

Chapitre 6

ÉCOULEMENTS À GRANDS NOMBRES DE REYNOLDS

6.1 Répartition de pression. Effet Coanda

Nous avons déjà, dans plusieurs circonstances, fait l'hypothèse que la viscosité du fluide était négligeable. Dans le chapitre V consacré aux lois de conservation, nous avons établi la relation de Bernoulli et nous l'avons appliquée aux écoulements à surface libre et au tube de Pitot. Nous allons maintenant compléter la relation qui existe entre pression et vitesse dans un écoulement de fluide parfait. Rappelons que la loi de Bernoulli exprime que la quantité $H = 1/2\rho u^2 + p + \rho\phi$ est constante le long d'une ligne de courant. Si l'écoulement est irrotationnel, H est constant dans tout l'écoulement. A partir de l'équation d'Euler $\rho\partial\mathbf{u}/\partial t + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla p$, nous allons établir la variation de pression observée lorsqu'on traverse des lignes de courant courbées. Si les lignes de courant ont localement un rayon de courbure R , l'accélération d'une particule de fluide a deux composantes :

- une composante du/dt orientée suivant la tangente \mathbf{t} aux lignes de courant
- une composante u^2/R orientée suivant la normale \mathbf{n} aux lignes de courant, c'est l'accélération centripète

D'où :

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \rho\frac{du}{dt}\mathbf{t} - \rho\frac{u^2}{R}\mathbf{n} \quad (6.1)$$

si \mathbf{n} est orienté vers l'extérieur de la courbure.

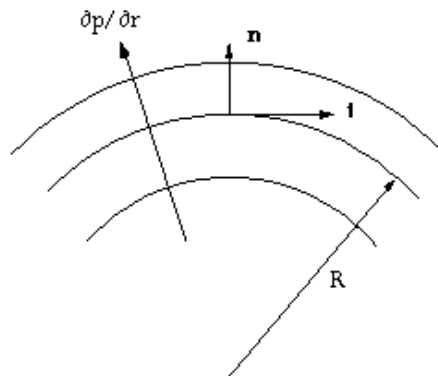


FIG. 6.1 – Ecoulement avec des lignes de courant courbées.

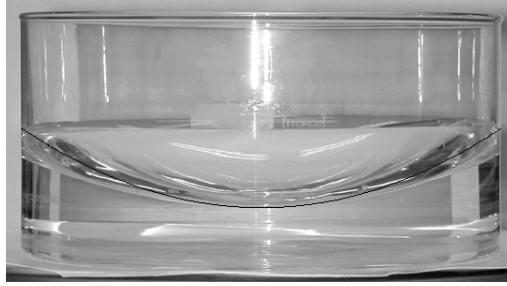


FIG. 6.2 – Récipient en rotation rempli d'eau. La courbe en trait noir est la forme théorique de la surface libre.

Le gradient de pression doit équilibrer les deux composantes d'accélération et, le gradient de pression radial équilibre l'accélération centripète :

$$\rho \frac{u^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.2)$$

ce qui montre que la pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure des lignes de courant. Nous retrouvons également le fait qu'il n'y a pas de gradient de pression perpendiculairement aux lignes de courant si celles-ci sont rectilignes (R infini). Afin de connaître la répartition complète de pression dans un écoulement de fluide parfait, nous pouvons donc appliquer la loi de Bernoulli sur une ligne de courant et utiliser la relation 6.2 pour passer d'une ligne de courant à l'autre. Une manifestation évidente du gradient de pression radial lié à la courbure des lignes de courant est la déformation de la surface libre d'un liquide contenu dans un récipient cylindrique en rotation. Si on attend assez longtemps après la mise en rotation du récipient, tout le liquide tourne "en bloc" avec un champ de vitesse $u_\theta = \Omega r$.

Lorsque le fluide est en "rotation solide", il n'y a pas de déformation des éléments de fluide et, même si le fluide est visqueux, il n'y a pas de contraintes liées à la viscosité et les équations de mouvement se ramènent à $\rho u_\theta^2/R = \partial p/\partial r$ dans la direction radiale et $-\rho g = \partial p/\partial z$ dans la direction verticale. Dans la direction radiale, la pression est donnée par : $p(r, z) = p(0, z) + 1/2\rho\Omega^2 r^2$. Sachant qu'à la surface libre, définie par $z = \zeta(r)$ la pression est constante et égale à p_0 , on obtient : $p_0 + \rho g\zeta(0) + 1/2\rho\Omega^2 r^2 = p_0 + \rho g\zeta(r)$, d'où : $\zeta(r) - \zeta(0) = \Omega^2 r^2/2g$. La forme de la surface libre est un paraboloidé de révolution.

6.1.1 Effet Coanda.

Une autre manifestation du gradient de pression radial peut être observée en plaçant un cylindre ou une sphère sur le bord d'un jet. Le jet est défléchi par la surface solide et les lignes de courant se courbent en suivant la surface solide. Le gradient de pression est tel que la pression sur la surface de l'objet est plus petite qu'à l'extérieur du jet. Si le jet est effectivement placé sur un des côtés de l'objet, il y a une différence de pression entre les deux côtés de l'objet qui tend à pousser l'objet vers le jet. Cet effet permet de maintenir en "lévitation" une boule sur laquelle on dirige un jet d'air.

6.2 Écoulements potentiels

6.2.1 Propriétés du potentiel des vitesses

Une des propriétés importantes des écoulements de fluides parfaits est que si un volume de fluide est irrotationnel ($\omega = \text{rot}\mathbf{u} = 0$), il le reste indéfiniment. Si par exemple, le fluide est

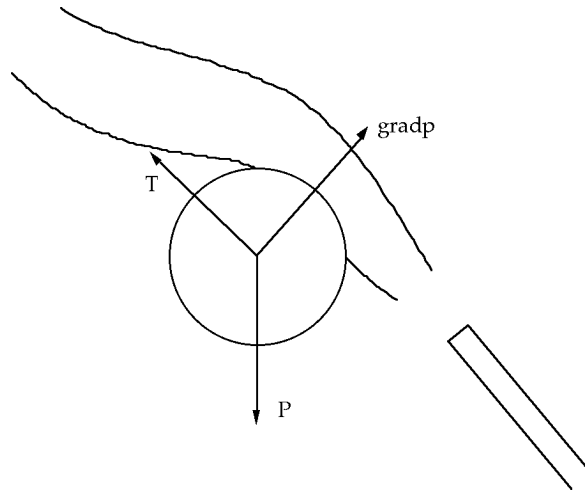


FIG. 6.3 – Sphère sustentée par un jet d’air. Le poids P de la sphère est équilibré par la traînée T et par la force résultant du gradient de pression radial.

initialement au repos et s’il est mis en mouvement par l’application d’un gradient de pression, l’écoulement créé sera potentiel. Cette propriété n’est évidemment pas vérifiée exactement dans les fluides réels. Néanmoins, dans certaines conditions, en particulier sur les corps profilés, les effets visqueux peuvent être négligés et des écoulements potentiels sont observés. Ceci justifie l’étude de ce type d’écoulements.

Si, de plus, le fluide est incompressible, le caractère irrotationnel : $u = \nabla\phi$ couplé à la condition d’incompressibilité conduit à :

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0 \quad (6.3)$$

Le potentiel des vitesses obéit à l’équation de Laplace et la résolution de l’équation de mouvement se ramène à la recherche de fonctions harmoniques satisfaisant les conditions aux limites. Ce problème est exactement équivalent à celui rencontré en électrostatique. En l’absence de viscosité, les parois solides n’imposent plus une condition de vitesse nulle. Le fluide ne peut néanmoins pas les traverser, c’est-à-dire que la composante de vitesse normale à la paroi doit être nulle, soit $\partial\phi/\partial n = 0$ où n est une coordonnée dans une direction normale à la paroi solide.

La linéarité de l’équation de Laplace permet d’additionner des solutions obtenues indépendamment. Il suffit que le potentiel obtenu finalement respecte les conditions aux limites. A deux dimensions, le caractère potentiel de l’écoulement impose que la fonction de courant ψ satisfasse également l’équation de Laplace. En effet :

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \mathbf{k} = 0 \quad (6.4)$$

La vitesse est orthogonale aux lignes équipotentielles $\phi = Cte$ et tangente aux lignes de courant $\psi = Cte$. Les équipotentielles et les lignes de courant constituent donc des réseaux de courbes orthogonales. Nous allons examiner quelques solutions simples de l’équation de Laplace.

6.2.2 Ecoulements potentiels simples

Ecoulement uniforme

Le champ de vitesse est donné par : $u = U, v = 0$. Le potentiel des vitesses correspondant est : $\phi = Ux$ et la fonction de courant est $\psi = Uy$.

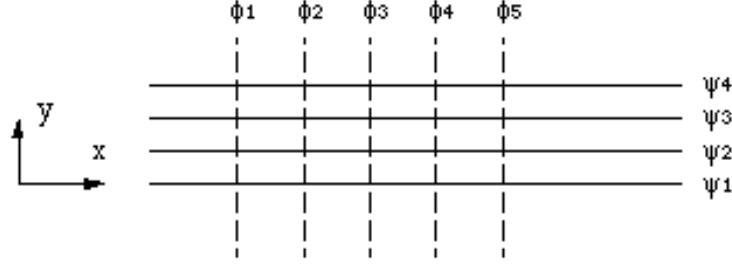


FIG. 6.4 – équipotentielles et lignes de courant pour un écoulement uniforme.

Tourbillon

Les lignes de courant sont circulaires. Le champ de vitesse est $u_r = 0, u_\theta = \Gamma/2\pi r$. Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial\theta$, soit :

$$\phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad (6.5)$$

Les équipotentielles sont des droites $\theta = Cte$. La fonction de courant est donnée par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (6.6)$$

Les lignes de courant sont des cercles espacés "exponentiellement". La circulation de la vitesse sur un cercle de rayon r est :

$$C = \int u_\theta dl = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma \quad (6.7)$$

Le paramètre Γ est donc la circulation associée au tourbillon. Cette circulation est indépendante du rayon du cercle. En conséquence, le flux du rotationnel de la vitesse sur une surface limitée par deux cercles de rayon quelconque centrés en O est nul. L'écoulement est bien irrotationnel, sauf en $r = 0$ où il existe une singularité de la vorticité. Cette singularité est responsable de la circulation non nulle sur un contour qui entoure le centre du tourbillon. Cette situation est absolument analogue au champ magnétique crée par un fil rectiligne parcouru par un courant.

On peut également noter que le potentiel défini par (6.5) n'est pas univoque. En tournant plusieurs fois autour du centre du tourbillon, on obtient des valeurs différentes du potentiel en un même point de l'espace. Cette multiplicité du potentiel est due à la singularité de vorticité plac e en $r = 0$. De manière analogue, en magnétisme, la présence de courants rend le potentiel vecteur non univoque.

Source

Une source (ou un puits) est un écoulement purement radial dont le débit total est Q . Le champ de vitesse est : $u_r = \frac{Q}{2\pi r}, u_\theta = 0$. Si Q est positif, l'écoulement diverge depuis le centre (source) ; si Q est négatif, l'écoulement converge (puits). Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_r = \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (6.8)$$

La fonction de courant est donn e par : $u_r = \frac{1}{r} \partial\psi/\partial\theta$, d'où : $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$. Remarquons que le potentiel et la fonction des courants ont la même forme que pour le tourbillon, mais leur r les sont inversés. La source est, en quelque sorte, l'écoulement dual du tourbillon.

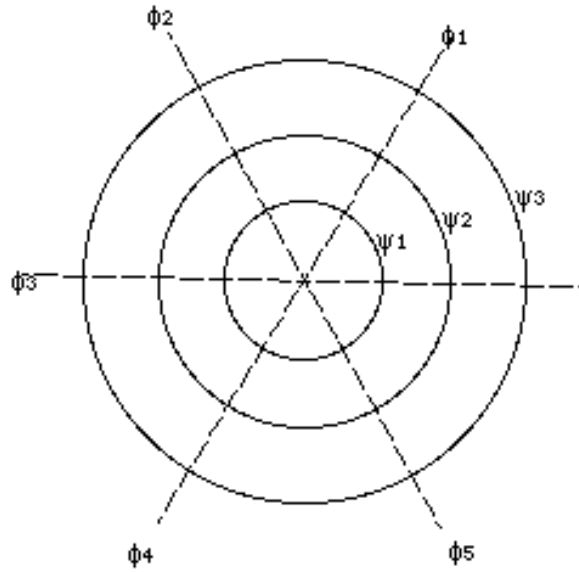


FIG. 6.5 – tourbillon. Lignes de courant et équipotentielles.

Dipôle

De la même manière qu'en électrostatique où deux charges proches de signes opposés constituent un dipôle, nous pouvons fabriquer un dipôle en rapprochant une source et un puits de débits opposés. Le potentiel des vitesses pour le dipôle est la somme du potentiel du puits et de la source, soit :

$$\phi = \phi_s + \phi_p = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_s}{a} - \ln \frac{r_p}{a} \right) \quad (6.9)$$

où r_s est la distance à la source et r_p la distance au puits. En faisant tendre la distance d entre puits et source vers 0, tout en gardant le produit $p = dQ$ constant, les distances r_s et r_p deviennent très grandes devant d . Il est alors possible de faire un développement de $\ln r_s$ et $\ln r_p$ autour de $\ln r$ où r est la distance entre le point considéré et le centre du dipôle. Soit : $\ln r_s = \ln r + \frac{\partial \ln r}{\partial r}(r_s - r)$. D'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi r}(r_s - r_p) \approx \frac{Qd \cos \theta}{2\pi r} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (6.10)$$

où θ est l'angle entre l'axe du dipôle et \mathbf{r} . Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} = \frac{px}{2\pi r^3} \text{ et } u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} = \frac{py}{2\pi r^3} \quad (6.11)$$

6.2.3 Ecoulement autour d'un cylindre

La recherche du potentiel des vitesses pour l'écoulement autour d'un obstacle doit satisfaire uniquement à deux conditions : loin de l'obstacle, on doit retrouver un écoulement uniforme avec un potentiel $\phi = Ux$ et sur l'obstacle, la vitesse normale à la paroi doit être nulle, c'est-à-dire que la paroi doit être une ligne de courant. L'obstacle constituant une perturbation de l'écoulement uniforme, une des méthodes pour trouver le potentiel consiste à ajouter au champ de vitesse uniforme, la vitesse résultant d'un développement multipolaire du potentiel. Nous avons vu ci-dessus ce que sont le potentiel d'un monopôle (source) et d'un dipôle. On peut définir de la même manière, le potentiel d'un quadrupôle et des multipôles d'ordres plus élevés. La propriété d'additivité de l'équation de Laplace fait que tous ces développements multipolaires satisfont également à l'équation de Laplace. Nous allons considérer ici l'ajout du potentiel d'un dipôle à un

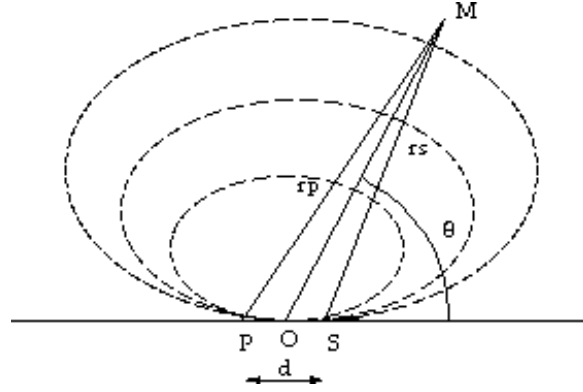


FIG. 6.6 – écoulement créé par un dipôle. Les lignes de courant sont des ellipses (en trait pointillé)

écoulement uniforme qui permet de représenter l'écoulement autour d'un cylindre. L'axe du dipôle est parallèle à l'écoulement moyen pour conserver la symétrie axiale et le potentiel est :

$$\phi = Ux - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left(Ur - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta \quad (6.12)$$

Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad u_\theta = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \quad (6.13)$$

il doit satisfaire aux conditions aux limites : $\mathbf{u} = U\mathbf{i}$ à l'infini et $u_r = 0$ en $r = a$ (sur le cercle). La première condition est vérifiée quelle que soit la force du dipôle parce que le potentiel du dipôle décroît en $1/r$ et sa contribution s'annule à l'infini. La seconde condition impose la force du dipôle : $p = -2\pi a^2 U$ et le potentiel résultant est :

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.14)$$

et le champ de vitesse est :

$$u_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.15)$$

La fonction de courant s'en déduit par intégration :

$$\psi = -Ur \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.16)$$

Les lignes de courant sont représentées sur la fig. 6.7. Il est facile de déterminer le champ de pression ; puisque l'écoulement est potentiel, la loi de Bernoulli s'applique dans tous l'écoulement et :

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2) = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{a^2}{r^2} \left(2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6.17)$$

Sur les points du cylindre où la vitesse est nulle (en $\theta = 0$ et π), on retrouve la pression de stagnation : $p = p_0 + 1/2 \rho U^2$.

En intégrant la pression sur le pourtour du cylindre, nous obtenons la force exercée par l'écoulement et en particulier sa composant dans la direction de l'écoulement moyen :

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta \, a \, d\theta \quad (6.18)$$

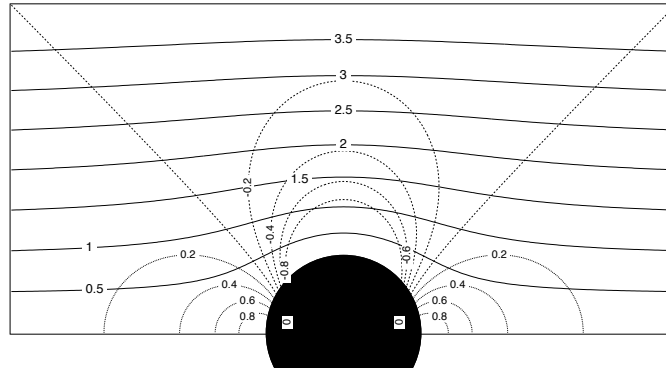


FIG. 6.7 – écoulement potentiel autour d'un cylindre. Lignes de courant (ψ normalisée par Ua) en trait plein et isobares (pression normalisée par la pression dynamique) en pointillés.

La force de traînée est nulle, en raison de l'hypothèse que nous avons faite de négliger la viscosité et de ne pas imposer de condition de non glissement à la surface du solide. Comme nous le verrons, un même résultat est obtenu pour tout corps solide dans un écoulement potentiel. Cette propriété fut découverte par D'Alembert et constituait à l'époque un paradoxe car le rôle de la viscosité n'était pas clairement établi.

6.3 Forces sur un obstacle en écoulement potentiel

La force exercée par l'écoulement sur un corps solide dépend évidemment de la forme de ce corps. Néanmoins, dans le cas des écoulements potentiels, des résultats très généraux peuvent être obtenus en considérant la forme asymptotique de l'écoulement loin de l'obstacle. Pour établir ces formes asymptotiques, il convient de faire la distinction entre les écoulements bidimensionnels et les écoulements tridimensionnels. D'une part la forme du potentiel des vitesses à grande distance du corps est différente : en effet, cette forme est dictée par la nécessité d'avoir un débit nul sur une sphère (à 3 D) et sur un cercle (à 2D). D'autre part, à deux dimensions la présence d'un corps solide modifie la topologie du domaine d'écoulement : ce domaine n'est plus simplement connexe. Il est possible de tracer un contour dans le fluide et entourant le solide. La longueur de ce contour ne peut être réduite à zéro par une transformation continue. L'existence de contours fermés non réductibles au sein du fluide offre la possibilité d'avoir une circulation non nulle de la vitesse autour de ces contours. Donc, le potentiel des vitesses peut être multiforme, ainsi que nous l'avons vu dans l'exemple du tourbillon. Cette possibilité n'existe pas à trois dimensions pour un corps dont les dimensions sont finies : tous les contours tracés dans le fluide peuvent être réduits à une aire nulle.

6.3.1 Potentiel des vitesses à grande distance du corps

Dans un écoulement bidimensionnel, la forme asymptotique du potentiel est :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + c \ln r + c_1 \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (6.19)$$

Le premier terme du développement est le potentiel d'un tourbillon, il correspond à l'existence possible d'une circulation autour de l'obstacle. Le second terme est le potentiel d'une source. L'intégrale sur un contour fermé de l'écoulement lié à ce terme de source est un débit c . En raison de la condition de vitesse normale nulle imposée sur le corps solide, ce débit doit être nul. Le terme suivant est le potentiel d'un dipôle et il est possible de poursuivre le développement par des termes multipolaires. A grande distance, le terme dipolaire domine les termes d'ordre

plus élevé. Si la circulation Γ n'est pas nulle, sa contribution (décroissant en $1/r$) au champ de vitesse est dominante. En revanche, si la circulation est nulle, le terme dipolaire donne la contribution dominante (en $1/r^2$) au champ de vitesse. Nous avons vu que, dans le cas d'un cylindre, le développement (6.19) donne la solution exacte de l'équation de Laplace. Dans un écoulement tridimensionnel, le potentiel peut être développé en harmoniques sphériques :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{c}{r} + c_1 \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (6.20)$$

Le premier terme de ce développement est un terme de source qui est nul pour la même raison que dans un écoulement bidimensionnel. Le second terme est le potentiel d'un dipôle à trois dimensions. Ce terme dipolaire est dominant à grande distance.

6.3.2 Force sur un corps solide

Nous utilisons la loi de conservation de l'impulsion pour calculer la force \mathbf{F} exercée sur le solide. Nous prenons un volume de contrôle limité, d'une part, par la surface du solide S_c et, d'autre part, par un cylindre S situé à grande distance (fig. 6.8). A trois dimensions, le cylindre est remplacé par une sphère. Puisqu'il n'y a pas ici de contraintes engendrées par la viscosité, \mathbf{F} est l'intégrale de la pression sur la surface S_c du corps : $\mathbf{F} = \int_{S_c} p \tilde{\mathbf{n}} dS$ où $\tilde{\mathbf{n}}$ est la normale à S_c orientée vers le fluide. D'autre part, la conservation de la quantité de mouvement appliqué au volume limité par S_c et S donne :

$$\int_{S+S_c} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S+S_c} p \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{f} dV \quad (6.21)$$

où \mathbf{f} est la force par unité de volume exercée sur le fluide (la gravité par exemple) et \mathbf{n} la normale à $S + S_c$ orientée vers l'extérieur du volume de contrôle. A la surface du corps solide, la composante normale de vitesse est nulle et le flux de quantité de mouvement à travers cette surface est donc nul. En supposant que la force en volume est nulle (l'ajout de la force de gravité donnerait la poussée d'Archimède exercée sur le corps), l'équation de conservation de l'impulsion devient :

$$\int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S p \mathbf{n} dS = -\mathbf{F} \quad (6.22)$$

Décomposons maintenant le champ de vitesse \mathbf{u} en la somme de la vitesse à l'infini \mathbf{U} et d'une perturbation \mathbf{v} due à l'obstacle et utilisons la loi de Bernoulli pour évaluer la pression :

$$p + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (6.23)$$

Si la surface S est placée suffisamment loin de l'obstacle, la perturbation \mathbf{v} est petite devant la vitesse moyenne \mathbf{U} et il est possible de négliger le terme en v^2 dans le membre de gauche de (6.23), d'où :

$$p - p_\infty \approx -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{U} \quad (6.24)$$

En reportant cette expression de la pression dans (6.22), il vient :

$$\mathbf{F} = \int_S p_\infty \mathbf{n} dS - \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.25)$$

Les intégrales de p_∞ et U (qui sont constants) sur le contour fermé S sont nulles. L'intégrale $\int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ est également nulle ; c'est, au facteur U près, l'intégrale de la perturbation \mathbf{v} sur la surface S , c'est-à-dire le débit de fluide à travers S associé à la perturbation. Nous avons vu que la présence du corps solide empêche d'avoir un terme de source pour le potentiel de perturbation. Ce débit est donc nul. Finalement, la force exercée sur le solide est :

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n}] dS \quad (6.26)$$

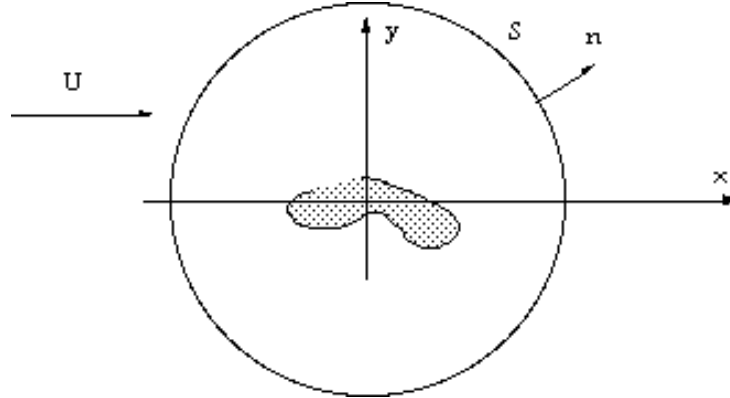


FIG. 6.8 – volume de contrôle utilisé pour calculer la force sur un corps solide.

Soit, en utilisant la relation vectorielle : $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$,

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho \mathbf{U} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) dS = -\rho \mathbf{U} \wedge \int_S (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) dS \quad (6.27)$$

Cette dernière expression montre que la force \mathbf{F} est toujours orthogonale à la direction moyenne de l'écoulement. Il n'y a pas de force de traînée dans un écoulement potentiel. Nous retrouvons sous forme générale le résultat obtenu pour l'écoulement autour d'un cylindre. Dans un écoulement tridimensionnel autour d'un corps de dimensions finies, le terme dominant du potentiel des vitesses est le terme dipolaire en $1/r^2$. Le champ de vitesse correspondant décroît en $1/r^3$. L'intégrale de cette perturbation sur une sphère de surface proportionnelle à r^2 décroît comme $1/r$. Il est possible de placer la surface S arbitrairement loin et l'intégrale de \mathbf{v} est nulle. La force de portance (normale à l'écoulement moyen) est donc aussi nulle dans ce cas. Dans un écoulement bidimensionnel, en présence d'une circulation autour du corps solide, c'est ce terme de circulation qui domine la perturbation \mathbf{v} à grande distance. Pour les mêmes raisons qu'à trois dimensions, la contribution du terme dipolaire à la force \mathbf{F} est nulle. Le champ de vitesse \mathbf{v} est donné par le potentiel d'un tourbillon (6.5) :

$$\mathbf{v} = \nabla \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \nabla \theta \quad (6.28)$$

et, en choisissant S comme un cercle de rayon r , la normale \mathbf{n} a pour composantes $\cos \theta$ et $\sin \theta$. La composante F_y s'exprime de la manière suivante, pour un écoulement moyen dirigé suivant l'axe x :

$$F_y = -\rho U \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \right) r d\theta = -\rho U \Gamma \quad (6.29)$$

Ce dernier résultat qui montre que la portance est proportionnelle au produit de la vitesse moyenne et de la circulation, est connu sous le nom de relation de Kutta-Joukowski. Il faut noter que la vitesse \mathbf{U} est exprimée dans un repère où le corps solide est immobile ; \mathbf{U} est la vitesse du fluide à l'infini. Nous pouvons interpréter simplement le signe de la force de portance en utilisant la loi de Bernoulli. Supposons que l'écoulement moyen du fluide se fasse de droite à gauche, soit : $\mathbf{U} = (-U, 0)$ et que la circulation Γ soit positive (dans le sens trigonométrique). Au dessus du solide, l'écoulement créé par la circulation se rajoute à l'écoulement moyen. En dessous, il s'oppose à l'écoulement moyen. La vitesse du fluide est donc plus grande au-dessus de l'obstacle qu'en dessous. En application de la loi de Bernoulli, la pression est plus basse au-dessus de l'obstacle. Donc la force résultante est dirigée vers le haut (F_y positif, en accord avec (6.29) pour une vitesse moyenne négative et une circulation positive.)

La portance développée sur des ailes ou des voiles est donc liée à l'existence d'une circulation autour de ces profils. Nous n'avons pas évoqué jusqu'à maintenant la façon dont cette circulation

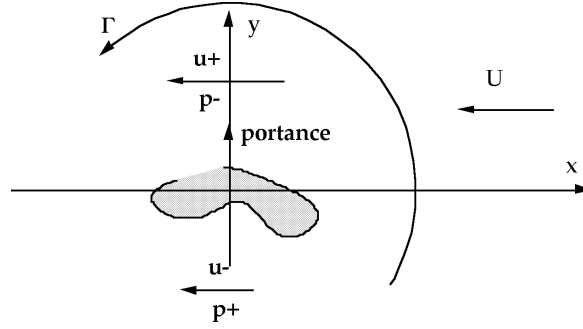


FIG. 6.9 – Portance engendrée par un écoulement bidimensionnel couplé à une circulation Γ autour de l’obstacle.

s’établit. En réalité, la viscosité joue un rôle déterminant dans ce phénomène transitoire sur lequel nous reviendrons un peu plus loin. Un cylindre ou une sphère en rotation (comme une balle de tennis frappée avec un effet) sont également soumis à une force de portance. Là encore, la viscosité joue un rôle important : la surface solide en rotation entraîne le fluide environnant qui doit respecter la condition de non glissement sur la surface et un écoulement tourbillonnaire est ainsi créé. Dans certaines conditions, le champ de vitesse réel est peu différent de celui déterminé par une théorie “potentielle” et la force de portance réelle est très voisine de celle prédite par la relation de Kutta-Joukowski. Les cylindres tournants ont été effectivement utilisés comme “surfaces portantes” sur un navire imaginé par Flettner dans les années 20 : deux grands cylindres verticaux entraînés par des moteurs remplaçaient les voiles traditionnelles.

6.4 Conservation de la circulation. Théorème de Kelvin.

6.4.1 Théorème de Kelvin

La circulation de la vitesse sur un contour fermé joue un rôle essentiel dans la détermination des forces exercées sur des obstacles. Nous allons voir comment évolue cette circulation lorsque le contour C se déplace avec le fluide. La variation de circulation au cours du temps est :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

où D/Dt est une dérivée “particulaire”, calculée en suivant le mouvement d’une particule de fluide. La variation de la circulation Γ comprend deux contributions : la première est due au déplacement du contour C , entraîné par le mouvement du fluide, la seconde est due à la variation temporelle de la vitesse sur le contour, soit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} \quad (6.30)$$

La première intégrale peut être évaluée à partir de l’équation d’Euler : $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\phi$ où ϕ est le potentiel dont dérivent les forces en volume. Si la masse volumique est constante, cette première intégrale se ramène à la circulation de deux gradients sur un contour fermé, elle est donc nulle. La variation de longueur de l’élément de contour $d\mathbf{l}$, par unité de temps, est simplement la différence des vitesses aux deux extrémités de cet élément, soit : $\frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ et la seconde intégrale devient :

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \oint_C \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{1}{2}\nabla(u^2) \cdot d\mathbf{l} \quad (6.31)$$

C'est à nouveau l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé. Donc la variation de circulation sur un contour fermé qui suit l'écoulement est nulle :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (6.32)$$

Ce résultat, qui constitue le théorème de Kelvin, n'est valide que si i) le fluide n'est pas visqueux, ii) si la masse volumique est constante et iii) si les forces en volume dérivent d'un potentiel.

6.4.2 Une manifestation du théorème de Kelvin : le tourbillon de vidange

Lorsqu'on vidange un évier ou une baignoire, on peut observer la dépression de la surface libre qui se forme au-dessus de l'orifice de vidange. Cette dépression reflète une chute de pression au sein du liquide qui est elle-même due à un tourbillon qui se forme dans le récipient (par une perturbation initiale, la force de Coriolis n'a rien à voir là-dedans, contrairement à ce qu'on affirme parfois). L'amplification du tourbillon est liée au théorème de Kelvin : considérons un élément de fluide cylindrique dont l'axe est confondu avec celui du trou de vidange. La circulation Γ sur la surface extérieure de ce cylindre est de l'ordre de UR où U est la vitesse tangentielle et R le rayon du cylindre. L'écoulement dans la vidange étire ce cylindre de fluide le long de son axe. Pour satisfaire la conservation du volume, le rayon du cylindre doit diminuer et pour conserver la circulation, la vitesse tangentielle doit augmenter.

6.4.3 Théorème de Kelvin et dynamique de la vorticité.

La circulation de la vitesse et la vorticité sont directement liées : en effet, le flux de vorticité (qui est le rotationnel de la vitesse) à travers une surface est égal à la circulation de la vitesse sur le contour bordant cette surface :

$$\int_S \omega \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

Dans un écoulement de fluide incompressible, où la viscosité est négligeable, l'équation de la vorticité 3.21 se réduit à :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \equiv \frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (6.33)$$

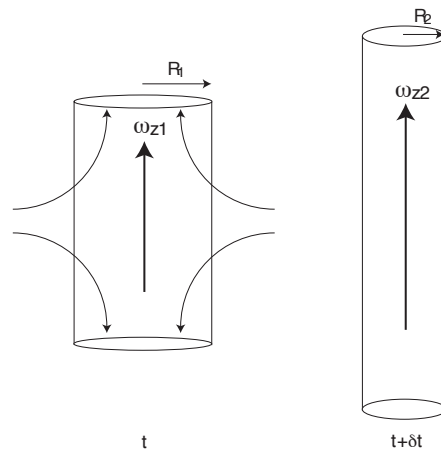


FIG. 6.10 – Amplification de la vorticité dans un écoulement élongationnel.

Considérons une situation très idéalisée du tourbillon de vidange (fig. 6.10) : on superpose un écoulement élongationnel axisymétrique avec un taux d'étirement k ($u_z = kz$, $u_r = -k/2r$, $u_\theta = 0$)

et un vortex suivant l'axe de symétrie ($\omega_z = \omega_{z1}, \omega_r = 0, \omega_{theta} = 0$). Dans cette situation, l'éqn. 6.33 nous montre que la seule contribution non nulle à l'évolution de ω est :

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = k\omega_z$$

. Après un temps δt , la vorticité a augment e de $k\omega_{z1}\delta t$.

Un élément de fluide cylindrique, centr e sur l'axe conserve son volume $\pi R^2 L$ au cours du temps de sorte que $dL/L = -2dR/R = k$. La conservation de la circulation associée au vortex sur le contour circulaire de rayon R implique la conservation du flux de vorticité sur le disque d'aire πR^2 , soit $d(\omega R^2) = 0$ qui conduit à $d\omega/\omega = -2dR/R = k$. On retrouve bien la variation relative de vorticité prévue par l'équation 6.33.

En l'absence de phénomène dissipatif (viscosité négligeable) et en l'absence d'autre source de vorticité, l'équation d'évolution de la vorticité et le théorème de Kelvin expriment la conservation du moment cinétique d'un élément de fluide (ce qui n'interdit pas la déformation de cet élément de fluide).

6.5 Surfaces portantes

Comme nous l'avons vu , la force de portance sur un corps solide en mouvement est liée à l'existence d'une circulation autour de ce corps. Nous pouvons dans certains cas calculer analytiquement l'écoulement potentiel autour de profils d'aile. Ces profils particulier sont obtenus par une transformation conforme de l'écoulement autour d'un cylindre. Sur les deux figures 6.11 et ?? sont repr esent es l'écoulement sans circulation et l'écoulement avec une valeur particulière de la circulation. Dans les deux cas l'angle d'incidence de l'écoulement moyen sur le profil est le même. En l'absence de circulation, notons que le point de stagnation arrière ne se trouve pas exactement sur le bord de fuite, mais sur la partie supérieure de l'aile. La ligne de courant située immédiatement en dessous de l'aile doit contourner très brusquement le bord de fuite aigu. Dans ces conditions, la vitesse et le gradient de vitesse divergent au bord de fuite. Evidemment, dans un écoulement réel où la viscosité est toujours présente, cette situation est impossible. Il se trouve que les effets visqueux imposent une vitesse finie, ainsi que l'égalité entre la vitesse sur l'extrados et sur l'intrados au voisinage immédiat du bord de fuite (condition de Kutta-Joukowski). La fig. ?? montre le même écoulement mais avec une circulation qui a été ajustée de telle manière que le point de stagnation arrière se trouve exactement au bord de fuite. Cette circulation dans le sens trigonométrique correspond à une force de portance dirigée vers le haut. On notera le resserrement très important des lignes de courant sur la partie supérieure, près du bord d'attaque. Cette accélération du fluide induit, selon la loi de Bernoulli, une dépression importante à la partie supérieure de l'aile.

Nous voyons sur la figure 6.12 la répartition de pression sur un profil d'aile réel, mesurée en soufflerie. Sur cette figure, la pression est normalisée par la pression dynamique $1/2\rho U^2$. Notons, qu'en valeur absolue, le changement de pression est nettement plus grand sur l'extrados (l'aile est « aspirée » vers le haut).

Lorsque la vitesse moyenne change ou bien lorsque l'incidence du profil est modifiée, la force de portance change. La circulation autour de l'aile doit donc changer. Or, d'après le théorème de Kelvin, si les effets visqueux sont négligeables, la circulation sur un contour qui suit le mouvement du fluide doit être constante. Le changement de circulation autour d'un profil portant doit s'accompagner d'un changement de circulation exactement oppos e dans le fluide qui est emport e dans le sillage du profil. Cette conservation globale de la circulation est illustrée sur la fig. 6.13.

Dans l'écoulement photographi e sur la fig. 6.13, la vitesse moyenne a été brusquement modifiée, ce qui a entra en e une modification de la circulation autour du profil d'aile. Pour compenser ce changement, un tourbillon de circulation opposée se crée au bord de fuite et se détache du profil. La circulation autour des deux rectangles noirs dessin es sur la fig. 6.13 (autour de l'aile et autour du tourbillon d etach e) est telle que la circulation globale est rest e constante pendant la modification

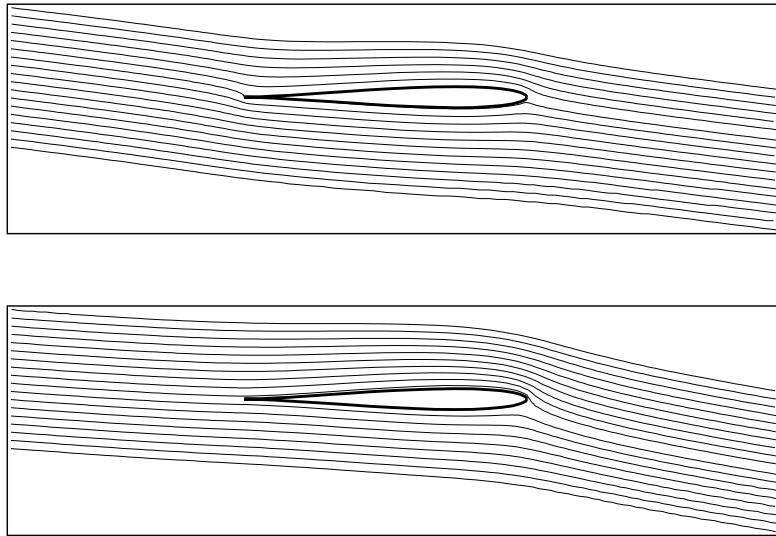


FIG. 6.11 – Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile, sans circulation (en haut) et avec une circulation assurant une vitesse finie au bord de fuite (en bas).

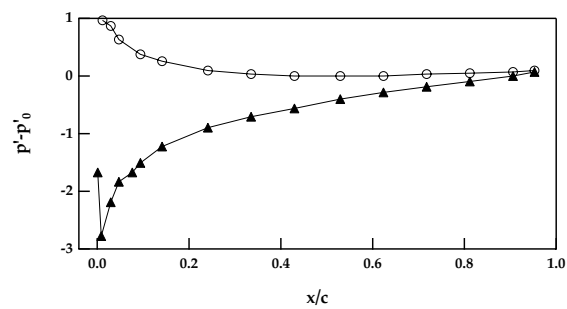


FIG. 6.12 – Répartition de pression sur un profil d'aile avec un angle d'incidence de 7° en fonction de la position le long du profil. c est la longueur du profil (corde). Cercles : pression sur l'intrados. Triangles : pression sur l'extrados.

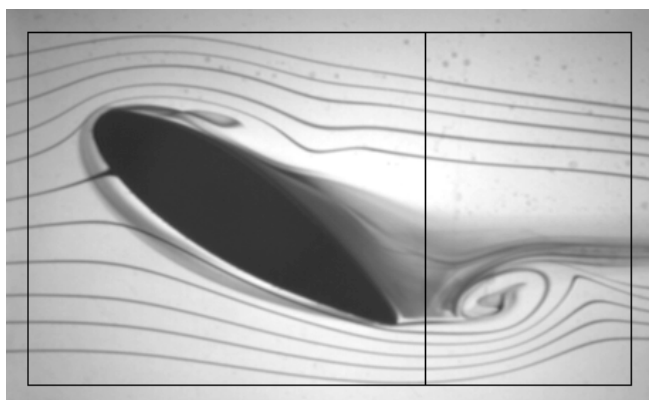


FIG. 6.13 – Visualisation par des filets colorés de l'écoulement autour d'un profil d'aile en incidence.

de l'écoulement moyen. Pour la même raison, lorsqu'un profil portant est mis en mouvement, il faut détacher un tourbillon derrière le profil afin de permettre l'établissement de la portance.