. Roshko.

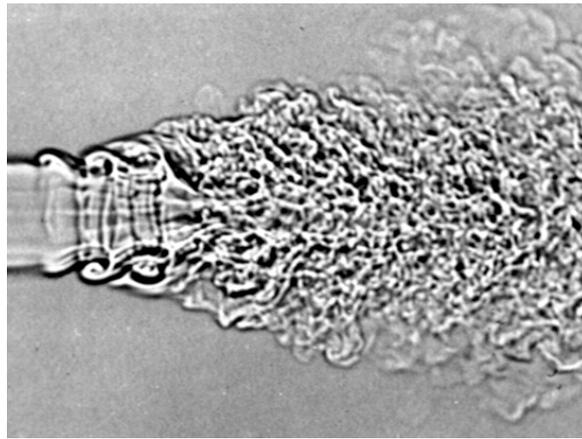


FIG. 8.4 – instabilité d'un jet circulaire de CO₂ pénétrant dans l'air à $Re = 30000$. L'instabilité se développe à la périphérie du jet qui devient rapidement complètement turbulent. Visualisation par ombroscopie. Photo par F. Landis et A. Schapiro.

de structures tridimensionnelles. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz se retrouve également dans l'instabilité des sillages et dans l'instabilité des jets. Elle est à l'origine de la turbulence dans tous les écoulements où règne un fort cisaillement. Dans l'instabilité de Taylor-Couette comme dans celle de Kelvin-Helmholtz, le moteur de l'instabilité est l'inertie du fluide et le terme non linéaire $u \cdot \nabla u$ dans l'équation de mouvement. En revanche, la viscosité a tendance à stabiliser l'écoulement. C'est pourquoi le paramètre qui décrit ces instabilités est le nombre de Reynolds. Dans le cas de l'écoulement de Couette, $Re = \Omega R_1 d / \nu$ où R_1 est le rayon du cylindre intérieur, d est l'espacement entre les cylindres et Ω est la vitesse angulaire.

8.1.3 Instabilité de Rayleigh-Bénard

Il peut y avoir d'autres sources d'instabilité que l'inertie du fluide. Un exemple notable est l'instabilité thermoconvective d'une couche de fluide chauffée par le bas. Le fluide chaud est moins dense que le fluide froid et il a tendance à monter dans le champ de gravité. La diffusion thermique tend à homogénéiser la température et à réduire les gradients de densité responsables de la convection. La viscosité du fluide tend également à ralentir la convection. La diffusion thermique et la viscosité sont ici les deux effets stabilisants. Lorsque la différence de température entre le bas et le haut de la couche de fluide est assez grande, on voit apparaître des rouleaux de convection réguliers dont la largeur est voisine de l'épaisseur de la couche de fluide. En augmentant encore la différence de température, la structure de l'écoulement se complique de plus en plus et finit par devenir chaotique. Une des caractéristiques communes de toutes les instabilités décrites ci-dessus est l'apparition d'une structure spatiale périodique dans l'instabilité primaire. Le système se comporte comme un amplificateur sélectif pour les sources de bruit. Parmi tous les modes possibles, l'un d'entre eux est amplifié de façon plus importante et fixe la périodicité spatiale de

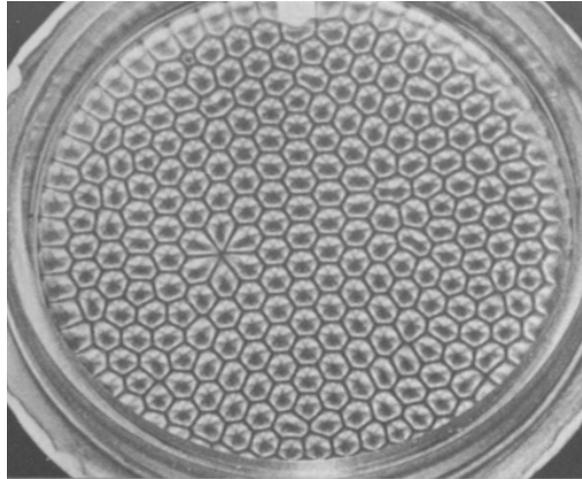


FIG. 8.5 – instabilité thermoconvective d’une couche de fluide (instabilité de Rayleigh-Bénard). La couche de liquide est chauffée par le dessous. Des particules métalliques en suspension permettent de visualiser les cellules de convection qui ont presque toutes une forme hexagonale. Photo : E. Koschmieder.

l’écoulement. Une autre caractéristique commune de ces instabilités est l’existence d’un paramètre de contrôle. Dans le cas de l’instabilité centrifuge et de l’instabilité de Kelvin-Helmholtz, c’est le nombre de Reynolds qui joue ce rôle. Pour l’instabilité thermoconvective, c’est un autre nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\alpha g d^3 \Delta T}{\nu \kappa} \quad (8.1)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique du fluide, d est l’épaisseur de la couche de fluide, ΔT est la différence de température et κ la diffusivité thermique. Le paramètre de contrôle compare l’amplitude des mécanismes déstabilisants et stabilisants. L’instabilité apparaît lorsque le paramètre de contrôle dépasse une valeur seuil qui dépend de la géométrie exacte de l’écoulement.

8.2 Turbulence

8.2.1 La nature de la turbulence

Il est difficile de définir la turbulence par des critères simples. Une possibilité consiste à qualifier un écoulement de turbulent dès que le champ de vitesse présente un caractère chaotique (absence de toute périodicité) dans l’espace ou le temps. Mais il existe des écoulements ”déterministes” qui présentent des caractères chaotiques, comme ceux dans les mélangeurs hélicoïdaux (voir § 9.3). Le caractère aléatoire de l’écoulement n’est qu’une des facettes de la turbulence. Il impose de traiter les écoulements turbulents par des méthodes statistiques. Une des manifestations spectaculaires du caractère chaotique est la sensibilité aux conditions initiales : un système dynamique complexe placé dans des conditions initiales extrêmement peu différentes peut évoluer au cours du temps de façons très différentes. Ainsi les prévisions météorologiques qui sont initiées avec un état approximatif de l’atmosphère (faute de pouvoir mesurer vitesse, température, pression et humidité en tous points) s’écartent progressivement de la situation réelle. Au delà d’une dizaine de jours, les dépressions et anticyclones de la simulation n’ont plus rien de commun avec ceux de l’atmosphère réelle. Henri Poincaré avait découvert dès la fin du dix-neuvième siècle que trois corps en interaction gravitationnelle pouvaient avoir un comportement chaotique. Il fallut attendre les années soixante et les simulations numériques du météorologue Edward Lorenz pour que les idées de Poincaré soient appliquées au chaos en mécanique des fluides.

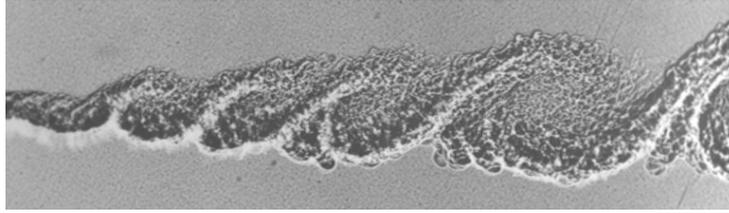


FIG. 8.6 – couche de mélange turbulente à $Re = 850000$. Les grands tourbillons provenant de l'instabilité initiale de la couche de mélange sont encore visibles ainsi que toute une gamme de tourbillons beaucoup plus petits. Photo : M.R. Rebello, G.L. Brown et A. Roshko.

Un autre aspect essentiel de la turbulence est sa capacité à mélanger rapidement que ce soit la quantité de mouvement, la chaleur ou la masse. Les fluctuations du champ de vitesse se produisent sur une large gamme d'échelles spatiales et assurent très efficacement la production de forts gradients de concentration qui sont finalement atténués par les mécanismes de diffusion moléculaire. L'existence de "tourbillons" à toutes les échelles spatiales, depuis la plus grande dimension de l'écoulement jusqu'à une échelle assez petite pour que la viscosité atténue les mouvements tourbillonnaires, est une caractéristique de la turbulence développée.

Les écoulements turbulents sont essentiellement tridimensionnels et rotationnels. Ils sont le siège de très intenses fluctuations de la vitesse et de la vorticité. Un examen d'un enregistrement de la vitesse locale au sein d'un écoulement turbulent montre des  v nements très intenses qui dépassent de beaucoup le niveau moyen du bruit. Les simulations numériques directes de l'équation de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds n'ont été possibles qu'avec l'apparition des supercalculateurs vectoriels. Elles ont montré la présence de zones allongées très localisées dans lesquelles la vorticité atteint une valeur très grande.

8.2.2 Description statistique du champ de vitesse

Reynolds a introduit une description statistique du champ de vitesse turbulent en séparant la vitesse u en une valeur moyenne temporelle U et une fluctuation v , de valeur moyenne nulle :

$$u_i = U_i + v_i \text{ avec } \langle u_i \rangle = U_i \text{ et } \langle v_i \rangle = 0 \quad (8.2)$$

les valeurs moyennes étant calculées sur un temps très grand devant les périodes caractéristiques des fluctuations. On montre facilement que si le fluide est incompressible, la vitesse moyenne et la fluctuation obéissent à l'équation de conservation :

$$\nabla \cdot U = 0 \text{ et } \nabla \cdot v = 0 \quad (8.3)$$

En reportant la décomposition 8.2 dans l'équation de Navier-Stokes, et en prenant la moyenne temporelle, on obtient :

$$U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-P\delta_{ij} + 2\eta E_{ij} - \rho \langle v_i v_j \rangle) \quad (8.4)$$

où P est la moyenne temporelle de la pression et E_{ij} la moyenne temporelle du tenseur des déformations e_{ij} . Le terme de dérivée temporelle de la vitesse a disparu puisque nous avons pris une valeur moyenne sur un temps assez long. Par rapport à l'équation de Navier-Stokes, il apparait un terme supplémentaire $-\rho \langle v_i v_j \rangle$ dans le tenseur des contraintes. Ce terme qui représente la fonction de corrélation entre les composantes v_i et v_j de la fluctuation de vitesse est appelé contrainte de Reynolds. Les contraintes de Reynolds manifestent l'influence des fluctuations sur l'écoulement moyen.

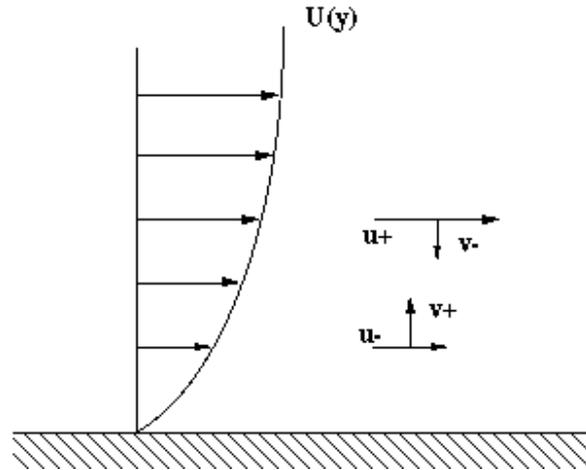


FIG. 8.7 – Transfert de quantité de mouvement dans une couche limite par l'intermédiaire des contraintes de Reynolds

8.2.3 Couche limite turbulente

Si nous utilisons la décomposition de Reynolds dans les approximations de couche limite, nous transformons l'équation (7.2) qui décrit une couche limite laminaire en :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial y} \quad (8.5)$$

Dans la couche limite où le gradient de vitesse moyen $\partial U / \partial y$ est positif, la fonction de corrélation des fluctuations $\langle uv \rangle$ devrait être essentiellement négative. En effet, une fluctuation v positive est associée au mouvement d'un élément de fluide vers l'extérieur de la couche limite. Cet élément emporte avec lui une quantité de mouvement faible puisqu'il se trouvait dans une zone de faible vitesse. Il va donc se trouver dans un environnement où la majorité des éléments de fluide se déplacera plus vite. Il sera donc associé à une fluctuation u de valeur négative. On peut faire un raisonnement identique avec une fluctuation v négative (fig. 8.7). On voit ici que le tenseur de Reynolds augmente le transfert de quantité de mouvement au sein de la couche limite.

Cet accroissement du transfert de quantité de mouvement explique que le décollement des couches limites est retardé lorsqu'elles deviennent turbulentes : l'apport de fluide de grande vitesse vers la paroi s'oppose au développement d'un gradient de pression adverse qui est responsable du décollement (cf 8.3). Cet effet se manifeste par la diminution brutale de traînée observée sur les sphères lorsque la couche limite devient turbulente : la couche limite décolle plus en aval et la largeur du sillage se trouve réduite. La fig. 8.8 montre de coefficient de traînée mesuré sur des sphères lisses et rugueuses. Sur les sphères lisses, la transition de la couche limite a lieu vers $Re = 3 \times 10^5$ et provoque une réduction de traînée d'un facteur 5. Sur des sphères de plus en plus rugueuses la transition se produit à des nombres de Reynolds plus petits et entraîne une réduction de traînée du même ordre de grandeur.

Sur certaines ailes d'avion, de très petits ailerons placés devant les volets de bord de fuite servent à déclencher la turbulence de la couche limite et à retarder son décollement sur les volets lorsqu'ils sont placés à un grand angle d'incidence.

8.2.4 Multiplicité des échelles spatiales et caractère dissipatif

Un des trait essentiels des écoulements turbulents est l'existence de tourbillons dans toute une gamme d'échelles spatiales. Cette caractéristique est assez évidente sur les photographies des

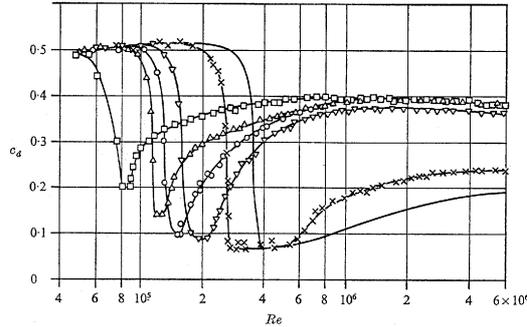


FIG. 8.8 – Coefficients de traînée pour une sphère lisse (trait continu seul) et pour des sphères rugueuses. L'amplitude de la rugosité va de $2,5 \times 10^{-4}$ diamètre (croix) jusqu'à $1,25 \times 10^{-2}$ diamètre (carrés). D'après E. Achenbach, *J. Fluid Mech.* **65**, 113 (1974)

fig. 10.4 et 8.6. La taille des plus grands tourbillons est en général fixée par l'échelle globale de l'écoulement, ou par son mode d'instabilité primaire, comme dans le cas de la couche de mélange.

Le mathématicien russe Kolmogorov a formalisé en 1941 la notion de cascade d'énergie cinétique dans les écoulements turbulents. L'énergie cinétique fluctuante est "injectée" au niveau de l'échelle spatiale la plus grande L . Par des mécanismes d'interactions non linéaires, une partie de cette énergie "cascade" vers les petites échelles (ce transfert d'énergie a lieu de manière permanente dans l'espace de Fourier représentant l'écoulement). L'hypothèse essentielle de Kolmogorov est que l'énergie cinétique transférée est la même à toutes les échelles spatiales. Si $u(l)$ est la fluctuation de vitesse représentative des tourbillons à l'échelle l , l'énergie cinétique par unité de masse du fluide est de l'ordre de $u(l)^2$. Une fraction de cette énergie est transférée vers les tourbillons plus petits. Le temps caractéristique de ce transfert est le temps associé au tourbillon d'échelle l , soit $\tau(l) \propto l/u(l)$. Donc, le taux de transfert de l'énergie cinétique ϵ est tel que :

$$\epsilon \propto u(l)^2/\tau(l) = u(l)^3/l \quad (8.6)$$

Tant que les dimensions des tourbillons restent assez grandes, la viscosité joue un rôle négligeable dans l'écoulement. En revanche, lorsque les tourbillons atteignent une taille assez petite l_d , la viscosité devient dominante et l'énergie cinétique transférée ϵ est dissipée. Cette échelle de dissipation l_d , ou micro-échelle de Kolmogorov, peut être évaluée en écrivant que le nombre de Reynolds associé à cette échelle est égal à 1, soit :

$$1 = \frac{l_d u(l_d)}{\nu} = \frac{l_d \epsilon^{1/3} l_d^{1/3}}{\nu} \quad (8.7)$$

d'où l'ordre de grandeur de l'échelle de dissipation :

$$l_d \propto \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4} \quad (8.8)$$

Notons que plus le nombre de Reynolds de l'écoulement global est grand, plus l'échelle de dissipation est petite. En effet, si $Re_L = u(L)L/\nu = \epsilon^{1/3} L^{3/4}/\nu$, alors : $l_d \propto L Re_L^{-3/4}$. En pratique, les lois d'échelle ainsi prédites par Kolmogorov ne sont observées que dans les écoulements de turbulence développée à très grands nombres de Reynolds, au moins de l'ordre de 10^6 .

Bien que le nombre de Reynolds associé à l'écoulement global soit très grand, l'existence de tourbillons jusqu'à l'échelle l_d impose une forte dissipation d'énergie cinétique. Le caractère dissipatif des écoulements turbulents se manifeste, entre autres, par une perte de charge accrue lorsque l'écoulement dans un tuyau passe de l'état laminaire à l'état turbulent. Si la turbulence n'est plus entretenue par l'écoulement moyen, elle est amortie très rapidement par les effets de la viscosité. La multiplicité des échelles spatiales est également la source essentielle de la difficulté de simuler

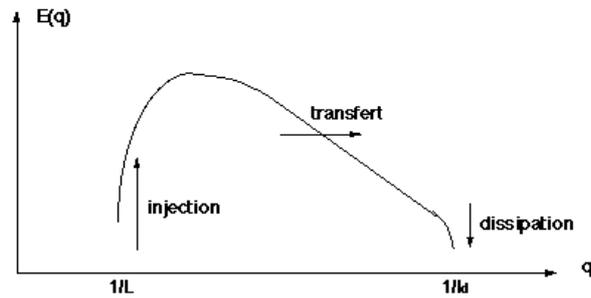


FIG. 8.9 – représentation schématique du flux d'énergie cinétique dans un écoulement turbulent.

numériquement les écoulements turbulents. Prenons l'exemple d'un avion : la plus grande échelle de l'écoulement est une dimension typique de l'avion, quelques dizaines de m. La vitesse est de l'ordre de 200 à 250 m/s ce qui conduit à un nombre de Reynolds Re_L de l'ordre de 10^8 . L'échelle de dissipation pour cet écoulement est 10^6 fois plus petite que L ; elle est de l'ordre de quelques dizaines de microns. Si on voulait simuler la totalité de l'écoulement, il faudrait de l'ordre de $(10^6)^3 = 10^{18}$ mailles ! Une estimation similaire était donnée en 1997 par Kim et Moin, deux experts de la simulation numérique de la turbulence : ils évaluaient le nombre de mailles à 10^{16} . En utilisant un calculateur "teraflop", il faudrait encore plusieurs milliers d'années pour calculer une seule seconde de l'écoulement réel ² ! Cette difficulté apparemment insurmontable peut être contournée en ne simulant directement que les grandes échelles de l'écoulement. Les petites échelles sont représentées par un modèle statistique (technique dite de "Large Eddy Simulation"). En utilisant la méthode LES, Moin et Kim ont été les premiers à simuler un écoulement turbulent dans une conduite avec un certain réalisme (c'est-à-dire reproduisant correctement les observations expérimentales jusqu'aux plus petites échelles de l'écoulement). Le nombre de Reynolds atteint était de l'ordre de 10 000, avec 500 000 points de maillage.

²P. Moin & J. Kim, "tackling turbulence with supercomputers", *Scientific American*, **276**, No. 1, 1997.