

## Chapitre 3

# DYNAMIQUE

### 3.1 Forces de surface et tenseur des contraintes

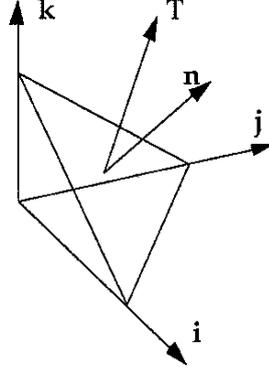
Avant d'écrire l'équation qui régit la dynamique des fluides, il est nécessaire de préciser la définition des forces de surface et des contraintes. Il est possible de classer les forces qui s'exercent sur la matière en deux catégories selon leur portée. Il est clair que la gravité s'exerce sur des distances extrêmement grandes devant les dimensions moléculaires et, de ce fait, la force de gravité sur un élément de volume est proportionnelle à son volume. La gravité est, pour la mécanique des milieux continus, une force en volume. En revanche, les interactions moléculaires qui assurent la cohésion d'un liquide ont une portée à peine plus grande que les dimensions moléculaires (bien que ces interactions soient d'origine électromagnétique). Ces interactions à courte portée ne vont donc concerner qu'une mince couche externe, sur un élément de volume donné. La force globale exercée par ces interactions à courte portée est proportionnelle à l'aire de la surface limitant l'élément de fluide et elle est indépendante de son volume. Il en est ainsi du transport de quantité de mouvement que nous avons invoqué au moment de l'introduction de la viscosité : ce transport de quantité de mouvement résulte des interactions directes entre molécules ou atomes voisins dans le fluide, et non pas d'une interaction à longue portée à travers le fluide. L'existence de la viscosité se manifeste par des forces de surface.

#### 3.1.1 Représentation des forces de surface par le tenseur des contraintes

Considérons un élément de surface  $\delta A$  au sein du fluide, défini par son vecteur normal  $\mathbf{n}$ . Les forces exercées par le fluide se trouvant d'un côté de la surface sur le fluide se trouvant de l'autre côté ont une résultante que nous notons  $\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A$ . Par convention,  $\mathbf{T}$  est la contrainte exercée par le fluide vers lequel pointe la normale  $\mathbf{n}$ . Ainsi, une contrainte positive représente une tension et une contrainte négative une compression.

Considérons un tétraèdre dont trois des faces ont pour vecteur normal les vecteurs unitaires des axes de coordonnées  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$ . La quatrième face a un vecteur normal  $\mathbf{n}$ . La résultante des forces de surface sur ce tétraèdre est :  $\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A + \mathbf{T}(-\mathbf{i})\delta A_1 + \mathbf{T}(-\mathbf{j})\delta A_2 + \mathbf{T}(-\mathbf{k})\delta A_3$ . Les signes - qui apparaissent devant  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  proviennent du fait qu'il faut considérer la normale dirigée vers l'extérieur du tétraèdre. Ensuite, tenons compte du fait que les facettes  $\delta A_1, \delta A_2,$  et  $\delta A_3$  sont des projections de  $\delta A$ , soit :  $\delta A_1 = \delta A \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}$  et que  $\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n})$ . La résultante des forces devient donc :  $[\mathbf{T}(\mathbf{n}) - \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{i}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{j}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{k})]\delta A$ . L'équation de la dynamique pour ce tétraèdre s'écrit : masse  $\times$  accélération = somme des forces de volume + somme des forces de surface. Si on fait tendre les dimensions linéaires du tétraèdre vers 0, les deux premiers termes de l'équation de mouvement tendent vers 0 comme  $\delta V \propto \delta A^{3/2}$ . L'égalité est respectée quel que soit  $\delta V$  seulement si le coefficient de  $\delta A$  est nul, soit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{i}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{j}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{k}) \quad (3.1)$$

FIG. 3.1 – vecteur contrainte  $\mathbf{T}$  sur une facette de normale  $\mathbf{n}$ 

et, en considérant uniquement la composante selon l'axe  $x$  :

$$T_x(\mathbf{n}) = n_x T_x(\mathbf{i}) + n_y T_x(\mathbf{j}) + n_z T_x(\mathbf{k}) \quad (3.2)$$

Dans cette expression,  $T_x(\mathbf{j})$  est la composante suivant l'axe  $x$  du vecteur contrainte qui s'exerce sur une facette de normale  $\mathbf{j}$ . Toutes les composantes de ce type constituent un tenseur d'ordre deux, le tenseur des contraintes. L'équation 3.1 peut s'écrire également :

$$T_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (3.3)$$

où les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes ; dans le membre de droite de (3.3), on utilise la convention de sommation d'Einstein : lorsque le même indice est répété, on effectue la somme sur toutes les valeurs possible de cet indice (par exemple, le produit scalaire  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  s'écrit :  $a_i b_i$ ). Les composantes diagonales du tenseur sont les *contraintes normales* alors que les composantes hors diagonale sont les *contraintes tangentielles*, ou *contraintes de cisaillement*.

Les composantes du tenseur des contraintes ne sont pas indépendantes. Considérons un petit élément de volume parallélépipédique, dont les dimensions sont  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Ecrivons le couple exercé par les contraintes sur cet élément de volume et, en particulier, la composante suivant l'axe  $z$  :  $\Gamma_z = \sigma_{xy}(dydz)dx - \sigma_{yx}(dxdz)dy = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\delta V$ . L'équation de mouvement, en rotation, pour le petit élément de volume est :

$$\delta I \frac{d\omega}{dt} = \Gamma$$

où  $\delta I$  est le moment d'inertie dont l'ordre de grandeur est  $\delta V^{5/3}$ . Si on fait tendre les dimensions linéaires de l'élément de volume vers 0, pour que son accélération angulaire reste finie, il est nécessaire que  $\Gamma_z$  soit nul, ce qui impose :  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Il est évidemment possible de faire le même raisonnement sur les autres composantes du couple. On en déduit que le tenseur des contraintes est symétrique :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Il n'y a donc que six composantes indépendantes. Il faut noter que cette symétrie n'est pas une propriété générale : par exemple, le tenseur des contraintes n'est pas symétrique dans un matériau magnétique, en présence d'un champ.

### 3.1.2 Tenseur des contraintes dans un fluide en mouvement

Dans un fluide au repos, le tenseur des contraintes est isotrope et il n'y a pas de contraintes tangentielles. Sur chacun des axes la contrainte  $\sigma$  normale est l'opposé de la pression :  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$ . La contribution de la pression est négative, parce que le fluide est en compression (une contrainte normale positive représente une traction). La pression ainsi définie est identique à la pression au sens thermodynamique et elle peut être définie à partir de l'équation d'état du fluide.

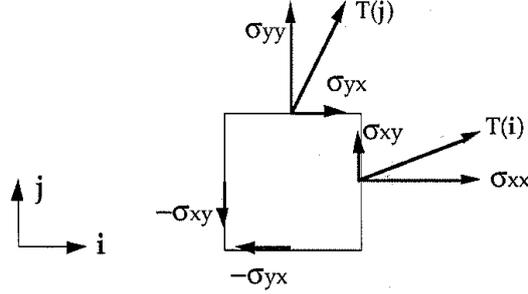


FIG. 3.2 – Vecteurs contraintes et contraintes sur les facettes orientées perpendiculairement aux vecteurs  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$ .

Dans un fluide en mouvement, nous pouvons décomposer le tenseur des contraintes en la somme d'une contribution isotrope, que nous continuons à appeler pression  $p$ , et d'une contribution anisotrope, due à la viscosité du fluide, soit, pour la composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur :  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}$ . La contribution anisotrope  $d_{ij}$  est également appelé *déviateur*. L'établissement des relations entre les contraintes et les déformations ou vitesses de déformation constituent la discipline appelée *rhéologie* (du grec  $\rho\epsilon\iota\nu =$  couler). Les comportements mécaniques des fluides peuvent être très complexes, en particulier pour ceux contenant des macromolécules (voir annexe A). Néanmoins, la grande majorité des fluides simples comme l'eau ou l'air ont un comportement dit *newtonien*, caractérisé uniquement par un coefficient de viscosité que nous avons introduit précédemment. L'écoulement macroscopique du fluide constitue une petite perturbation de l'équilibre thermodynamique et les vitesses mises en jeu sont, en général, petites devant la vitesse d'agitation moléculaire. De ce fait, on peut supposer que les contraintes engendrées par l'écoulement sont des fonctions linéaires du gradient de vitesse. C'est nécessairement le gradient de vitesse qui intervient et non la vitesse elle-même : dans un écoulement uniforme, il n'y a pas de mouvement relatif et pas de déformation des éléments de fluide. Cette hypothèse de linéarité conduit à la relation générale suivante :

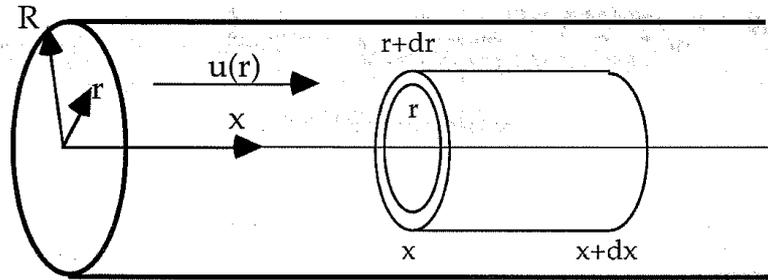
$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (3.4)$$

où  $A_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre quatre qui représente les propriétés physiques du fluide. En tenant compte du caractère isotrope du fluide (les propriétés physiques ne dépendent pas de l'orientation), on peut montrer que le déviateur du tenseur des contraintes s'exprime sous la forme suivante :

$$d_{ij} = 2K \left( e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.5)$$

où  $e_{ij}$  est le tenseur des vitesses de déformation qui n'est autre que la partie symétrique du gradient de vitesse :  $e_{ij} = 1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  et  $e_{kk} = \text{div} \mathbf{u}$  est la trace de ce tenseur. Le terme entre parenthèses dans 3.5 est le déviateur du tenseur des vitesses de déformation. Le coefficient  $K$  qui apparaît dans 3.5 est la viscosité dynamique  $\eta$  introduite précédemment. En effet, considérons l'écoulement de cisaillement simple (voir fig. 1.6) où seule la composante  $\partial u_x/\partial y$  du gradient de vitesse est non nulle. La seule composante du taux de déformation non nulle est :  $e_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y}$  et sa trace est nulle :  $e_{kk} = 0$ . La relation 3.5 donne la contrainte de cisaillement :  $\sigma_{xy} = K \frac{\partial u_x}{\partial y}$ . Cette dernière relation est précisément celle que nous avons utilisé pour définir la viscosité dynamique (§ 1.4). Seule la partie symétrique du gradient de vitesse apparaît dans la relation constitutive 3.5. En effet, ainsi que nous l'avons vu dans la partie 2.7, la partie antisymétrique correspond à une rotation en bloc, sans déformation. Lorsque le fluide est incompressible,  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  et la relation 3.5 conduit à l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (3.6)$$

FIG. 3.3 – Écoulement dans un tube de rayon  $R$ .

Notons qu'avec la décomposition du tenseur des contraintes en une partie isotrope  $-p$  et un déviateur, nous avons "caché" dans la pression toutes les contraintes qui pourraient résulter d'une expansion ou compression isotrope. De telles contraintes existent et sont proportionnelles à un coefficient de *viscosité de compression*  $\kappa$  (par opposition à la *viscosité de cisaillement*  $\eta$ ). Ces contraintes sont à l'origine de l'atténuation des ondes sonores. Nous nous limiterons ici à l'étude d'écoulements où les effets de compressibilité sont négligeables et nous pourrions donc ignorer l'existence de ce second coefficient de viscosité et, dans la plupart des cas, utiliser la relation 3.6 pour évaluer les contraintes au sein du fluide.

## 3.2 Introduction de l'équation de mouvement sur des écoulements simples

### 3.2.1 Écoulement dans un tube (écoulement de Poiseuille)

L'écoulement dans un tube de section circulaire est évidemment très fréquemment utilisé pour l'acheminement des fluides, depuis les tuyaux de chauffage central jusqu'aux vaisseaux sanguins. Le profil de vitesse et le champ de pression peuvent être obtenus simplement avec quelques hypothèses. Considérons la géométrie idéale d'un tube rectiligne, de rayon  $R$ , dont la longueur  $L$  est très grande devant le rayon. La condition  $L \gg R$  permet de négliger les perturbations introduites par les extrémités du tube et de raisonner comme si le tube était de longueur infinie. Choisissons des coordonnées cylindriques :  $x$  le long de l'axe du tube,  $r$  est la coordonnée radiale et  $\theta$  l'angle azimuthal. La symétrie du problème suggère de chercher un champ de vitesse qui soit indépendant de  $\theta$  et qui soit orienté suivant l'axe du tube, soit un champ de vitesse unidimensionnel :  $u_\theta = 0, u_r = 0, u = u_x(x, r)$ . Si le fluide est incompressible, la condition de conservation de la masse s'écrit :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Dans le cas présent, une seule composante de la vitesse est non nulle et cette condition devient :  $\partial u_x / \partial x = 0$ . Le champ de vitesse ne dépend donc que de la coordonnée radiale  $r$ . Les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse ; elles sont donc aussi indépendantes de la coordonnée axiale  $x$ .

Dans un fluide visqueux, la présence de la paroi solide impose que la vitesse s'annule sur cette paroi, soit  $u(R) = 0$ . Nous comprenons intuitivement que la vitesse du fluide va augmenter progressivement depuis la paroi vers le centre du tube. La répartition radiale de vitesse est obtenue en écrivant l'équilibre des forces sur un élément de volume annulaire. Cet élément de volume, représenté sur la fig. 3.3 est délimité par les cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$  et par les plans d'abscisse  $x$  et  $x + dx$ .

Les forces qui s'exercent sur cet élément de volume, suivant l'axe du tube, sont :

- la pression sur les faces perpendiculaires à l'axe :

$$p(x, r)2\pi r dr - p(x + dx, r)2\pi r dr = -\frac{\partial p}{\partial x}2\pi r dr dx$$

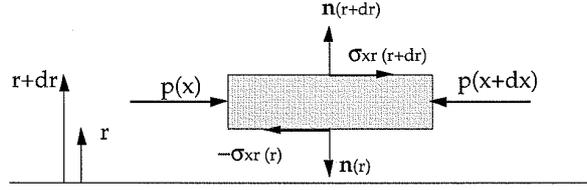


FIG. 3.4 – Contraintes sur l'élément de volume annulaire dans l'écoulement de Poiseuille.

– les contraintes de cisaillement  $\sigma_{rx}$  sur les surfaces cylindriques :

$$\sigma_{rx}(r+dr)2\pi(r+dr)dx - \sigma_{rx}(r)2\pi r dx = 2\pi \frac{\partial(r\sigma_{rx})}{\partial r} dr dx$$

Notons que le signe des forces tangentées est imposé par le choix d'une normale  $\mathbf{n}$  extérieure à l'élément de volume : la normale  $n(r+dr)$  a la même orientation que l'axe  $r$  alors que la normale  $n(r)$  a une orientation opposée. En conséquence le vecteur contrainte sur la facette  $(r)$  a pour composantes :  $-\sigma_{rr}(r), -\sigma_{xr}(r)$ . Nous cherchons ici une solution indépendante du temps. Si la vitesse d'un élément de fluide est constante, la résultante des forces est nulle, soit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rx})}{\partial r} \quad (3.7)$$

La contrainte de cisaillement est reliée au gradient de vitesse par :  $\sigma_{xr} = \eta \partial u_x / \partial r$ . L'équation 3.7 devient donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (3.8)$$

Examinons maintenant la résultante des forces s'exerçant sur un élément de fluide dans la direction radiale. Prenons le même élément de volume que ci-dessus, mais limité par les angles polaires  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Ecrivons la résultante des forces sur l'élément de volume projetée sur la direction radiale :

$$-(r+dr)p(r+dr)d\theta + r p(r)d\theta + 2p(r) \frac{d\theta}{2} dr = 0$$

Les deux premiers termes du membre de gauche proviennent de la pression exercée sur les faces cylindriques en  $r$  et  $r+dr$ . Le troisième terme provient de la pression exercée sur les faces radiales en  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.9)$$

Si la pression ne dépend que de  $x$  et la vitesse ne dépend que de  $r$ , les deux membres de l'équation 3.8 sont nécessairement égaux à une constante  $G$  qui est le gradient de pression moyen le long de l'écoulement :  $G = \Delta p / L$ . L'équation s'intègre une première fois en :

$$\frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{Gr}{2\eta} + \frac{A}{r}$$

où  $A$  est une constante d'intégration. Pour assurer la continuité du gradient de vitesse (et donc, des contraintes) sur l'axe du tube, il faut imposer  $A = 0$ . Une seconde intégration conduit à :

$$u_x = \frac{G}{\eta} \left( \frac{r^2 - R^2}{4} \right) \quad (3.10)$$

en tenant compte de la condition aux limites  $u_x(R) = 0$ . Le profil de vitesse est parabolique, avec une vitesse maximale sur l'axe égale à  $-GR^2/4\eta$ . Notons que, si le gradient de pression est négatif,

la vitesse est positive; l'écoulement se fait bien de la région de forte pression vers la région de faible pression. Le débit de fluide à travers le tube est donné par l'intégration du profil de vitesse :

$$Q = 2\pi \int_0^R u_x r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} \quad (3.11)$$

Ce résultat, souvent appelé "loi de Poiseuille<sup>1</sup>", montre que le débit est proportionnel au gradient de pression  $\Delta p/L$  et inversement proportionnel à la viscosité dynamique du fluide. Il dépend très fortement du diamètre du tube; cette dépendance en puissance quatrième du diamètre est une conséquence du profil de vitesse parabolique qui est lui-même une conséquence de la condition de non glissement sur la paroi du tube. Une situation physique très différente est le transport des électrons dans un conducteur électrique : la vitesse moyenne des électrons est la même dans toute la section du conducteur ; la résistance du conducteur est simplement inversement proportionnelle à sa section ( $\pi R^2$ ).

### 3.2.2 Écoulement entre deux cylindres (écoulement de Couette)

Un autre écoulement simple est celui réalisé dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux animés d'une vitesse de rotation constante dans le temps. Le cylindre extérieur (resp. intérieur) a un rayon  $R_e$  (resp.  $R_i$ ) et il est entraîné à la vitesse angulaire  $\Omega_e$  (resp.  $\Omega_i$ ). Nous supposons que les cylindres sont suffisamment longs (dans la direction axiale) pour que les effets dus aux extrémités soient négligeables et pour qu'il n'y ait pas de composante axiale de la vitesse (le problème, tridimensionnel dans la réalité, est ramené à un problème plan). Si l'écoulement reste stable, nous pouvons supposer que le champ de vitesse conserve la symétrie cylindrique : la vitesse est indépendante de la coordonnée azimuthale  $\theta$ . La condition d'incompressibilité impose alors que la composante radiale de la vitesse soit nulle. Considérons en effet un élément de volume délimité par les rayons  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  et par les cercles  $r$  et  $r + dr$ . Le volume net de fluide qui entre dans cet élément de volume est :

$$ru_r(r) d\theta - (r + dr)u_r(r + dr) d\theta + u_\theta(\theta) dr - u_\theta(\theta + d\theta) dr$$

Lorsque le fluide est incompressible, cet accroissement de volume est nul, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.12)$$

Le champ de vitesse étant indépendant de  $\theta$  pour une raison de symétrie, l'équation 3.12 conduit à :  $u_r = C/r$ . Sur les parois solides en  $r = R_e$  et  $r = R_i$  la vitesse radiale est nulle (le fluide ne peut traverser ces parois), elle est donc nulle dans tout l'écoulement.

Nous pouvons maintenant écrire l'équilibre des forces qui s'exercent sur l'élément de volume que nous avons considéré ci-dessus. Si l'écoulement reste stable, nous pouvons supposer que chaque élément de fluide se déplace avec une vitesse tangentielle constante sur une trajectoire circulaire. Un tel élément a une accélération centripète égale à  $u_\theta^2/r$ . Dans la direction radiale, le gradient de pression équilibre cette accélération centripète. Ecrivons la résultante des forces sur l'élément de volume projetée sur la direction radiale :

$$-(r + dr) p(r + dr) d\theta + r p(r) d\theta + 2p(r) dr \frac{d\theta}{2} = -\rho \frac{u_\theta^2}{r} r dr d\theta$$

Les deux premiers termes du membre de gauche proviennent de la pression exercée sur les faces cylindriques en  $r$  et  $r + dr$ . Le troisième terme provient de la pression exercée sur les faces radiales en  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad (3.13)$$

<sup>1</sup>du nom du médecin français qui fut le premier à montrer expérimentalement la dépendance du débit en puissance quatrième du rayon.

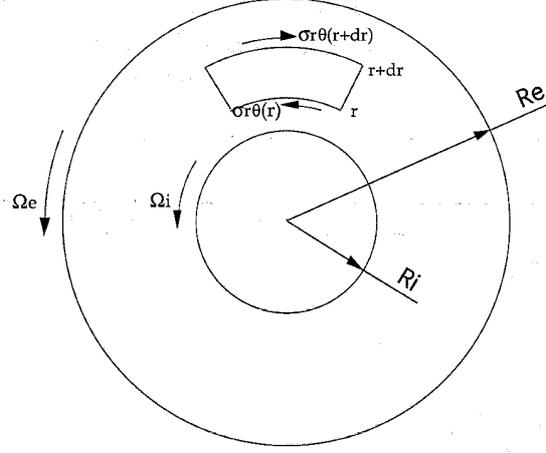


FIG. 3.5 – Schéma de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux.

Dans la direction tangentielle, écrivons le couple résultant de l'action des contraintes tangentielles, couple qui est nul puisque l'élément de volume se déplace à vitesse angulaire constante (notons que la pression est indépendante de  $\theta$ , elle n'apparaît donc pas dans l'équation ci-dessous) :

$$-(r + dr)^2 \sigma_{r\theta}(r + dr) d\theta + r^2 \sigma_{r\theta}(r) d\theta = 0$$

soit :

$$\frac{\partial(r^2 \sigma_{r\theta})}{\partial r} = 0 \quad (3.14)$$

Soit,  $\sigma_{r\theta} = C/r^2$  La contrainte tangentielle est proportionnelle à la vitesse de déformation :

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right)$$

Il faut soustraire  $u_\theta/r$  au gradient de vitesse pour tenir compte du fait qu'une rotation en bloc (rotation solide avec  $u_\theta = \omega r$ ) ne provoque pas de déformation. L'intégration de l'équation de mouvement donne :  $u_\theta = A/r + Br$ , les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  étant déterminées par les conditions aux limites sur les parois :  $u_\theta(R_i) = \Omega_i R_i$  et  $u_\theta(R_e) = \Omega_e R_e$  :

$$u_\theta = \frac{(\Omega_i - \Omega_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{1}{r} + \frac{\Omega_e R_e^2 - \Omega_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r \quad (3.15)$$

La contrainte tangentielle sur le cylindre extérieur est donc :

$$\sigma_{r\theta}(R_e) = 2\eta \frac{(\Omega_e - \Omega_i) R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

et le couple induit par cette contrainte est :

$$\Gamma = 4\pi\eta \frac{(\Omega_e - \Omega_i) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (3.16)$$

Ce couple est proportionnel à la viscosité dynamique du fluide et à la différence de vitesse de rotation des deux cylindres. Dans le cas où le rayon des deux cylindres est très grand devant leur séparation : ( $R_e - R_i = h \ll R_i$ ), on retrouve un écoulement identique à celui observé entre deux plaques planes parallèles, c'est-à-dire un profil de vitesse linéaire. Lorsque le cylindre extérieur est seul en mouvement ( $\Omega_i = 0$ ), le couple exercé sur le cylindre extérieur devient alors  $\Gamma = 2\pi\eta\Omega R^3/h$

, où  $\Omega = \Omega_e$  et  $R_e \approx R_i \approx R$ . Ce type d'écoulement entre deux cylindres coaxiaux de diamètres proches est utilisé couramment pour la mesure des viscosités. La réalisation d'un viscosimètre de Couette est très délicate mécaniquement : il faut assurer une parfaite concentricité des deux cylindres et éliminer les frottements au maximum. Il faut également apporter des corrections empiriques aux formules données ci-dessus pour tenir compte des effets de l'écoulement à l'extrémité des cylindres. Les appareils les plus sophistiqués peuvent travailler à vitesse de rotation imposée ou à contrainte imposée.

### 3.3 L'équation de Navier-Stokes

Nous avons trouvé l'équation de mouvement du fluide dans quelques cas simples. Passons maintenant à l'établissement de cette équation dans le cas général pour un fluide visqueux incompressible. La relation fondamentale de la dynamique peut s'exprimer de la manière suivante : la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume  $V$  est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{D}{Dt} \left[ \int_V \rho \mathbf{u} d\tau \right] = \int_V \mathbf{f} d\tau + \int_{\Sigma} \sigma \mathbf{n} dS \quad (3.17)$$

où  $\Sigma$  est la surface délimitant le volume  $V$ ,  $dS$  est un élément de surface de normale  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{f}$  est la force exercée par unité de volume et  $\sigma$  le tenseur des contraintes. La dérivée temporelle du premier membre est une dérivée lagrangienne, c'est-à-dire, en suivant le mouvement des particules de fluide. La masse de l'élément de fluide  $\rho d\tau$  reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire le premier terme :  $\int_V \rho D\mathbf{u}/Dt d\tau$ . L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme :  $\int_V \nabla \cdot \sigma d\tau$  où  $\nabla \cdot \sigma$  est la divergence du tenseur des contraintes, un vecteur dont la composante  $i$  est :  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ . En faisant tendre le volume  $V$  vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma \quad (3.18)$$

Maintenant, utilisons la décomposition de la dérivée lagrangienne de la vitesse en la somme de la dérivée eulérienne et de l'accélération convective (équation 2.1) En tenant compte de l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien en mouvement (équation 3.6), la contribution des forces de surface à la composante  $i$  de l'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

et l'équation de mouvement prend la forme :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.19)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes qui décrit le comportement des fluides newtoniens. Réécrivons cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \quad (3.20)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. L'expression de cette équation en coordonnées cylindriques et sphériques est donnée en annexe. Notons, qu'en l'absence d'écoulement, si la seule force en volume présente est la gravité, nous retrouvons à partir de l'équation de Navier-Stokes la loi de la statique des fluides :  $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ .

### 3.3.1 Equation de la vorticité

Dans certaines circonstances, il est utile de décrire le champ de vitesse par l'intermédiaire de la vorticité  $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$ . En particulier, dans les écoulements turbulents on observe le développement de zones où la vorticité est fortement concentrée. En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes, on obtient l'équation d'évolution de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \omega + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \wedge \nabla p \quad (3.21)$$

où on a supposé que la force  $\mathbf{f}$  dérive d'un potentiel. Le membre de gauche de l'équation 3.21 est la dérivée lagrangienne de la vorticité. Le membre de droite comprend trois termes : deux termes de production et un terme de dissipation d  à la viscosité. Le premier terme de production  $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$  est le produit scalaire de la vorticité et du gradient de vitesse. Ce terme traduit à la fois la réorientation du vecteur vorticité par le gradient de vitesse et l'étirement ou la compression de la vorticité; le mécanisme d'étirement de vorticité est crucial pour la génération de la turbulence.

L'autre terme de production de vorticité fait intervenir le gradient de masse volumique. Ce terme de *génération barocline de la vorticité* est nul si le gradient de pression et le gradient de densité sont parallèles. Ce terme intervient par exemple dans un fluide stratifié verticalement par la gravité et soumis à un gradient de pression horizontal. Sous l'effet du gradient de pression, le fluide dense se met en mouvement moins rapidement que le fluide léger, ce qui engendre un gradient de vitesse vertical et une composante de vorticité perpendiculaire au plan défini par  $\nabla \rho$  et  $\nabla p$ .

## 3.4 Conditions aux limites

L'équation de mouvement et l'équation de conservation de la masse suffisent en principe à déterminer le champ de vitesse et le champ de pression. Encore faut-il préciser les conditions aux limites auxquelles obéissent la vitesse ou les contraintes.

### 3.4.1 Interface solide-fluide

Comme nous l'avons déjà mentionné, toutes les observations expérimentales macroscopiques s'accordent pour affirmer que la vitesse d'un fluide s'annule au voisinage immédiat d'une paroi solide. Le fait que la composante de la vitesse normale à la paroi soit nulle est simplement liée au fait que le fluide ne pénètre pas dans le solide. En revanche, la nullité de la composante de vitesse tangente à la paroi est liée à l'existence de la viscosité : une discontinuité de la vitesse conduirait à une contrainte de cisaillement infinie et donc, à une divergence de l'énergie dissipée dans l'écoulement.

Il faut toutefois nuancer ces constats à l'échelle microscopique (quelques nm). Dans certaines conditions, on peut avoir un glissement moyen du fluide par rapport à la paroi solide<sup>2</sup>. Ce glissement peut influencer par exemple l'étalement de films liquides extrêmement fins ou l'écoulement dans des microcanaux.

Dans certaines conditions d'écoulement que nous définirons plus loin, les effets de la viscosité peuvent être négligés. On peut alors résoudre les équations de mouvement comme si le fluide était parfait, c'est-à-dire, sans viscosité. Alors, la présence d'une paroi solide impose uniquement la nullité de la composante de vitesse normale à la paroi.

### 3.4.2 Interface fluide-fluide. Tension de surface

De la même manière qu'à une interface fluide-solide, une discontinuité de la composante de vitesse *tangente*   l'interface imposerait une contrainte de cisaillement infinie. Une condition pure-

<sup>2</sup>Huang, P., Guasto, J.S. & Breuer, K.S. Direct measurement of slip velocities using three-dimensional total internal reflection velocimetry, *J. Fluid Mech.* **566**, 447 (2006); P. Joseph & P. Tabeling, *Phys. Rev. E* **71**, 035303(R) (2005); Pit R., Hervet H., Leger L. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 980 (2000)

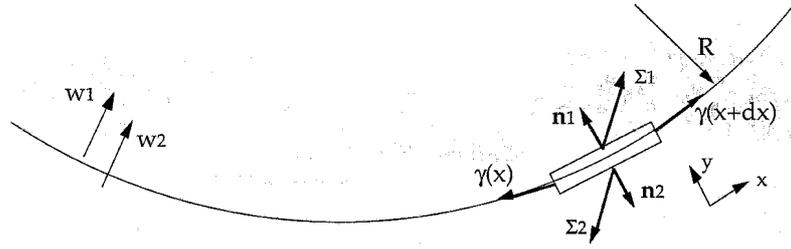


FIG. 3.6 – Interface entre deux fluides

ment cinématique assure que la composante de vitesse *normale* à l'interface soit également continue à travers cette interface. En effet, l'interface se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact. Si nous plaçons dans un repère local défini par la normale à l'interface (fig. 3.6), où  $\zeta, w_1$  et  $w_2$  sont respectivement la position de l'interface et les vitesses normales dans chacun des fluides, cette condition cinématique s'écrit :

$$\frac{d\zeta}{dt} = w_1 = w_2 \quad (3.22)$$

Plus généralement, si la position de l'interface est donnée comme une fonction dépendant de deux coordonnées d'espace et du temps  $z = \zeta(x, y, t)$ , la condition cinématique s'écrit :

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} u_y + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{D\zeta}{Dt} \quad (3.23)$$

c'est-à-dire que la *dérivée particulaire* (en suivant le mouvement du fluide) de la position de l'interface  $\zeta$  selon l'axe  $z$  est égale à la composante de vitesse suivant  $z$ .

Examinons maintenant la relation qui existe entre les contraintes de part et d'autre de l'interface. Considérons un élément de volume placé à cheval sur l'interface, dont les faces sont parallèles à l'interface et dont l'épaisseur, perpendiculairement à l'interface, est très petite (fig. 3.6). La résultante des forces sur cet élément de volume est :  $[\sigma_{ij}n_j]_1 + [\sigma_{ij}n_j]_2 +$  tension de surface. Cette résultante est nulle lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de cet élément de volume vers 0. Prenons des axes  $x$  et  $y$  confondus avec la tangente et la normale à l'interface; alors  $\mathbf{n}_1 = (0, 1)$  et  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = (0, -1)$ . La résultante des forces tangentielles est :  $([\sigma_{xy}]_1 - [\sigma_{xy}]_2) dx$ . La résultante des forces normales est :  $([\sigma_{yy}]_1 - [\sigma_{yy}]_2) dx$ . Il faut ajouter la contribution de la tension interfaciale entre les deux fluides. La tension de surface  $\gamma$  est l'énergie qu'il faut fournir pour créer une interface d'aire unité. On peut aussi considérer  $\gamma$  comme une force par unité de longueur, s'exerçant dans le plan de l'interface et qui assure la cohésion de cette interface.

### Contraintes normales de part et d'autre de l'interface

Lorsque l'interface est courbe, l'existence d'une tension interfaciale se traduit par une discontinuité des contraintes normales à la traversée de l'interface. En projetant sur la normale la tension de surface qui s'exerce sur les deux extrémités de l'élément de volume de longueur  $dx$ , on obtient :  $\gamma dx/R$  où  $R$  est le rayon de courbure de l'interface, d'où :  $([\sigma_{yy}]_1 - [\sigma_{yy}]_2) dx + \gamma dx/R$ . Le raisonnement que nous venons de faire sur un élément de volume bidimensionnel peut être refait en trois dimensions. Il conduit à :

$$[\sigma_{nn}]_1 - [\sigma_{nn}]_2 = \gamma \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) = \gamma C \quad (3.24)$$

où  $R_a$  et  $R_b$  sont les rayons de courbure de l'interface dans deux plans orthogonaux et  $C$  est la courbure totale de l'interface. Lorsque les contraintes normales se réduisent à  $-p$ , 3.24 devient :

$$p_2 - p_1 = \gamma C \quad (3.25)$$

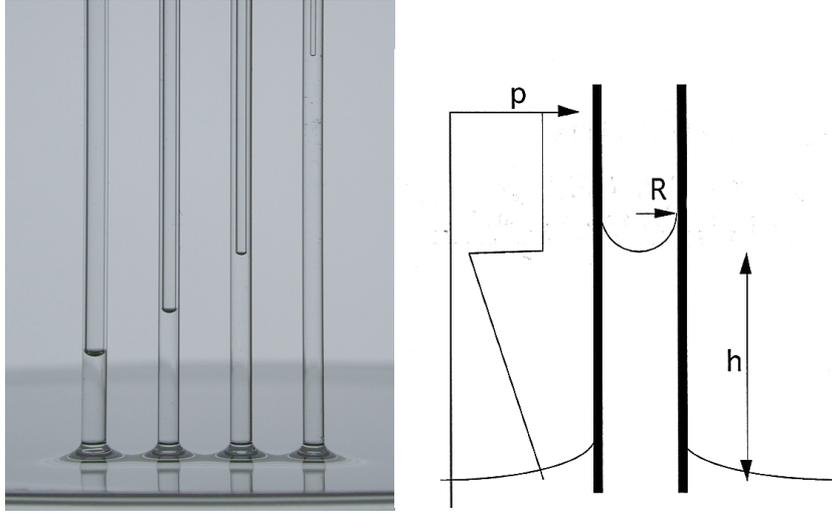


FIG. 3.7 – Ascension capillaire : à gauche, montée d’huile silicone dans des tubes de verre de diamètres différents. A droite, répartition de pression dans la colonne de liquide.

la pression étant la plus élevée à l’intérieur de la courbure (l’intérieur d’une bulle est en surpression). Cette équation est l’équation classique de la capillarité.

Le phénomène d’ascension capillaire est une manifestation de cette discontinuité de pression à la traversée d’une interface courbe. Si on plonge l’extrémité d’un petit tube de verre dans l’eau, on voit l’eau monter dans le tube. La hauteur d’ascension est inversement proportionnelle au rayon du tube (fig. 3.7). Si le verre est très propre, l’interface eau-air se raccorde à la surface du verre avec un angle très petit et le ménisque est une demi-sphère de rayon égal à celui du tube. Au dessus de l’interface, la pression est égale à la pression atmosphérique  $p_0$ . Immédiatement en-dessous de l’interface, la pression est inférieure à  $p_0$ , d’une quantité  $\Delta p = 2\gamma/R$ . Pour retrouver une pression  $p_0$  en bas du tube, il faut que le liquide monte d’une hauteur  $h$  telle que :  $\rho gh = \Delta p$ , soit :  $h = 2\gamma/\rho gR$ .

### Contraintes tangentielles de part et d’autre de l’interface

En projetant la tension de surface sur la direction  $x$ , il vient :  $([\sigma_{xy}]_1 - [\sigma_{xy}]_2) dx + \gamma(x+dx) - \gamma(x) = 0$ , soit :

$$\Delta\sigma_{xy} = \frac{\partial\gamma}{\partial x} \quad (3.26)$$

La discontinuité de contrainte tangentielle est égale au gradient de tension superficielle le long de l’interface. La tension superficielle dépend, en général, de la température et, éventuellement, de la concentration de molécules tensioactives. Ainsi l’addition locale de tensioactif à la surface d’un liquide provoque un écoulement via l’application d’une contrainte tangentielle définie par l’éqn. 3.26.

En revanche, s’il n’y a pas ni gradient de température, ni tensioactif dans le liquide ou si la concentration de tensioactif est uniforme, la tension superficielle est uniforme et il n’y a pas de discontinuité de la contrainte tangentielle à la traversée d’une interface. Lorsque le fluide est newtonien, les contraintes tangentielles sont proportionnelles au gradient de vitesse. Si l’écoulement est unidimensionnel et parallèle au plan de l’interface, la relation 3.26 prend la forme suivante :

$$\eta_1 \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_1 = \eta_2 \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_2 \quad (3.27)$$

où les directions  $x$  et  $y$  sont respectivement parallèles et normales à l’interface. Les gradients

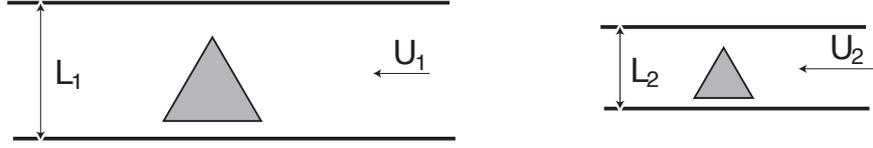


FIG. 3.8 – Deux écoulements géométriquement similaires caractérisés par les longueurs  $L_1$  et  $L_2$  et par les vitesses  $U_1$  et  $U_2$

de vitesse de part et d'autre de l'interface sont dans un rapport qui est inverse du rapport des viscosités dynamiques.

Lorsqu'un des fluides a une viscosité très petite devant celle de l'autre fluide comme dans le cas d'une interface entre un liquide et un gaz, 3.27 se réduit à  $\partial u_x / \partial y = 0$  dans le fluide le plus visqueux : alors le gradient de vitesse est nul sur l'interface.

### 3.5 Notion de similitude. Une définition plus précise du nombre de Reynolds

Une fois qu'une solution de l'équation de Navier-Stokes a été obtenue avec des conditions aux limites particulières, on peut se demander si cette solution est également observée dans des écoulements géométriquement similaires. Deux écoulements sont géométriquement similaires si toutes leurs dimensions sont homothétiques. Considérons par exemple l'écoulement autour d'un obstacle placé dans un canal (fig. 3.8). En l'occurrence, la géométrie de l'écoulement est complètement définie par la donnée de la largeur  $L$  du canal et par tous les rapports entre  $L$  et les dimensions de l'obstacle.

De la même manière, il est possible de caractériser le champ de vitesse par une vitesse représentative  $U$ . Pour ce qui concerne l'écoulement dans un canal,  $U$  peut être la vitesse moyenne d'écoulement. Le champ de vitesse est alors fixé par la donnée de  $L$  et  $U$  par des fonctions sans dimensions  $u' = u/U$  de coordonnées d'espace sans dimensions  $r' = r/L$ . Écrivons l'équation de Navier-Stokes avec ces variables sans dimension, en omettant le terme de force en volume. Notons que les dérivées spatiales s'écrivent :  $\partial / \partial r = 1/L \partial / \partial r'$  et que nous pouvons définir un temps caractéristique  $\tau = L/U$ .

$$\frac{U}{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \frac{U}{L^2} \nu \Delta' \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho L} \nabla p' \quad (3.28)$$

où  $t'$  est un temps adimensionnel :  $t' = t/\tau$ . En reportant la valeur de  $\tau$  dans 3.28 et en divisant par  $U^2/L$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \frac{\nu}{UL} \Delta' \mathbf{u}' = -\nabla' p' \quad (3.29)$$

où nous avons défini une pression adimensionnelle :  $p' = p/\rho U^2$ . En effet,  $1/2 \rho U^2$  qui est l'énergie cinétique (typique) par unité de volume a la dimension d'une pression. C'est ce qu'on nomme la *pression dynamique*. L'équation de Navier-Stokes ainsi écrite ne comporte plus que des termes sans dimension et les paramètres physiques qui déterminent l'écoulement apparaissent uniquement dans le rapport :  $\nu/UL$  qui est l'inverse du nombre de Reynolds. Si on obtient une solution de l'équation de Navier-Stokes avec des conditions aux limites prescrites par  $U$ ,  $L$  et par des combinaisons des variables d'espace sans dimension, cette solution sera également valide si la vitesse caractéristique  $U$ , la longueur caractéristique  $L$  ou la viscosité du fluide sont modifiées à condition que le nombre de Reynolds reste le même. Ces écoulements ont une *similitude dynamique* (fig. 3.9).

Lorsqu'il n'y a pas de force en volume, les seuls paramètres qui caractérisent le fluide sont sa viscosité dynamique et sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est une estimation du rapport entre les effets d'inertie et les effets de viscosité. On peut le voir également en considérant

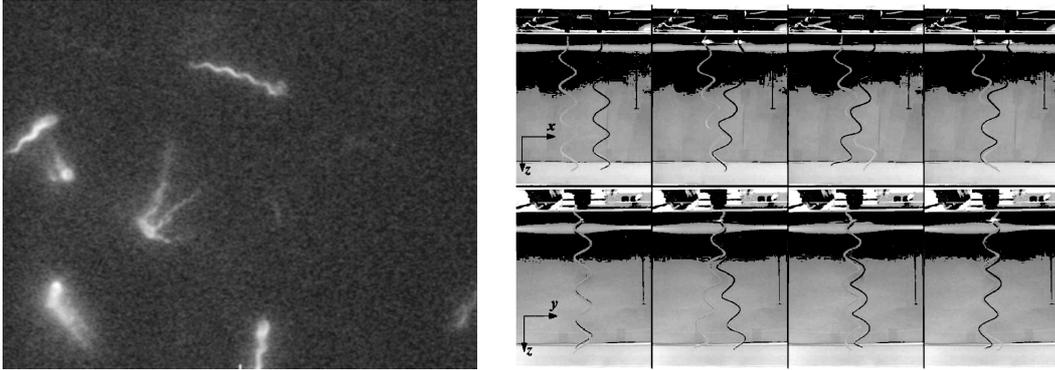


FIG. 3.9 – Un exemple de similitude en nombre de Reynolds : l'étude de la propulsion de la bactérie *Escherichia Coli*. À gauche, des bactéries vues au microscope, les flagelles moteurs sont visualisés par des marqueurs fluorescents. Image réalisée par le groupe de H.C. Berg à Harvard (<http://www.rowland.harvard.edu/labs/bacteria/index.html>). À droite, un modèle macroscopique réalisé avec des hélices qui tournent dans un bain de glycérine. La séquence d'images montre l'appariement des deux hélices tournant dans le même sens. Image tirée de M. Kim et al., "A macroscopic scale model of bacterial flagellar bundling", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **100**, 15481 (2003).

l'importance relative des termes  $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'$  et  $(\nu/UL)\Delta' \mathbf{u}'$  dans l'équation 3.29. Si  $U$  et  $L$  sont convenablement choisis pour représenter l'écoulement, toutes les variables sans dimension (avec des ') sont d'ordre unité, de telle sorte que  $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'$  et  $\Delta' \mathbf{u}'$  sont du même ordre de grandeur. Le rapport du terme inertiel  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  et du terme lié à la viscosité  $\nu \Delta \mathbf{u}$ , dans l'équation de Navier-Stokes, est précisément le nombre de Reynolds.

Lorsque des effets physiques autres que l'inertie et la viscosité entrent en jeu, d'autres paramètres de similitude apparaissent<sup>3</sup>. Par exemple, si on rajoute un terme de gravité à l'équation 3.29, le rapport des effets inertiels sur les effets de gravité vaut, en ordre de grandeur,  $U^2/gL$ . C'est le nombre de Froude. Si l'on veut respecter l'importance relative des effets inertiels et des effets de gravité dans un essai sur maquette, par exemple, il faut travailler à nombre de Froude constant.

<sup>3</sup>voir en annexe une liste non exhaustive de nombres sans dimension