

Chapitre 2

CINÉMATIQUE

2.1 Descriptions eulérienne et lagrangienne.

La description des écoulements est faite, dans la très grande majorité des cas, à partir du champ de vitesse \mathbf{u} défini comme une fonction des variables d'espace et du temps : $\mathbf{u}(x, t)$. C'est-à-dire qu'on définit ou mesure en chaque point x de l'espace, et à tout instant, la vitesse du fluide, moyennée sur une longueur grande devant les distances intermoléculaires. Du point de vue expérimental, cette description dite "eulérienne" correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l'écoulement. Dans cette description, on observe différentes particules de fluide qui se succèdent en un même point de l'espace, comme lorsqu'on regarde l'eau défilier sous un pont. Si le champ de vitesse eulérien ne dépend pas du temps, l'écoulement est qualifié de stationnaire ; s'il dépend du temps, l'écoulement est instationnaire.

L'autre description, dite "lagrangienne", consiste à suivre le mouvement d'une même particule de fluide au cours du temps. Le champ de vitesse est alors spécifié sous la forme : $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t)$ qui est la vitesse à l'instant t d'une particule de fluide qui se trouvait en \mathbf{r}_0 à l'instant t_0 . Cette description lagrangienne correspond aux expériences de visualisation dans lesquelles on dépose un traceur (particule solide, tache de colorant) en un point de l'écoulement et on suit la trajectoire de ce traceur. La trajectoire d'une particule de fluide est donnée par l'intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t') dt'$.

2.2 Dérivée "particulaire" de la vitesse.

Dans un écoulement, l'accélération d'une particule de fluide comporte, en général, deux contributions : la première contribution est due à la variation au cours du temps de la vitesse en chaque

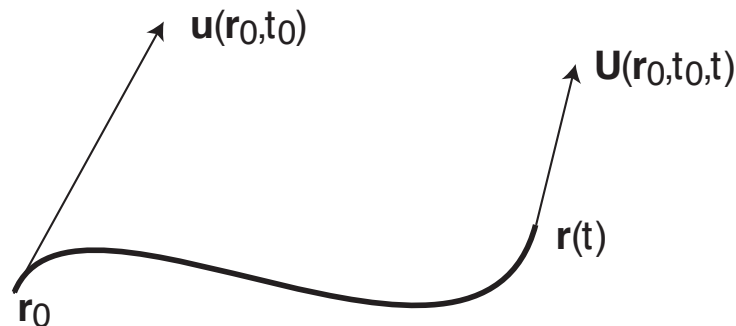


FIG. 2.1 – Trajectoire d'une particule de fluide.

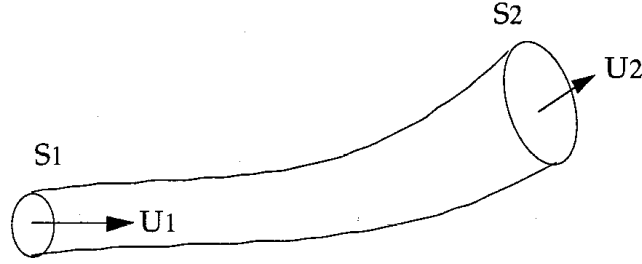


FIG. 2.2 – Tube de courant.

point de l'écoulement (caractère instationnaire de l'écoulement). La seconde contribution est due à l'exploration d'un champ de vitesse non uniforme par la particule de fluide. Même lorsque l'écoulement est stationnaire, si l'écoulement n'est pas uniforme, une particule de fluide va explorer au cours de son déplacement des zones de plus grande ou plus faible vitesse (voir, par exemple, l'écoulement dans un élargissement brusque représenté sur la fig. 2.3); il en résulte un terme d'accélération "convective".

La première contribution à l'accélération est simplement la dérivée temporelle de la vitesse eulérienne : $\partial \mathbf{u} / \partial t$. Si la particule de fluide se trouve en \mathbf{r}_0 à l'instant t , elle parcourt en un temps δt une distance $\delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \delta t + O(\delta t^2)$. La vitesse du fluide au point $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}$ est : $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}$. L'accélération correspondante de la particule de fluide est : $(\nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}) / \delta t$. En prenant la limite $\delta t \mapsto 0$, $\delta \mathbf{r} / \delta t \mapsto \mathbf{u}$ et l'accélération convective s'écrit : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de telle sorte que l'accélération totale d'une particule de fluide s'écrit :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Il faut noter que le gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$ est une quantité tensorielle dont les composantes sont $\partial u_i / \partial x_j$ et que la composante i de l'équation 2.1 s'écrit :

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

L'accélération convective est la projection du gradient de vitesse sur la direction locale de l'écoulement.

2.3 Lignes de courant. Tubes de courant.

La représentation graphique des écoulements se fait souvent à l'aide des lignes de courant. Les lignes de courant sont tangentes en tous points au champ de vitesse. Si u, v, w sont les trois composantes de vitesse en coordonnées cartésiennes, l'équation des lignes de courant est :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.2)$$

Un tube de courant est une surface composée de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée. Par définition, le fluide ne traverse pas la paroi d'un tube de courant; le débit de fluide Q traversant une section droite d'un tube de courant est donc constant.

Supposons que deux sections droites d'un tube de courant aient des aires S_1 et S_2 , et que la vitesse moyenne et la masse volumique du fluide dans chacune de ces sections soient respectivement U_1, ρ_1 et U_2, ρ_2 . La conservation de la masse impose que : $\rho_1 U_1 S_1 = \rho_2 U_2 S_2 = Q$. Si le fluide est incompressible, la masse volumique est identique dans les deux sections et la vitesse du fluide est inversement proportionnelle à l'aire de la section : $U = Q / \rho S$. Les lignes de courant donnent donc également une indication sur les valeurs relatives de la vitesse dans l'écoulement : plus les lignes sont resserrées, plus la vitesse est grande.

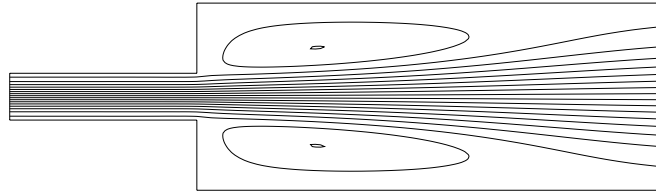


FIG. 2.3 – Écoulement dans un élargissement brusque à $Re = 50$. Résultat d'une simulation numérique. Représentation du champ de vitesse par des lignes de courant.

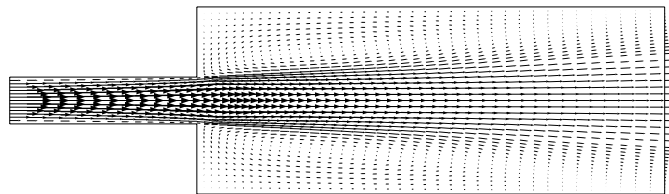


FIG. 2.4 – Écoulement dans un élargissement brusque à $Re = 50$. Résultat d'une simulation numérique. Représentation du champ de vitesse par des vecteurs.

Dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant et les trajectoires des éléments de fluide sont confondues. En revanche, dans un écoulement instationnaire, les lignes de courant évoluent au cours du temps et les trajectoires ne sont, en général, pas confondues avec les lignes de courant. La fig. 2.5 montre les lignes de courant dans l'écoulement derrière un cylindre mis brusquement en mouvement. Les lignes de courant observées à deux instants différents après le démarrage du cylindre sont clairement très distinctes.

Lorsqu'on effectue une visualisation d'un écoulement par une injection continue de colorant en un point, on observe une *ligne d'émission*. Une ligne d'émission est l'ensemble des positions des éléments de fluide qui sont passés antérieurement par le point d'émission. Dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant, trajectoires et lignes d'émission sont confondues. En revanche, dans un écoulement instationnaire, les lignes d'émissions, les trajectoires et les lignes de courant

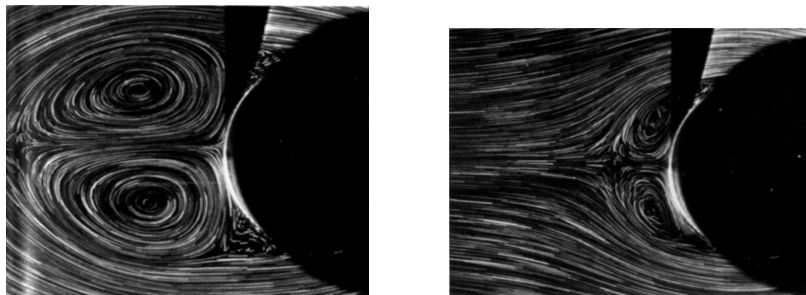


FIG. 2.5 – Exemple d'écoulement instationnaire. Lignes de courant dans l'écoulement derrière un cylindre qui est mis brusquement en mouvement à $Re = 500$. Visualisation à l'aide de particules métalliques réfléchissantes. À droite, le cylindre s'est déplacé d'une fois son diamètre, à gauche, de trois fois son diamètre. Photographie : R. Bouard et M. Coutanceau, *J. Fluid Mech.* **79**, 257 (1977).

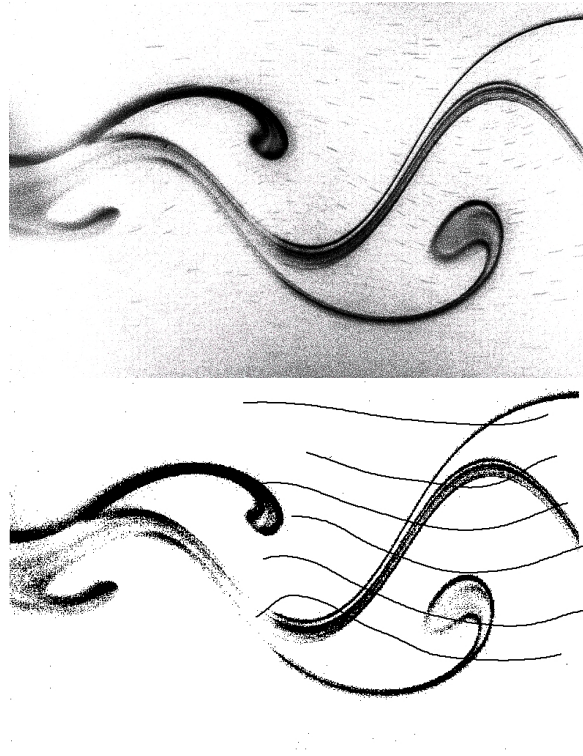


FIG. 2.6 – Écoulement instationnaire derrière un cylindre. En haut, visualisation simultanée des lignes d'émission et lignes de courant. En bas, lignes d'émission extraites de l'image et quelques lignes de courant reconstruites.

sont, en général, différentes. La fig. 2.6 montre à nouveau l'écoulement instationnaire derrière un cylindre, visualisé d'une part par des lignes d'émission résultant de l'injection de colorant fluorescent sur le cylindre et, d'autre part, avec des lignes de courant matérialisées par de courtes trajectoires de particules réfléchissantes. Un système de double exposition est nécessaire pour réaliser cette image : le colorant fluorescent est excité par un flash très bref, ce qui permet de figer les lignes d'émission. L'obturateur de l'appareil photographique reste ouvert assez longtemps pour que les particules diffusantes impriment une trace révélant l'orientation et la grandeur de la vitesses du fluide.

La visualisation par injection de colorants (ou de fumée dans l'air) est assez simple à mettre en ouvre. Elle de ce fait largement utilisée. Néanmoins, comme nous venons de le voir, l'interprétation des visualisations d'écoulements instationnaires doit être faite avec précaution.

2.4 Conservation de la masse.

Ecrivons le bilan de quantité de fluide entrant et sortant d'un volume de référence V , fixe par rapport au système de coordonnées dans lequel est exprimée la vitesse eulérienne \mathbf{u} . La variation par unité de temps de la masse contenue dans le volume V est égale à la masse traversant, par unité de temps, la surface S qui délimite le volume V . Soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S et orienté vers l'extérieur de celle-ci. En utilisant le théorème d'Ostrogradski pour transformer le second membre en intégrale de volume,

et en intervertissant la différentiation temporelle et l'intégration dans le premier membre, on obtient :

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégrand est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

Réécrivons 2.3 en développant le second terme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

La somme des deux premiers termes du membre de gauche est la dérivée "particulaire" (en suivant le mouvement du fluide) de la masse volumique. Si le fluide est incompressible, la masse volumique n'évolue pas au cours du temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 exprime la conservation du volume d'un élément de fluide au cours de sa déformation par l'écoulement. En pratique, un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible si plusieurs conditions sont réunies :

- i) la vitesse typique de l'écoulement U est petite devant la vitesse du son c , c'est-à-dire, le nombre de Mach $M = U/c$ est petit devant l'unité. Dans l'eau où la vitesse du son est voisine de 1500 m/s cette condition est presque toujours vérifiée. En revanche, dans l'air où c est de l'ordre de 300 m/s, de nombreux écoulements, en particulier en aéronautique, sont influencés par la compressibilité du fluide.
- ii) dans un écoulement instationnaire, si ν est la fréquence typique de variation temporelle de la vitesse, ν doit être tel que $1/\nu \ll c/L$ où L est une dimension caractéristique de l'écoulement. C'est-à-dire qu'à l'échelle du temps typique de fluctuation de la vitesse, une onde de pression se propage très rapidement à travers tout l'écoulement. Il est évident que si on s'intéresse à la propagation des ondes sonores, par exemple au bruit rayonné par un jet turbulent, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide.
- iii) enfin, il est nécessaire que la variation de pression due à une force extérieure (la gravité par exemple) soit petite devant la pression absolue. Cette dernière condition est presque toujours satisfaite, même si on considère des écoulements atmosphériques sur des échelles verticales très grandes.

En pratique, à l'exception notable des applications aéronautiques et de l'acoustique, les effets de compressibilité sont négligeables dans les écoulements et nous les ignorerons dans la suite de ce cours.

2.5 Écoulement bidimensionnel incompressible. Fonction de courant.

La description de l'écoulement est nettement simplifiée dans un écoulement bidimensionnel incompressible. Seules deux composantes de la vitesse sont non nulles et elles sont reliées par la condition de conservation de la masse $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette condition peut être satisfaite en posant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.6)$$

La fonction ψ ainsi définie est la *fonction de courant*. En effet, les lignes $\psi = C^{te}$ ont la propriété d'être des lignes de courant. L'équation des lignes de courant est : $vdx - udy = 0$, soit, en remplaçant les composantes de vitesse par les dérivées de la fonction de courant :

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -d\psi = 0.$$

Le débit entre deux lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ est donné par la différence de valeur de la fonction de courant entre ces deux lignes : $Q = \psi_2 - \psi_1$. En effet, $Q = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl$ où \mathbf{n} est la normale à une ligne quelconque joignant les lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$. Si (dx, dy) sont les composantes du vecteur tangent à la ligne d'intégration, celles de $\mathbf{n} dl$ sont $(dy, -dx)$ et le débit Q est :

$$Q = \int_1^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} dx - \frac{\partial\psi}{\partial y} (-dy) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Ainsi, lorsqu'on représente un écoulement par des lignes de courant correspondant à des valeurs de ψ régulièrement espacées, le débit de fluide $Q = \Delta\psi$ est le même entre tous les couples de lignes adjacentes. L'espacement des lignes reflète alors directement la vitesse du fluide : la distance d entre les lignes de courant est inversement proportionnelle à la vitesse locale du fluide : $u = \Delta\psi/d$. De la même manière que le champ magnétique, qui est à divergence nulle, dérive d'un potentiel vecteur, le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel incompressible dérive du potentiel vecteur $\mathbf{A} = \psi \mathbf{k}$, \mathbf{k} étant le vecteur unitaire sur l'axe z . Il est également possible de définir une fonction de courant dans un écoulement axisymétrique incompressible, par exemple, l'écoulement autour d'une sphère. Si le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée azimutale θ autour de l'axe de symétrie, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0$$

où x est la coordonnée le long de l'axe de symétrie. Cette équation est satisfaite si :

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \text{ et } u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

2.6 Déformations dans un écoulement

2.6.1 Décomposition du gradient de vitesse

Nous verrons que la dynamique des écoulements est régie par les gradients de vitesse, c'est-à-dire par le mouvement relatif des particules de fluide. Il faut de ce fait analyser en détail les déformations subies par un élément de fluide placé dans un écoulement. Si deux particules de fluide sont placées respectivement en \mathbf{r} et $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, la différence de leur déplacement pendant un temps δt est : $\delta\epsilon = \nabla \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{r} \delta t$, soit pour la composante i du déplacement :

$$\delta\epsilon_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j \delta t \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j \delta t$$

où on a utilisé la convention de notation de sommation implicite des indices répétés (ici j). Décomposons le gradient de vitesse en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.7)$$

où les parties symétrique et antisymétrique sont respectivement :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

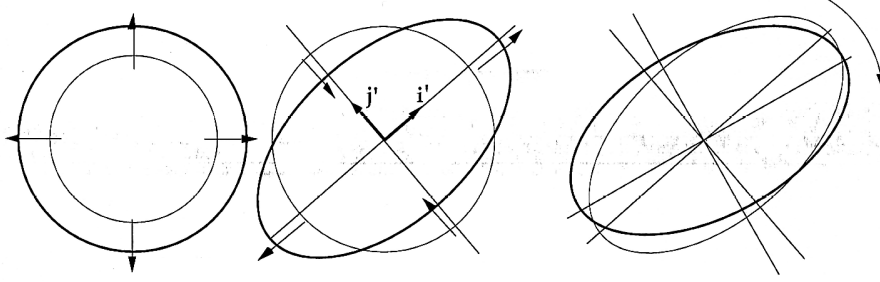


FIG. 2.7 – Déformation d'un cercle par un écoulement. Dilatation globale, puis déformation à volume constant et enfin, rotation en bloc.

Examinons d'abord la contribution de la partie symétrique à la déformation : $\delta\epsilon_i^s = e_{ij}\delta r_j\delta t$. Il existe un repère dans lequel le tenseur de rang deux symétrique e_{ij} est diagonal. Dans ce repère, notons les composantes de $\delta\mathbf{r} : \delta r'_i$. Alors, $\delta\epsilon^s = a\delta r'_1\mathbf{i}' + b\delta r'_2\mathbf{j}'$ où a, b, \mathbf{i}' et \mathbf{j}' sont respectivement les valeurs propres et directions propres de e_{ij} et où nous nous sommes limités pour simplifier à un espace bidimensionnel. Notons que : $a + b = e_{kk} = \text{div}\mathbf{u}$, la trace d'un tenseur étant invariante par changement de repère. Nous pouvons encore décomposer cette déformation en une partie isotrope et une partie anisotrope, soit :

$$\delta\epsilon^s = \left[\frac{a+b}{2}(\delta r'_1\mathbf{i}' + \delta r'_2\mathbf{j}') + \frac{a-b}{2}(\delta r'_1\mathbf{i}' - \delta r'_2\mathbf{j}') \right] \delta t$$

Le premier terme correspondant à un accroissement relatif de volume d'une quantité $\frac{a+b}{2}\delta t$. Le second terme correspondant à une déformation pure, sans changement de volume, d'amplitude : $(|a-b|/2)\delta t$.

Pour mieux comprendre l'effet de l'écoulement, déterminons la déformation d'un élément de fluide initialement circulaire. Le premier terme transforme le cercle de rayon R en un cercle de rayon : $R[1 + \frac{a+b}{2}\delta t]$ et le second terme transforme ce cercle en une ellipse dont les axes coïncident avec les axes propres du tenseur des taux de déformation. Les deux transformations sont illustrées sur la fig. 2.7. Examinons maintenant la contribution de la partie antisymétrique du gradient de vitesse : $\delta\epsilon_i^a = \omega_{ij}\delta r_j\delta t$, toujours en nous limitant à deux dimensions pour simplifier l'analyse. Prenons : $\delta\mathbf{r} = (\delta r_1, \delta r_2)$; alors, $\delta\epsilon^a = (\omega_{12}\delta r_2\delta t, \omega_{21}\delta r_1\delta t) = \omega_{12}\delta t(-\delta r_2, \delta r_1)$, car les composantes diagonales de ω_{ij} sont nulles et $\omega_{21} = -\omega_{12}$. Le déplacement de l'extrémité du vecteur $\delta\mathbf{r}$ est orthogonal au vecteur $\delta\mathbf{r}$. L'effet de la partie antisymétrique du gradient de vitesse est de faire tourner ce vecteur d'un angle $\alpha \approx \omega_{12}\delta t$. Ceci est vrai quel que soit l'orientation du vecteur $\delta\mathbf{r}$. Donc, l'effet de ω_{ij} est de faire tourner les éléments de volume de fluide, sans déformation, d'un angle α . On voit qu'à deux dimensions, ω_{ij} n'a qu'une seule composante indépendante, avec : $\omega = -2\omega_{12} = 2\omega_{21}$ et cette composante est telle que :

$$\text{rot}\mathbf{u} = \omega\mathbf{k} = \omega \quad (2.9)$$

Le même raisonnement s'applique à trois dimensions. On définit le vecteur ω comme la vorticité locale de l'écoulement. La vorticité représente le double de la vitesse angulaire de rotation d'un élément de fluide. Dans certains cas, la vorticité est nulle partout. l'écoulement est alors qualifié d'irrotationnel.

La figure 2.7 résume la décomposition du gradient de vitesse en trois termes :

- un terme symétrique isotrope qui représente la variation de volume d'un élément de fluide. Ce terme est nul si le fluide est incompressible ($\text{div}\mathbf{u} = 0$).
- un terme symétrique anisotrope qui représente une déformation pure, sans changement de volume.
- un terme antisymétrique qui représente une rotation en bloc, sans déformation. Ce terme est nul si l'écoulement est irrotationnel.

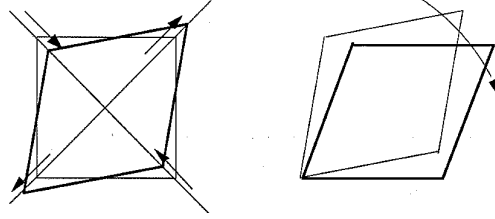


FIG. 2.8 – Déformation d'un élément de fluide carré dans un écoulement de cisaillement simple : déformation sans changement de volume avec des axes propres à 45° puis rotation.

2.6.2 Écoulement de cisaillement simple

Appliquons la décomposition explicitée ci-dessus au cas de l'écoulement de cisaillement simple que l'on rencontre dans les viscosimètres à cylindres coaxiaux. Le champ de vitesse est : $u_x = Gy$, $u_y = 0$. La seule composant non nulle du gradient de vitesse est : $\partial u_x / \partial y = G$ et ses parties symétrique et antisymétrique sont respectivement :

$$e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & G \\ G & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$$

Le terme symétrique a une trace nulle, il n'y a donc pas de variation de volume des éléments de fluide. Ce terme symétrique a des axes propres orientés à 45° et les valeurs propres sont $G/2$ et $-G/2$. Enfin, le terme antisymétrique représente une rotation à la vitesse angulaire $-G/2$ (fig. 2.8).

2.6.3 Écoulement élongationnel

Considérons maintenant un écoulement purement élongationnel. Le champ de vitesse est donné par la fonction de courant : $\psi = kxy$ qui correspond à : $u_x = kx$, $u_y = -ky$. Les lignes de courant sont des hyperboles. Un tel écoulement peut être réalisé par un appareil à quatre rouleaux rotatifs (fig. 2.9) ou par un système de jets opposés. Le gradient de vitesse est symétrique dans ce cas particulier :

$$G = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Les axes propres sont confondus avec les axes x et y . Un cercle se déforme en une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'axe x . Le gradient de vitesse n'ayant pas de partie antisymétrique, il n'y a pas de mouvement de rotation des éléments de fluide ; cet écoulement est un écoulement de déformation pure.

L'absence ou la présence d'une composante rotationnelle du gradient de vitesse peut avoir des conséquences importantes. Une solution de polymères placée dans l'appareil à quatre rouleaux présente une biréfringence assez importante. Cette anisotropie de l'indice de réfraction induite par l'écoulement est due à la déformation des macromolécules dans l'écoulement. En revanche dans un écoulement de cisaillement simple, la même solution de polymère soumise à un gradient de vitesse comparable ne présente pas de biréfringence notable. En effet, la composante rotationnelle du gradient change continuellement la direction d'élongation des macromolécules. Dans l'écoulement élongationnel, les macromolécules restent orientées dans la direction d'allongement et, de ce fait, le gradient de vitesse est beaucoup plus efficace pour déformer les polymères. Une observation similaire est faite concernant la déformation de gouttelettes (suspendues dans un autre liquide) placées dans les mêmes écoulements : les gouttelettes sont plus facilement déformées et fractionnées dans l'écoulement purement élongationnel (fig. 2.9).

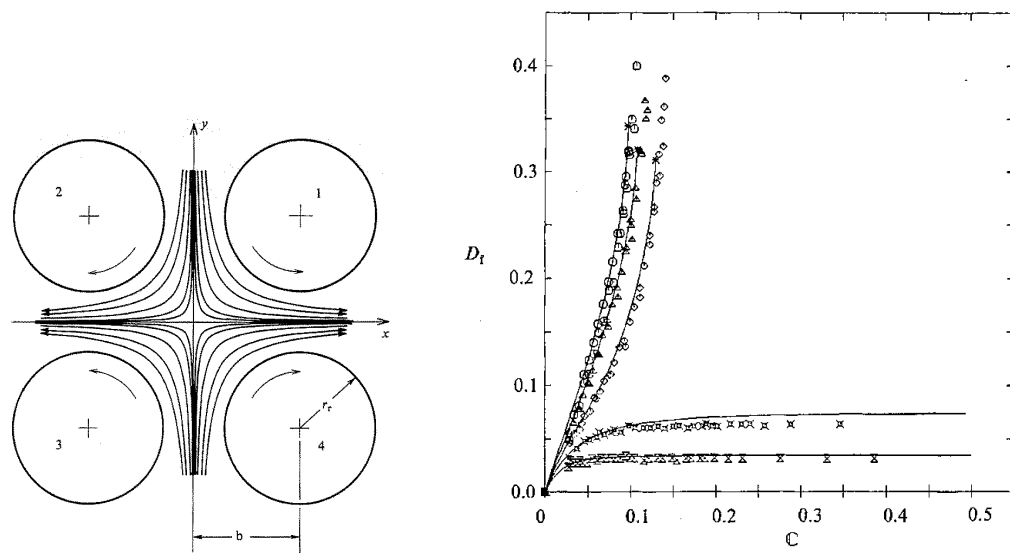


FIG. 2.9 – À gauche : Appareil à quatre rouleaux pour produire un écoulement élongationnel. À droite : Déformation d'une gouttelette de fluide visqueux en fonction du nombre capillaire $C = \eta U / \gamma$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la vorticité. La déformation la plus importante est obtenue pour une vorticité nulle. Figures tirée de Bentley et Leal, *J. Fluid Mech.* **167**, 219 (1986).