

Diagramme de bifurcation pour écoulement de Couette plan perturbé

Dwight Barkley¹ et Laurette S. Tuckerman²

¹*Mathematics Inst., Univ. of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom*

²*LIMSI-CNRS, B.P. 133, 91403 Orsay Cedex France*

¹barkley@maths.warwick.ac.uk, ²laurette@limsi.fr

Résumé

Nous étudions numériquement un écoulement de Couette plan perturbé par un ruban transverse. Cet écoulement subit une bifurcation sous-critique vers des états 3D contenant des rouleaux longitudinaux. Nous calculons le diagramme de bifurcation correspondant à ces états 3D, ainsi que la dépendance des points de bifurcation sur le diamètre du ruban. Nous trouvons deux types d'états 3D, avec des symétries différentes, que nous décrivons à l'aide d'une forme normale dépliant un point de codimension deux.

L'écoulement de Couette plan est linéairement stable à tous nombres de Reynolds mais, à la fois dans des simulations numériques et dans des expériences subit une transition vers la turbulence tridimensionnelle à $Re \approx 300$. Beaucoup d'efforts ont été consacrés [1, 2, 3] à une recherche d'états intermédiaires, plus compliqués que l'écoulement de Couette plan laminaire, mais moins compliqués que la turbulence 3D. Introduisant un fil mince dans leur expérience, une équipe à CEN-Saclay [4, 5] a observé des états stationnaires 3D qui existent sur une plage limitée de nombre de Reynolds. Notre motivation immédiate est de reproduire et comprendre ces expériences, mais, plus généralement, la stabilité de l'écoulement de Couette plan comme paradigme de la transition vers la turbulence est un domaine actif et prometteur.

Nous étudions l'écoulement engendré par deux plaques planes se déplaçant en directions opposées ($\pm x$) séparées par une distance constante (à $y = \pm 1$) dans la présence d'un ruban long et mince et de petite hauteur adimensionalisée ρ orienté dans la direction transversale (z). Dans une analyse de stabilité numérique précédente [6] nous avons déterminé que l'écoulement bidimensionnel (2D) est effectivement linéairement instable vis-à-vis de perturbations 3D. Nous cherchons maintenant à calculer les diagrammes de bifurcation correspondants. Nous utilisons `Prism` [7] qui intègre les équations de Navier-Stokes utilisant une discrétisation spatiale en éléments spectraux en x, y et en série de Fourier en z . La demi-longueur longitudinale est $L = 32$ et la période transversale est $\lambda = 4.83$. Chaque composante de vitesse est représentée par 72000 points de maillage ou fonctions de base. Pour localiser les bifurcations, nous calculons les taux de décroissance en fonction de Re .

Le diagramme de bifurcation que nous avons calculé pour un ruban qui occupe une fraction $\rho = 0.086$ de la hauteur entre les deux plaques. $\rho = 0.086$ est montré dans la figure 1. Puisque la bifurcation à Re_{3D} est souscritique, les états 3D près du point de bifurcation sont instables et existent pour $Re < Re_{3D} = 230$. Cette branche se retourne et devient stable à une bifurcation noeud-col à $Re_{SN} = 197$. Pour ρ tendant vers zero, Re_{3D} tend forcément vers l'infini, puisque l'écoulement de Couette plan non-perturbé est stable pour tout Re . Mais nous espérons que Re_{SN} atteindra une valeur finie pour $\rho \rightarrow 0$, ce qui impliquerait l'existence d'états 3D stationnaires pour l'écoulement de Couette plan. Nous avons commencé à démontrer cette tendance en calculant des points de bifurcation pour

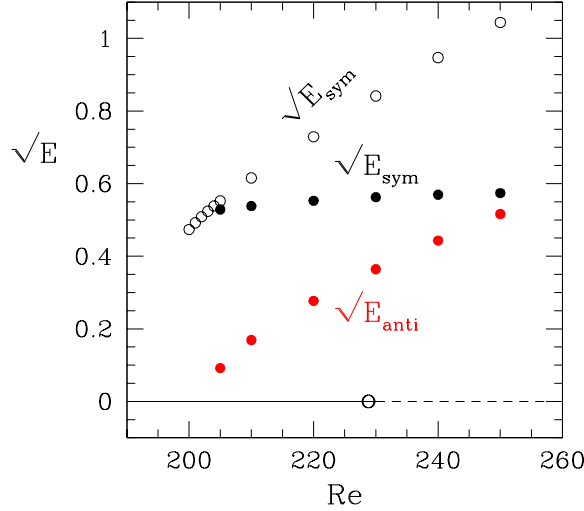


FIG. 1 – Diagramme de bifurcation pour $\rho = 0.086$. E est l'énergie dans les modes de Fourier dépendants de z . E_{sym} (E_{anti}) est l'énergie dans les modes de Fourier qui dépendent de z et qui sont symétriques (antisymétriques) en z . Axe: Branche d'écoulements 2D stables (trait plein) et instables (trait discontinu). Cercles ouverts: $\sqrt{E_{sym}}$ pour la branche 3D symétrique. Cercles fermés: $\sqrt{E_{sym}}$ et $\sqrt{E_{anti}}$ pour la branche 3D non-symétrique. Des bifurcations ont lieu à $Re_{3D} = 230$ (perte de stabilité de l'écoulement 2D), à $Re_{SN} = 197$ (noeud-col qui est le Re minimal auquel existe les états 3D), et à $Re_{PF} = 202$ (bifurcation de fourche vers les états non-symétriques).

$\rho = 0.071$ et $\rho = 0.043$. Les diagrammes complets pour ces cas restent à construire.

ρ	Re_c	Re_{SN}
0.086	230	197
0.071	282	218
0.043	550	?

La figure 1 contient deux types d'états 3D, distingués par leurs symétries. Ces états sont comparés dans la figure 2 pour $Re = 240$. L'état à gauche (qu'on appellera symétrique) possède la centrosymétrie $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ et la symétrie de réflexion $z \rightarrow -z$. Ces symétries forment le groupe $Z_2(x, y) \times Z_2(z)$. L'état à droite (qu'on appellera non-symétrique) de la figure 2 ne possède que la symétrie par rapport à l'origine $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$, c'est à dire $Z_2(x, y, z)$. Ces états sont issus d'une bifurcation de fourche à $Re_{PF} \approx 202$. La branche d'états symétriques continue à exister pour $Re > Re_{PF}$, mais n'est pas stable.

Quand deux bifurcations se succèdent très rapidement, la situation peut être décrite par une forme normale dépliant une bifurcation de codimension deux, où les bifurcations auraient lieu simultanément. Pour une bifurcation noeud-col et fourche, la forme normale s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \mu - s^2 - a^2 + O(3) \\ \dot{a} &= (\epsilon + s)a + O(3) \end{aligned}$$

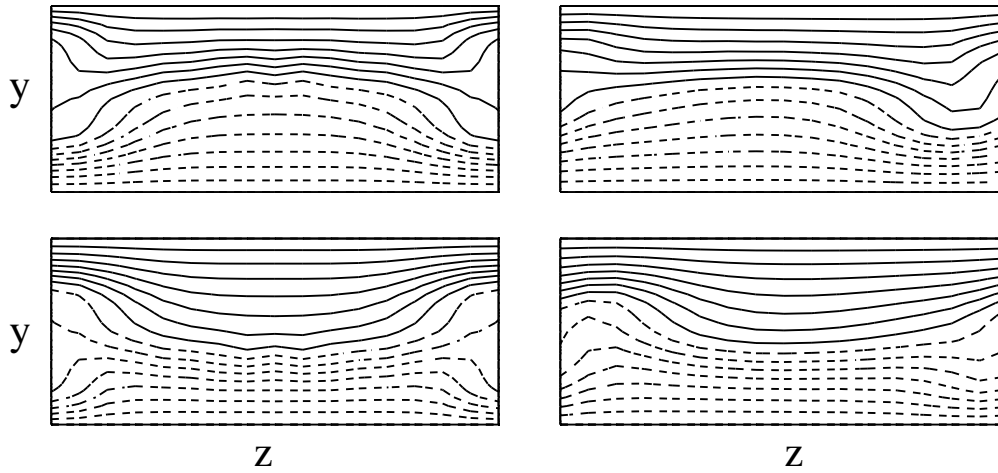


FIG. 2 – Deux états stationnaires pour $\rho = 0.086$ et $Re = 240$. A gauche sont les isovaleurs de vitesse longitudinale u dans les plans $x = -2$ (bas) et $x = 2$ (haut) pour un état possédant la centrosymétrie en (x, y) et la symétrie de réflexion en z . A droite sont les isovaleurs de u , aussi à $x = -2$ (bas) et $x = 2$ (haut) pour un état ne possédant que la symétrie par rapport à l'origine $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Les traits pleins (discontinus) indiquent u positif (négatif).

où s, a sont les amplitudes de composantes respectivement symétriques et antisymétriques, $\mu \sim Re - Re_{SN}$, ϵ est un paramètre séparant les deux bifurcations, et $O(3)$ symbolise des termes d'ordre polynômiale plus élevé. La forme normale a des points fixes :

$$\begin{cases} \text{symétriques :} & s = \sqrt{\mu}, \quad a = 0 \\ \text{non-symétriques :} & s = -\epsilon, \quad a^2 = \mu - s^2 = \mu - \epsilon^2 \end{cases}$$

et des bifurcations :

$$\begin{cases} \text{noeud-col à} & \mu = \mu_{SN} = 0 \\ \text{fourche à} & \mu = \mu_{PF} = \epsilon^2 \end{cases}$$

Les états non-symétriques sont stables, avec des vecteurs propres qui deviennent complexes pour $\mu > \mu_{cc} = 3\epsilon^2/2$. Donc la convergence vers ces états est oscillatoire et il pourrait exister une bifurcation de Hopf pour μ plus élevé menant à un cycle limite.

Dans le système hydrodynamique, la proximité de Re_{SN} et de Re_{PF} (liée à des vecteurs propres respectivement symétrique et antisymétrique) est probablement une conséquence de la brisure faible de la symétrie de translation en z . C'est à dire, les composantes 3D sont faibles par rapport à l'écoulement de base 2D. La convergence vers les états 3D non-symétriques est effectivement oscillatoire et nous recherchons actuellement une bifurcation de Hopf qui rendrait instable ces états stationnaires 3D.

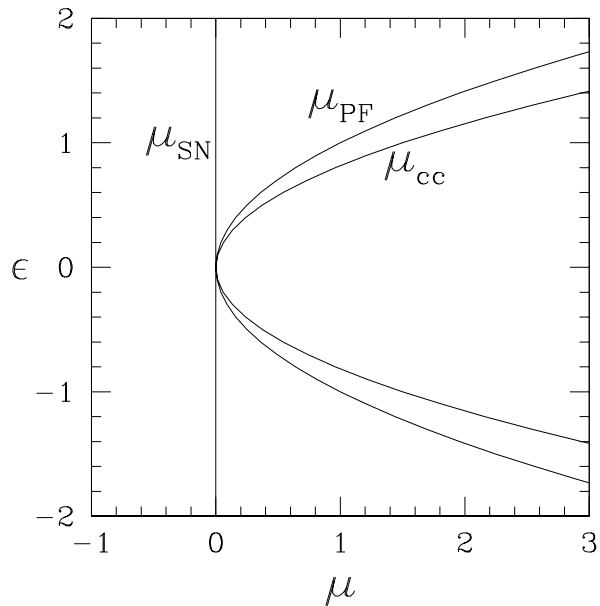


FIG. 3 – Dépliement de bifurcations fourche et noeud-col simultanées. La proximité de Re_{SN} et de Re_{PF} (déclenchées par des vecteurs propres respectivement symétrique et antisymétrique) serait une manifestation de la brisure faible de la symétrie de translation en z . Sur la branche non-symétrique, ces vecteurs propres presque dégénérés deviennent une paire complexe conjuguée, menant à l'oscillation et éventuellement à une bifurcation de Hopf.

Références

- [1] A. Cherhabili & U. Ehrenstein, *Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **342**, 159 (1997);
- [2] M. Nagata, *Tertiary solutions and their stability in rotating plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **358**, 357 (1998);
- [3] B. Eckhardt & A. Mersmann, *Transition to turbulence in a shear flow*, Phys. Rev. E **60**, 509 (1999).
- [4] S. Bottin, O. Dauchot & F. Daviaud, *Intermittency in a locally forced plane Couette flow*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4377 (1997)
- [5] S. Bottin, O. Dauchot, F. Daviaud & P. Manneville, *Experimental evidence of stream-wise vortices as finite amplitude solutions in transitional plane Couette flow*, Phys. Fluids **10**, 2597 (1998).
- [6] D. Barkley & L.S. Tuckerman, *Stability analysis of perturbed plane Couette flow*, Phys. Fluids **11**, 1187 (1999).
- [7] R.D. Henderson & G.E. Karniadakis, *Unstructured spectral element methods for simulation of turbulent flows*, J. Comput. Phys. **122**, 191 (1995).