

Ondes stationnaires et progressives dans la convection de Rayleigh-Bénard en géométrie cylindrique

K. Boronska, L. S. Tuckerman

LIMSI-CNRS, BP 133, 91403 ORSAY Cedex, FRANCE kasia@limsi.fr,
laurette@limsi.fr

Résumé

La convection de Rayleigh-Bénard en géométrie cylindrique peut avoir diverses structures près du seuil. Pour un rapport d'aspect et un nombre de Prandtl particuliers, un état axisymétrique convectif subit une bifurcation secondaire de Hopf vers un état avec nombre d'onde azimutal $m = 3$. Nous avons étudié le comportement nonlinéaire au-delà de cette bifurcation, et découvert que des ondes stationnaires donnent place à des ondes progressives.

1 Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard est l'écoulement produit dans une cavité soumise à un gradient thermique verticale, mesuré par le nombre de Rayleigh Ra . Bien que la convection de Rayleigh-Bénard soit un sujet classique, la variété de motifs et de comportements dynamiques qu'elle peut engendrer continue à surprendre [1, 2]. Un exemple est la convection en boîte cylindrique, qui peut apparaître sous forme d'un système de rouleaux concentriques, ou bien prendre une forme non-axisymétrique. L'analyse linéaire de la structure au seuil de la convection a été faite [3] il y a 20 ans pour une gamme de valeurs de $\Gamma \equiv \text{rayon}/\text{hauteur}$. Les écoulements secondaires ont été étudiés pendant les 10 dernières années [4, 5, 6] pour quelques ensembles de paramètres Γ et $Pr \equiv \text{viscosité} / \text{diffusivité thermique}$.

Wanschura *et al.* ont calculé pour $\Gamma = 1.47$, $Pr = 1$ une instabilité oscillatoire (bifurcation de Hopf) vers un mode ayant un nombre d'onde azimutal $m = 3$. Une bifurcation de Hopf en présence de symétrie $O(2)$, c'est-à-dire dans un cercle ou cylindre où aucune phase ni direction est préférée, donne lieu à une concurrence entre ondes stationnaires et ondes progressives. Nous avons voulu déterminer les motifs engendrés par cette bifurcation dans ce cas.

2 Equations et Méthodes Numériques

Le système est régi par les équations de Navier-Stokes et de Boussinesq :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \Delta \mathbf{u} + Ra Pr h \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = u_z + \Delta h \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

où \mathbf{u} est la vitesse et h est la différence entre le champ de température et la solution conductive. Les conditions aux limites sont :

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{à } r = \Gamma \quad \text{et à } z = \pm 1/2 \quad (4)$$

$$h = 0 \quad \text{à } z = \pm 1/2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad \text{à } r = \Gamma \quad (6)$$

Les champs \mathbf{u} et h sont représentés par des polynômes de Chebyshev en r et en z et des séries de Fourier en θ :

$$f(r, z, \theta, t) = \sum_{j, k, m} \hat{f}_{jkm}(t) C_j(r/\Gamma) C_k(2z) e^{im\theta} + \text{c.c.} \quad (7)$$

Les équations sont alors intégrées par une méthode classique pseudospectrale, où l'évolution due aux termes nonlinéaires est calculée dans l'espace physique avec une discrétisation Adams-Bashforth et celle due aux termes linéaires est calculée dans l'espace spectrale avec une discrétisation de Crank-Nicolson. Une méthode de matrice d'influence est utilisée pour imposer l'incompressibilité à la précision machine [7].

3 Résultats

Pour $\Gamma = 1.47$ et $Pr = 1$, la solution conductive subit une bifurcation vers la convection axisymétrique stationnaire à $Ra = 1900$. Cet écoulement a la forme de rouleaux concentriques (figure 1). Puis, à $Ra = 25000$, cet état convectif subit à son tour une bifurcation de Hopf; les vecteurs propres correspondants ont un nombre d'onde azimutal $m = 3$.

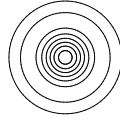


FIG. 1 – *Champ de température pour un état axisymétrique*

Au stade linéaire, l'évolution temporelle du mode $m = 3$ est décrite par

$$a_+ f_+(r, z) e^{im\theta - \omega t} + a_- f_-(r, z) e^{im\theta + \omega t} + a_+^* f_+^*(r, z) e^{-im\theta + \omega t} + a_-^* f_-^*(r, z) e^{-im\theta - \omega t} \quad (8)$$

où \pm désigne une propagation respectivement vers θ croissant ou décroissant, $f_{\pm}(r, z)$ sont deux vecteurs propres complexes, et a_{\pm} décrivent leurs amplitudes et phases, qui sont arbitraires au stade linéaire, donnant une évolution dans une espace à quatre dimensions.

L'ajout des termes nonlinéaires restreint le nombre de solutions à trois [8]:

$$f_+ \sim f_+(r, z) e^{im\theta - \omega t} + f_+^*(r, z) e^{-im\theta + \omega t} \quad (9)$$

$$f_- \sim f_-(r, z) e^{im\theta + \omega t} + f_-^*(r, z) e^{-im\theta - \omega t} \quad (10)$$

$$f_S \sim f_+ + f_- \quad (11)$$

Ceux-ci sont les ondes f_+ se propageant vers la droite, les ondes f_- se propageant vers la gauche, et les ondes stationnaires f_S qui sont une superposition exacte des deux précédentes. De ces solutions possibles, ou les deux types d'ondes progressives sont stables (figure 2a), ou les ondes stationnaires (figure 2b), ou aucune solution n'est stable.

Nous observons, d'abord, des ondes stationnaires, illustrées par les figure 3 et 4. En attendant suffisamment longtemps, ces ondes cèdent la place à des ondes progressives,

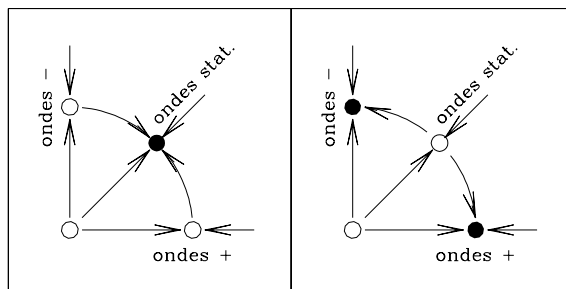


FIG. 2 – Diagramme de phases illustrant les cas où les ondes stationnaires sont stables (gauche) et où les ondes progressives sont stables (droite).

illustrées par les figure 5 et 6. Tous les états ont une périodicité spatiale de $2\pi/3$. De plus, les ondes stationnaires ont six axes de symétrie de réflexion, tandis que cette symétrie est brisée dans les ondes progressives.

L'explication pour ce comportement est que les ondes stationnaires sont stables quand une symétrie de réflexion est imposée, et faiblement instables dans le cas contraire. Les conditions initiales étant symétriques, l'écoulement évolue rapidement vers les ondes stationnaires, puis lentement vers les ondes progressives, qui sont stables.

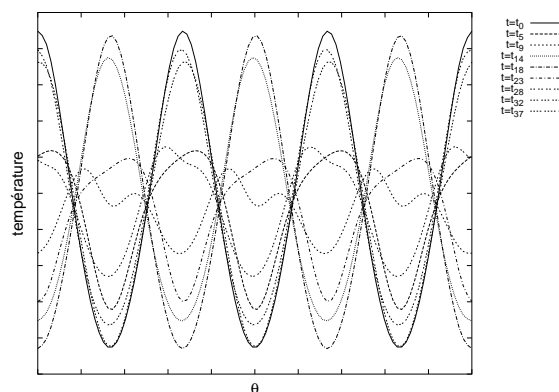


FIG. 3 – ondes stationnaires — température en fonction de l'angle pour hauteur et rayon fixés (courbes pour différents instants de temps)

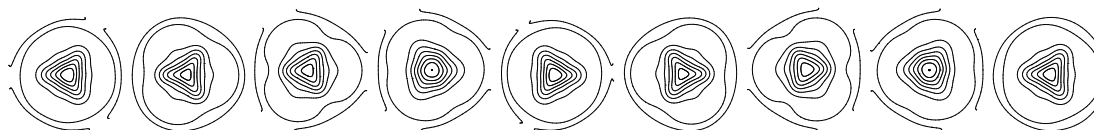


FIG. 4 – Evolution de la température pendant une phase d'ondes stationnaires

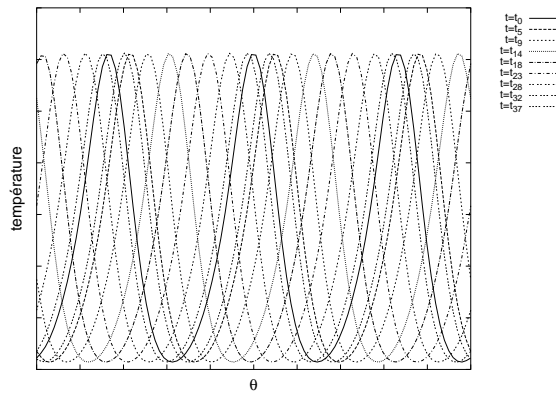


FIG. 5 – *ondes progressives — température en fonction de l'angle*



FIG. 6 – *Evolution de la température pendant une phase d'ondes progressives*

Références

- [1] V. Croquette, *Convective pattern dynamics at low Prandtl number*, Contemporary Physics, Part I: **30**, 113; Part II: **30**, 153 (1989).
- [2] E. Bodenschatz, W. Pesch & G. Ahlers, *Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection*, Annu. Rev. Fluid Mech. **32**, 709 (2000).
- [3] J.C. Buell & I. Catton, *The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below*, Journal of Heat Transfer **105**, 255 (1983).
- [4] M. Wanschura, H.C. Kuhlmann & H.J. Rath, *Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below*, J. Fluid Mech. **326**, 399 (1996).
- [5] R. Touihri, H. BenHadid & D. Henry, *On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. I. Pure thermal case*, Phys. Fluids **11**, 2078 (1999).
- [6] B. Hof, P.G.J. Lucas & T. Mullin, *Flow state multiplicity in convection*, Phys. Fluids **11**, 2815 (1999).
- [7] L.S. Tuckerman, *Divergence-free velocity fields in nonperiodic geometries*, J. Comput. Phys. **80**, 403 (1989).
- [8] M. Golubitsky & I. Stewart, *Hopf bifurcation in the presence of symmetry*, Arch. Rat. Mech. **87**, 107 (1985).