

# Chapitre 4

## LOIS DE CONSERVATION

### 4.1 Conservation de la quantité de mouvement

Nous avons jusqu'à présent écrit l'équation de mouvement des fluides à partir de l'équation fondamentale de la dynamique ainsi que l'équation de conservation de la masse. Nous allons maintenant réécrire ces équations sous une autre forme en considérant le bilan de quantité de mouvement dans un volume fermé du fluide.

#### 4.1.1 Conservation de la quantité de mouvement

Déterminons la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de fluide de volume unité, dont la masse est  $\rho$  :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (4.1)$$

et utilisons, d'une part, l'équation de mouvement (3.18)

qui relie l'accélération "particulaire"  $D\mathbf{u}/Dt$  aux forces en volume et aux contraintes ; l'équation 4.1 devient :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{div} \sigma + \mathbf{f} \quad (4.2)$$

D'autre part, réécrivons l'équation de conservation de la masse de cet élément de volume, sous la forme "lagrangienne" :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.3)$$

et 4.2 donne :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{div} \sigma + \mathbf{f} \quad (4.4)$$

soit, en notation indicielle pour la composante  $i$  :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} - \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (4.5)$$

ce qui donne, en regroupant les deux premiers termes du membre de droite :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho u_i u_j + \sigma_{ij}) + f_i \quad (4.6)$$

L'équation 4.6 n'est qu'une autre écriture de l'équation de mouvement. Elle ne fait aucune hypothèse quant à la compressibilité ou à la loi de comportement ; elle est valide dans toutes les circonstances. Le second membre de 4.6 fait apparaître la divergence du tenseur des contraintes

ainsi que la divergence du *flux convectif de quantité de mouvement*. L'expression  $\rho u_i u_j$  est en effet la quantité de mouvement dans la direction  $i$  qui traverse, par unité de temps, une surface unité dont la normale est parallèle à  $j$  et ce, uniquement sous l'effet de la convection du fluide. La somme de  $\rho u_i u_j$  et de  $\sigma_{ij}$  constitue le flux total de quantité de mouvement.

En pratique, l'équation de conservation de l'impulsion est surtout utilisée sous sa forme intégrale, que nous allons établir maintenant. Intégrons 4.6 sur un volume  $V$ , fixe par rapport au repère où est définie la vitesse eulérienne  $\mathbf{u}$ , en utilisant le théorème de la divergence :  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ . Nous obtenons :

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV = - \int_S (\rho u_i u_j - \sigma_{ij}) n_j dS + \int_V f_i dV$$

où  $S$  est la surface limitant le volume  $V$  et  $\mathbf{n}$  est la normale à  $S$ . Et, en utilisant le fait que le volume  $V$  est fixe dans l'espace, en séparant le tenseur des contraintes en une partie isotrope  $-p\delta_{ij}$  et un déviateur  $d_{ij}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho u_i dV \right) = - \int_S \rho u_i u_j n_j dS + \int_S d_{ij} n_j dS - \int_S p n_i dS + \int_V f_i dV \quad (4.7)$$

L'équation de conservation de l'impulsion prend une forme particulièrement simple lorsque l'écoulement est stationnaire et que la force en volume dérive d'un potentiel  $\phi$  (comme la gravité, par exemple). Alors, 4.7 devient :

$$\int_S \rho u_i u_j n_j dS = \int_S d_{ij} n_j dS - \int_S p n_i dS + \int_S \phi n_i dS \quad (4.8)$$

qui exprime un équilibre entre, d'une part, le flux convectif de quantité de mouvement à travers la surface  $S$  et, d'autre part, l'intégrale des contraintes dûes à la présence du fluide extérieur au volume  $V$  et l'intégrale sur  $S$  du potentiel équivalent au champ de force. Nous verrons qu'un choix judicieux du volume de contrôle  $V$  permet d'estimer très simplement la force sur des objets placés au contact d'un écoulement. L'équation de conservation sous la forme 4.8 ne fait intervenir que des quantités calculées sur la surface limitant le volume de contrôle ; il est inutile de connaître le champ de vitesse et le champ de pression à l'intérieur de  $V$ .

#### 4.1.2 Exemple d'application de la conservation de la quantité de mouvement : force exercée par l'écoulement sur une conduite coudée

Considérons l'écoulement dans une conduite présentant un coude progressif d'angle  $\alpha$ . Nous supposons ici que l'écoulement est à un nombre de Reynolds suffisant pour que les effets visqueux soient négligeables. De plus, nous supposons que le profil de vitesse est plat dans les sections droites du tube, ce qui effectivement observé à grand nombre de Reynolds. Nous cherchons la force exercée par l'écoulement sur la conduite. Cette force  $\mathbf{F}$  est l'intégrale des contraintes sur la surface intérieure de la conduite  $S_i$ , soit :  $\mathbf{F} = \int_{S_i} -p \tilde{\mathbf{n}} dS$  où  $\tilde{\mathbf{n}}$  est un vecteur unitaire normal à  $S_i$  et orienté vers le fluide.

Pour calculer  $\mathbf{F}$ , appliquons la loi de conservation de l'impulsion sur un volume de contrôle délimité par la surface intérieure de la conduite  $S_i$  et par deux sections droites  $S_1$  et  $S_2$  placées en amont et en aval du coude, soit, en négligeant le poids du liquide contenu dans le tube :

$$\int_S \rho u_i u_j n_j dS = - \int_S p n_i dS$$

où  $S$  est la réunion de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_i$ . Soit encore, puisque les vecteurs unitaires  $\mathbf{n}$  sont orientés vers l'extérieur du volume de contrôle ( $\mathbf{n} = -\tilde{\mathbf{n}}$ ) :

$$\int_S \rho u_i u_j n_j dS = - \int_{S_1} p n_i dS - \int_{S_2} p n_i dS - F_i \quad (4.9)$$

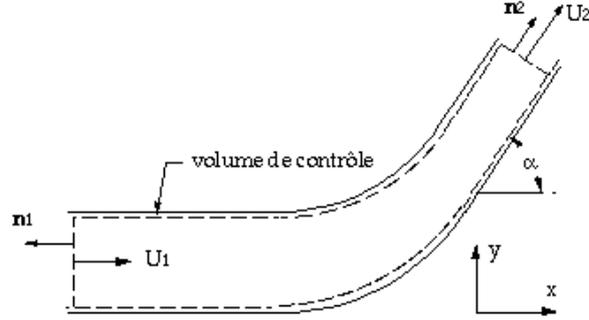


FIG. 4.1 – Ecoulement dans une conduite coudée. Le volume de contrôle utilisé pour appliquer la conservation de l'impulsion est limité par le trait pointillé.

Les normales à  $S_1$  et  $S_2$  ont pour composantes respectives :  $(-1,0)$  et  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . La composante suivant  $x$  de l'équation de conservation est :

$$\rho(-U_1^2 S_1 + U_2^2 S_2 \cos \alpha) = p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \alpha - F_x \quad (4.10)$$

et la composant suivant  $y$  est :

$$\rho U_2^2 \sin \alpha = -p_2 S_2 \sin \alpha - F_y \quad (4.11)$$

Il faut ajouter à ces deux équations la conservation du débit :  $U_1 S_1 = U_2 S_2$ , ce qui donne :

$$F_x = p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \alpha + \rho U_2 S_2 (U_1 - U_2 \cos \alpha) \quad (4.12)$$

$$F_y = -(\rho U_2^2 + p_2) S_2 \sin \alpha \quad (4.13)$$

Si l'entrée et la sortie du coude ont la même section :  $S_1 = S_2 = \Sigma$  et  $U_1 = U_2 = U$ , alors les équations 4.13 deviennent :

$$F_x = \Sigma [p_1 - p_2 \cos \alpha + \rho U^2 (1 - \cos \alpha)] \quad (4.14)$$

$$F_y = -\Sigma (\rho U^2 + p_2) \sin \alpha \quad (4.15)$$

La composante de force  $F_y$  est celle qui permet la mise en mouvement des arroseurs rotatifs qui sont faits de deux tubes coudés à leur extrémité et montés sur un axe de rotation vertical. Lorsque les canalisations sont de grande dimensions et que le débit est très important comme c'est le cas dans les conduites forcées d'usines hydroélectriques, les forces exercées sur un coude de la canalisation peuvent être considérables. C'est pourquoi les conduites forcées sont ancrées par des ouvrages de béton.

## 4.2 Conservation de l'énergie

### 4.2.1 Loi d'évolution de l'énergie cinétique

De la même manière que pour le bilan de quantité de mouvement, nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse  $\rho$ , en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (4.16)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (4.16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (4.17)$$

soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope  $-p\delta_{ij}$  et en un déviateur  $d_{ij}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \frac{\partial u_i d_{ij}}{\partial x_j} - d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (4.18)$$

ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (4.19)$$

Enfin, en tenant compte de la condition d'incompressibilité ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (4.19) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[ \mathbf{u} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{d} \right] - \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (4.20)$$

Réécrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume  $V$  fixe dans le repère "eulérien" et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V e_c dV \right) = - \int_S \frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\sigma \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_V \sigma \cdot \nabla \mathbf{u} dV \quad (4.21)$$

Quelle est la signification physique des différents termes de 4.21 :

- le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique "convectée" par l'écoulement à travers la surface  $S$ .
- le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface  $S$ .
- le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
- enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume  $V$ . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

## 4.2.2 Dissipation d'énergie par viscosité

Afin de mieux comprendre la signification des deux termes qui font intervenir le tenseur des contraintes dans 4.21, considérons le cas d'un écoulement unidimensionnel où seule la composante  $u_x$  de la vitesse est non nulle. Ecrivons le travail *par unité de temps*  $\delta W$  des forces qui s'exercent sur un élément de volume rectangulaire dont les dimensions sont  $dx$  et  $dy$  : il faut tenir compte de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$  sur les faces supérieure et inférieure et de la contrainte normale  $\sigma_{xx} = -p$  sur les faces droite et gauche.

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial x} (-p u_x) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u_x) dy dx \quad (4.22)$$

soit, en tenant compte de la condition d'incompressibilité qui s'écrit ici :  $\partial u_x / \partial x = 0$  et en exprimant le travail  $W$  par unité de volume :

$$W = -u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4.23)$$

Or l'équation de mouvement, dans ce cas précis, s'écrit :

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

(il n'y a pas de force en volume et la condition d'incompressibilité fait que le terme non-linéaire  $u \cdot \nabla u$  est nul), ce qui conduit à :

$$W = \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u_x^2}{2} \right) + \sigma_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4.24)$$

Le travail des forces exercées sur l'élément de volume comprend deux termes : le premier est lié à la variation d'énergie cinétique et à l'accélération globale de cet élément, le second correspond à l'accroissement d'énergie interne qui résulte de la dissipation d'énergie par viscosité. Cette énergie dissipée provient du travail des contraintes de cisaillement lors de la déformation de l'élément de fluide ; c'est pourquoi ce terme fait apparaître explicitement le gradient de vitesse. En revanche, l'autre terme de l'équation 4.24 dans lequel apparaissent les contraintes de cisaillement contribue à l'accélération globale. Ce terme fait apparaître la différence de valeur de la contrainte de cisaillement sur les deux faces de l'élément distantes de  $dy$ . Dans le cas où le fluide est newtonien et incompressible, le déviateur des contraintes s'écrit :  $d_{ij} = 2\eta e_{ij}$  et la puissance dissipée par viscosité est, d'après l'équation 4.21, par unité de volume :

$$E_{dis} = 2\eta e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

En tenant compte de la symétrie du tenseur des taux de déformation  $e_{ij}$ , l'expression 4.24 se transforme en :

$$E_{dis} = 2\eta e_{ij} e_{ij} \quad (4.26)$$

Dans le cas où il y a une seule composante non nulle du gradient de vitesse comme dans l'écoulement de cisaillement simple, l'expression 4.26 exprime simplement le fait que la puissance dissipée par unité de volume est le produit de la viscosité dynamique par le carré du gradient de vitesse.

L'énergie dissipée par viscosité contribue finalement à élever (très peu) la température du fluide. Prenons par exemple un gradient de vitesse de  $100 \text{ s}^{-1}$  (variation de  $1\text{m/s}$  sur  $1\text{cm}$ ) dans l'eau : la puissance dissipée par unité de volume est  $10 \text{ W/m}^3$ . Si aucune énergie n'était rayonnée par le fluide ou échangée avec les parois contenant l'écoulement, cet apport d'énergie conduirait à une élévation de température de environ  $2\text{mK}$  par s.

Pour déterminer correctement la répartition de température dans le fluide, il faudrait rajouter dans le bilan énergétique des termes de transport de la chaleur dus à l'advection et au rayonnement.

### 4.2.3 Loi de Bernoulli

#### Loi de Bernoulli

L'équation de conservation de l'énergie prend une forme particulièrement simple lorsqu'il est possible de négliger les effets de viscosité et lorsque les forces en volume dérivent d'un potentiel  $\phi$ , tel que :  $\mathbf{f} = -\nabla\phi$ . En partant de l'équation (4.19) et en posant  $d = 0$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + \phi \right) \quad (4.27)$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire, la dérivée eulérienne de l'énergie cinétique est nulle. Ce qui veut dire que la gradient de la quantité  $H = \rho u^2/2 + p + \phi$  est partout orthogonal au vecteur vitesse. Donc, si on se déplace en suivant une particule de fluide le long d'une ligne de courant, la quantité  $H$ , qui est l'équivalent d'une intégrale première en mécanique du point matériel, est constante. Cette relation est connue sous le nom de *loi de Bernoulli* :

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \phi = C^{te} \text{ le long d'une ligne de courant} \quad (4.28)$$

Si la seule force en volume présente est la gravité,  $\phi = \rho g z$  et l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \rho g z = C^{te} \quad (4.29)$$

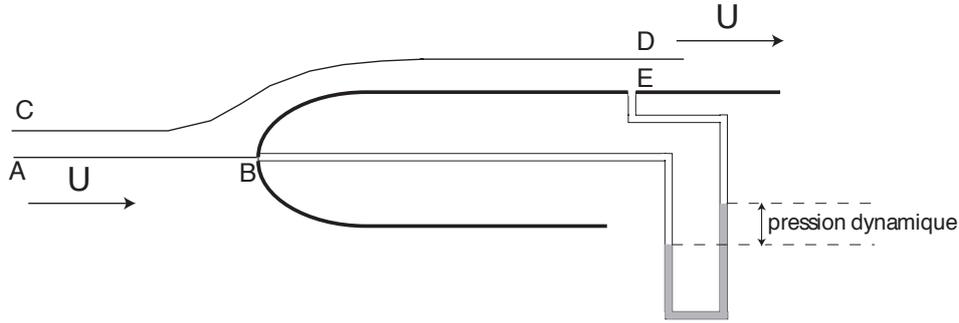


FIG. 4.2 – Schéma d'un tube de Pitot.

### Tube de Pitot

Parmi les dispositifs qui utilisent les variations de pression décrites par la loi de Bernoulli se trouve le tube de Pitot qui permet de mesurer la vitesse d'un écoulement de gaz. Le tube de Pitot est représenté schématiquement sur la fig. 4.2 ; il se compose d'un tube de section circulaire dont l'extrémité est profilée. Deux trous sont percés dans le tube pour mesurer la pression, d'une part sur le nez du tube et, d'autre part, sur le corps cylindrique du tube. Les deux prises de pression sont reliées à un manomètre différentiel.

Nous supposons que l'écoulement loin du tube est uniforme, avec une vitesse  $U$  et que l'axe du tube est parallèle à  $U$ . Par raison de symétrie, il existe une ligne de courant, confondue avec l'axe du tube qui se termine au point B. Ce point B est un point de stagnation, la vitesse du fluide y est nulle, même dans l'hypothèse où le fluide est parfait. Appliquons la loi de Bernoulli entre le point A, situé loin du tube, où la vitesse est égale à  $U$  et le point B où la vitesse est nulle :

$$p_A + \rho U^2/2 = p_B \quad (4.30)$$

La pression de stagnation (en B) est supérieure à la pression qui règne au sein de l'écoulement. La différence est la quantité  $1/2\rho U^2$  que l'on nomme la *pression dynamique*. Autour du point A, l'écoulement n'est pas perturbé par le tube et les lignes de courant sont parallèles. Il y a une seule composante de vitesse le long de l'axe  $x$ . Si nous utilisons l'équation de mouvement (même en tenant compte des effets visqueux), elle donne sur les axes orthogonaux à  $x$  :  $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$ .

Dans un écoulement unidimensionnel, il n'y a pas de gradient de pression perpendiculairement aux lignes de courant. En conséquence, dans l'écoulement qui nous intéresse ici :  $p_C = p_A$ . Parce que l'extrémité du tube de Pitot est profilée, l'écoulement est peu perturbé par le tube et, le long du tube, les lignes de courant restent parallèles à la direction moyenne de l'écoulement. Pour la raison exposée ci-dessus, la pression au point E, sur le tube, est la même que la pression au point D. La vitesse en E est nulle du fait de la viscosité du fluide. Nous verrons plus loin que, dans certains cas, les effets visqueux ne sont ressentis que dans une mince couche près d'une paroi solide, la couche limite. Pour le tube de Pitot, nous nous trouvons dans cette situation et si nous choisissons le point D en dehors de la couche limite, nous pouvons appliquer la loi de Bernoulli entre C et D :

$$p_C + \rho U^2/2 = p_D + \rho U^2/2 \quad (4.31)$$

Le manomètre différentiel mesure l'écart de pression entre B et E qui est, compte tenu des relations établies ci-dessus :  $\Delta p = 1/2\rho U^2$ . Le tube de Pitot donne accès à la pression dynamique qui varie proportionnellement au carré de la vitesse.

### Loi de Bernoulli en écoulement potentiel

La loi de Bernoulli prend une forme particulière lorsque le champ de vitesse dérive d'un potentiel  $\Phi$ . Pour la retrouver, nous allons partir de l'équation d'Euler qui est l'équation de mouvement des



FIG. 4.3 – Ressaut hydraulique circulaire formé sur une surface plane à partir du jet d'un robinet

fluides non visqueux :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (4.32)$$

L'équation d'Euler est identique à l'équation de Navier-Stokes à ceci-près que le terme proportionnel à la viscosité a disparu. Si les forces en volume dérivent d'un potentiel  $-\phi$ , l'équation d'Euler devient :

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla(p + \phi) \quad (4.33)$$

En utilisant le fait que :  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}$  et que le champ de vitesse est irrotationnel, l'équation (4.33) devient :

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + p + \phi \right) = 0 \quad (4.34)$$

c'est-à-dire que la quantité :  $\rho \partial \Phi / \partial t + \rho u^2 / 2 + p + \phi$  est constante dans tout l'écoulement. Si l'écoulement est stationnaire, on retrouve la loi de Bernoulli (4.28) mais généralisée à l'ensemble de l'écoulement du fait du caractère irrotationnel de l'écoulement.

## 4.3 Applications des lois de conservation

### 4.3.1 Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique est un phénomène qui se manifeste dans les écoulements à surface libre et qu'il est très facile d'observer dans un évier à fond bien plat. Lorsque le jet d'eau sortant du robinet touche la surface de l'évier, le jet s'étale en une nappe circulaire (fig. 4.3) . Si l'on choisit bien le débit, la nappe d'eau change brusquement d'épaisseur à une distance du centre de l'ordre d'une dizaine de cm. La zone centrale de la nappe est plus mince que la zone externe ; sa surface apparaît également beaucoup plus lisse. Ce brusque changement d'épaisseur est le "ressaut hydraulique". Ce phénomène est couramment observé en aval des déversoirs de barrage. L'origine physique du ressaut est liée aux ondes de surface qui se propagent à la surface de l'eau. Lorsque l'épaisseur d'eau est très faible, c'est-à-dire beaucoup plus petite que la longueur d'onde des ondes de surface, la vitesse de propagation des ondes est  $\sqrt{gh}$ , où  $h$  est la hauteur d'eau. L'épaisseur de la nappe d'eau qui s'étale est constante. La conservation du débit impose alors que la vitesse

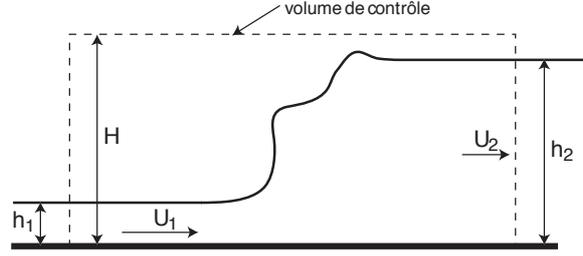


FIG. 4.4 – Ressaut hydraulique. Volume de contrôle utilisé pour la conservation de l'impulsion.

décroisse de façon inversement proportionnelle au rayon. Si la vitesse au centre est supérieure à la vitesse de propagation, il existe un rayon critique au-delà duquel la vitesse devient inférieure à la vitesse de propagation. Ce rayon critique correspond à la position du ressaut. On appelle nombre de Froude, le carré du rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse de propagation des ondes de surface :  $Fr = U^2/gh$ . Au franchissement du ressaut, le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à 1 à une valeur inférieure à 1.

Afin de préciser les relations existant entre les hauteurs d'eau et vitesses en amont et en aval du ressaut, nous considérons le cas d'un écoulement unidirectionnel et non plus axisymétrique. Appliquons la relation de conservation de l'impulsion à un volume de contrôle qui englobe le ressaut (fig. 4.4). Si nous négligeons les effets dûs à la viscosité, il suffit d'écrire l'égalité entre l'intégrale du flux convectif de quantité de mouvement  $\rho u_i u_j$  et l'intégrale de la pression sur la surface limitant le volume de contrôle. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'assez loin en amont et en aval du ressaut, le champ de vitesse est unidirectionnel : la composante verticale de vitesse est nulle. Donc, l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe vertical se réduit à l'équation de l'hydrostatique. Dans la section 1 de l'écoulement :  $p_1 = p_0 + \rho g(h_1 - z)$  et dans la section 2 :  $p_2 = p_0 + \rho g(h_2 - z)$ , où  $p_0$  est la pression atmosphérique.

La conservation de l'impulsion impose donc :

$$-\rho U_1^2 h_1 + \rho U_2^2 h_2 = \int_0^H p_1(z) dz - \int_0^H p_2(z) dz \quad (4.35)$$

soit :

$$\rho(U_2^2 h_2 - U_1^2 h_1) = p_0(H - h_1) + p_0 h_1 + \rho g \frac{h_1^2}{2} - p_0(H - h_2) - p_0 h_2 + \rho g \frac{h_2^2}{2} \quad (4.36)$$

soit, encore :

$$\rho(U_2^2 h_2 - U_1^2 h_1) = \rho g \left( \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) \quad (4.37)$$

En tenant compte de la conservation du débit :  $U_1 h_1 = U_2 h_2$ , l'équation (4.37) devient :

$$U_1^2 = \frac{g h_2}{2 h_1} (h_1 + h_2) \quad (4.38)$$

avec une formule similaire pour  $U_2$ , en intervertissant les indices. Supposons que la hauteur  $h_2$  soit supérieure à  $h_1$  et comparons la vitesse  $U_1$  donnée par (4.38) à la vitesse de propagation des ondes de surface dans la section 1,  $\sqrt{gh_1}$  :

$$U_1^2 = gh_1 \left[ \frac{h_2}{2h_1} \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \right] \quad (4.39)$$

Si  $h_2 > h_1$ , nous voyons immédiatement que  $U_1$  est supérieur à la vitesse de propagation des ondes. Un calcul similaire nous montrerait que  $U_2$  est inférieur à  $\sqrt{gh_2}$ . L'écoulement en amont du ressaut est supercritique alors que l'écoulement en aval est sous-critique. Ceci explique que les perturbations de surface en amont ne peuvent se propager que vers le ressaut, alors qu'en aval, elles peuvent se propager dans les deux directions. Le ressaut constitue un "point d'accumulation" pour les ondes de surface.

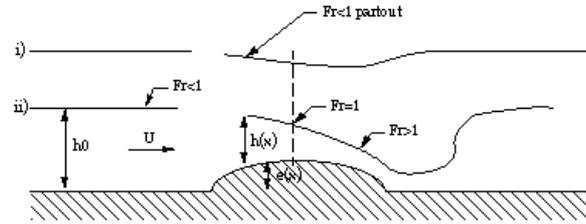


FIG. 4.5 – Écoulement dans un canal au-dessus d'un obstacle.

### 4.3.2 Écoulement à surface libre au-dessus d'un obstacle

L'application de la relation de Bernoulli va nous permettre d'étudier la déflexion de la surface libre d'un écoulement dans un canal, lorsqu'une surélévation est placée dans le fond du canal. Nous supposons que les effets visqueux sont négligeables et que la vitesse du fluide est la même sur toute la hauteur du canal. Notons  $U_0$  et  $h_0$  la vitesse et l'épaisseur de l'écoulement loin en amont de l'obstacle ;  $U(x)$ ,  $h(x)$  et  $e(x)$  sont respectivement la vitesse du fluide, l'épaisseur de l'écoulement et la hauteur de l'obstacle en fonction de la position le long de l'écoulement.

La conservation du débit impose :  $U(x)h(x) = U_0h_0$  soit :

$$U \frac{dh}{dx} + h \frac{dU}{dx} = 0 \quad (4.40)$$

La relation de Bernoulli appliquée sur la surface libre donne :

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g (h + e) \quad (4.41)$$

soit, en dérivant par rapport à  $x$  et en utilisant la conservation du débit :

$$U \frac{dU}{dx} + g \left( -\frac{h}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{de}{dx} \right) = 0 \quad (4.42)$$

ou bien, en mettant en évidence l'écart entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse des ondes de surface :

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (U^2 - gh) = -g \frac{de}{dx} \quad (4.43)$$

Au point où l'obstacle est le plus haut, c'est-à-dire où  $de/dx = 0$ , l'équation (4.43) peut être satisfaite soit i) en annulant la dérivée de la vitesse, soit ii) en annulant  $U^2 - gh$ . Supposons maintenant que l'écoulement en amont de l'obstacle soit sous-critique ( $U_0^2 < gh_0$ ) et examinons les signes des différents termes de l'équation (4.43) qui sont imposés par la forme de l'obstacle :  $de/dx$  est d'abord positif, puis nul, puis négatif.

$de/dx$	$(U^2 - gh)dU/dx$	i)			ii)		
		$U^2 - gh$	$dU/dx$	$dh/dx$	$U^2 - gh$	$dU/dx$	$dh/dx$
+	-	-	+	-	-	+	-
0	0	-	0	0	0	+	-
-	+	-	-	+	+	+	-

D'après les résultats indiqués dans le tableau ci-dessus, nous voyons que dans le premier cas, l'écoulement reste sous-critique, l'épaisseur de la couche de la fluide diminue puis réaugmente et l'écoulement s'accélère sur la face amont de l'obstacle. En revanche, dans le second cas, la vitesse augmente suffisamment pour que l'écoulement devienne supercritique en aval de l'obstacle. La vitesse continue à augmenter en aval de l'obstacle. Plus loin en aval, l'écoulement subit un ressaut hydraulique qui lui permet de redevenir sous-critique.

Il existe une analogie entre ces écoulements à surface libre, en "eau peu profonde" où la vitesse de propagation des ondes est liée à la hauteur d'eau et les écoulements de fluides compressibles dans des tuyères. La densité du fluide joue alors le rôle de la hauteur d'eau et le nombre de Mach, qui est le rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son, joue le même rôle que le nombre de Froude. Si l'écoulement est subsonique ( $M < 1$ ) en amont du col de la tuyère, on peut avoir une onde de choc localisée au col de la tuyère.