

La convection binaire comme problème matriciel 2×2

Laurette S. Tuckerman

LIMSI-CNRS, B.P. 133, 91403 Orsay Cedex laurette@limsi.fr

Résumé

Nous proposons une nouvelle interprétation de la convection dans un mélange binaire comme la superposition d'un problème thermique et solutal avec un couplage dû à l'advection et proportionnel au paramètre de séparation S . Les propriétés de la convection binaires sont alors des conséquences simples de propriétés génériques des matrices 2×2 : leurs valeurs propres subissent *un croisement évité* si $S > 0$ et forment *une paire complexe conjuguée* si $S < 0$. Il est surprenant que les *énergies des états non-linéaires stationnaires* comme les taux de croissance puissent être interprétés de cette façon. Pour $S > 0$, le croisement évité implique que les modes propres et les solutions non-linéaires sont associés à un régime solutal ou à un régime thermique. Pour $S < 0$, l'existence de valeurs propres complexes pour les taux de croissance mène à une bifurcation de Hopf et à des bifurcations noeud-col pour les solutions non-linéaires. Les bifurcations noeud-cols disparaissent en un point de codimension deux, analogue au point de codimension deux bien connu auquel disparaît la bifurcation de Hopf.

1 L'idée de base

Considérons une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \sigma_T & \alpha \\ \beta & \sigma_C \end{pmatrix} \quad (1)$$

dont les éléments dépendent d'un paramètre de contrôle r . Ses valeurs propres sont :

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_T + \sigma_C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_T - \sigma_C}{2}\right)^2 + \alpha\beta} \quad (2)$$

Le **couplage** est le produit $\alpha\beta \sim S$ des éléments non-diagonaux. Son signe détermine la nature des valeurs propres à $r = r_{\text{int}}$, où $\sigma_T(r)$ et $\sigma_C(r)$ se croisent, comme le montre la fig. 1.

2 Modèle simple : problème thermosolutal 2D

Nous montrons dans la suite comment les équations de la convection en mélange fluide binaire se réduisent à des problèmes aux valeurs propres de matrices du type (1), présentant le comportement illustré par la figure 1. Pour cela, nous utilisons le modèle simple de convection thermosolutal bidimensionnel, dans lequel le gradient thermique et le gradient solutal sont imposés, et les conditions aux limites sont libres ; voir fig. 2. Les équations d'évolution sont écrites à l'approximation Boussinesq et la densité vérifie :

$$\rho(T, C) = \rho_0 + \rho_T(T - T_0) + \rho_C(C - C_0). \quad (3)$$

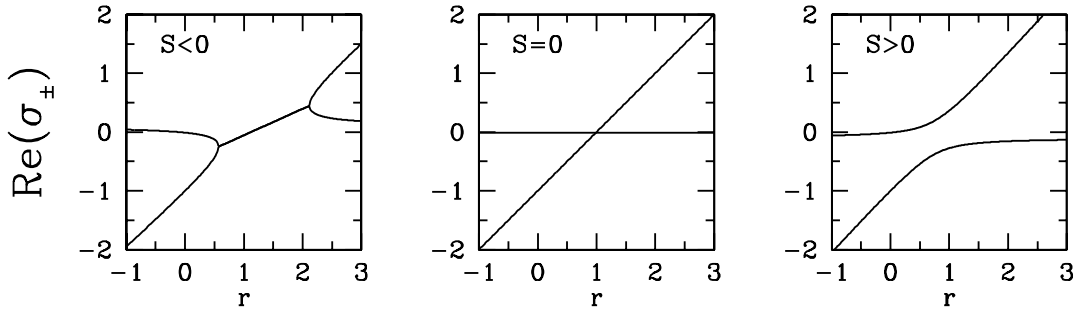


FIG. 1 – Partie réelle des valeurs propres σ_{\pm} d'une matrice 2×2 en fonction d'un paramètre de contrôle r pour différents signes du couplage. $S < 0$: formation d'une paire complexe. $S = 0$: intersection transverse. $S > 0$: croisement évité.

La température et la concentration sont maintenues à T_0, C_0 en $z = 0$ et à $T_0 - \Delta T, C_0 - \Delta C$ en $z = h$. La diffusivité thermique κ_T , la diffusivité solutal κ_C , et la viscosité cinématique ν sont décrites par deux nombres sans dimension, le nombre de Prandtl $P \equiv \nu/\kappa_T$ et le nombre de Lewis $L \equiv \kappa_C/\kappa_T$. Il reste deux paramètres sans dimension :

$$\text{nombre de Rayleigh } R \equiv \frac{g\rho_T\Delta Th^3}{\nu\kappa_T} \quad \text{paramètre de séparation } S \equiv \frac{\rho_C\Delta C}{\rho_T\Delta T} \quad (4)$$

Nous fixons $L \ll 1$ et $P \gg 1$ et nous laissons varier R et S . La vitesse est représentée par une fonction de courant $\mathbf{U} = \nabla \times \phi(x, z)\mathbf{e}_y$, satisfaisant aux conditions aux limites périodiques $\phi(0, z) = \phi(\lambda, z)$ en x et aux conditions libres $\phi = \partial_{zz}\phi = 0$ en $z = 0, h$. Nous soustrayons la solution conductive $T = T_0 - \Delta Tz/h$, $C = C_0 - \Delta Cz/h$, $\mathbf{U} = 0$. Sous forme adimensionnelle, les équations sont alors :

$$\partial_t \tilde{T} = \partial_x \tilde{\phi} + \mathbf{e}_y \cdot (\nabla \tilde{\phi} \times \nabla \tilde{T}) + \nabla^2 \tilde{T} \quad (5)$$

$$\partial_t \tilde{C} = \partial_x \tilde{\phi} + \mathbf{e}_y \cdot (\nabla \tilde{\phi} \times \nabla \tilde{C}) + L\nabla^2 \tilde{C} \quad (6)$$

$$\partial_t \nabla^2 \tilde{\phi} = PR\partial_x(\tilde{T} + S\tilde{C}) + \mathbf{e}_y \cdot (\nabla \tilde{\phi} \times \nabla \nabla^2 \tilde{\phi}) + P\nabla^4 \tilde{\phi} \quad (7)$$

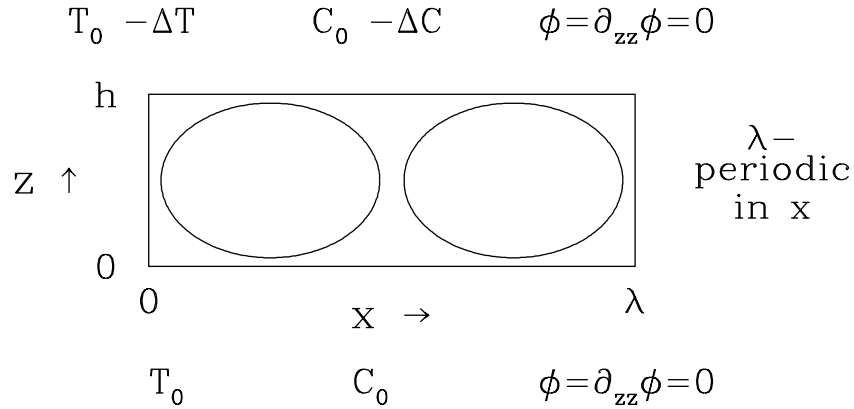


FIG. 2 – Problème thermosolutal 2D avec conditions périodiques en x et libres en z .

3 Analyse linéaire

Les modes propres de (5)-(7) sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{C} \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} (x, z, t) = \begin{pmatrix} T \cos(kx) \\ C \cos(kx) \\ \phi \sin(kx) \end{pmatrix} \sin(\pi z) \exp((k^2 + \pi^2)\sigma t) \quad (8)$$

Nous fixons k à la valeur du nombre d'onde critique $k \equiv \pi/\sqrt{2}$ et nous définissons $\gamma^2 \equiv k^2 + \pi^2$ et $r \equiv Rk^2/\gamma^6$. Si $P = \infty$ alors (7) devient $\phi = -r(T + SC)\gamma^2/k$, permettant d'éliminer ϕ . En substituant (8) en (5)-(7), nous obtenons un système 2×2 pour les amplitudes T, C :

$$\sigma \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & rS \\ r & rS-L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} \quad (9)$$

La situation est celle de la figure 1 : nous pouvons identifier l'élément diagonal $\sigma_T = r-1$ comme étant la valeur propre "thermique" avec seuil $r_T = 1$ et l'élément diagonal $\sigma_C = rS-L$ comme étant la valeur propre "solutale" avec seuil $r_C = L/S$ [1]. Les valeurs propres, l'une "thermique" et l'autre "solutale", sont couplées par Sr^2 . Elles se croisent transversalement en $r_{\text{int}} = (1-S)/(1-L)$ si $S = 0$, ont un croisement évité si $S > 0$ et forment une paire complexe si $S < 0$. Les valeurs propres de (9) sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{(r-1) + (rS-L)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(r-1) - (rS-L)}{2}\right)^2 + Sr^2} \\ &\equiv f_L \pm \sqrt{g_L} \end{aligned} \quad (10)$$

Nous retrouvons les résultats classiques en inversant (10) :

$$r = \frac{\sigma_{\pm}^2 + \sigma_{\pm}(1+L) + L}{\sigma_{\pm}(1+S) + (S+L)} \quad (11)$$

Chaque valeur de σ correspond à une valeur unique de r . Ceci implique qu'à moins que $S = -L$, il y a exactement une bifurcation fourche $\sigma = 0$ pour $r = r_{\text{PF}} = L/(S+L)$. Si $S < 0$, alors les valeurs propres sont complexes lorsque $g_L < 0$:

$$\frac{1-L}{(1+\sqrt{-S})^2} \equiv r_{c-} < r < r_{c+} \equiv \frac{1-L}{(1-\sqrt{-S})^2} \quad (12)$$

Il y a une bifurcation de Hopf si $f_L = 0$ dans cette plage, c'est à dire si $-1 < S < -L^2$:

$$r_{\text{H}} = \frac{1+L}{1+S} \quad \omega_{\text{H}}^2 = -\frac{S+L^2}{1+S} \quad (13)$$

En $S = -1$, $r_{\text{H}} \rightarrow \infty$. En $S = -L^2$, $\omega_{\text{H}} \rightarrow 0$ et r_{H} disparaît au célèbre point de codimension deux [2] en joignant la bifurcation fourche (voir fig. 3).

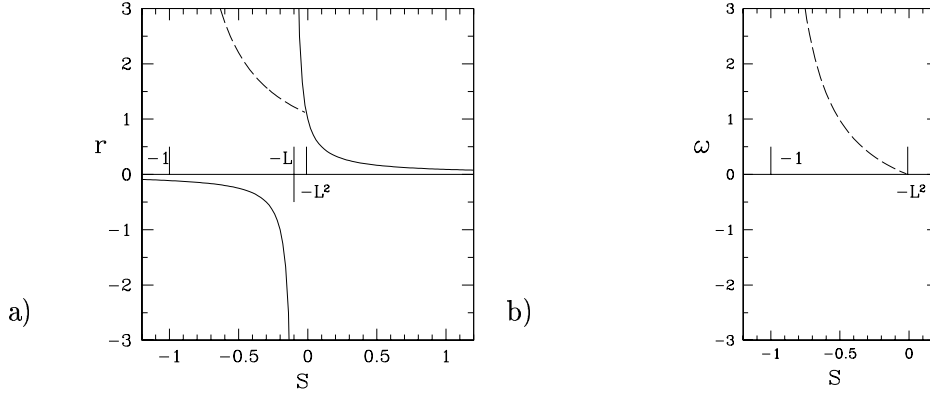


FIG. 3 – a) Seuils pour bifurcations de fourche (r_{PF} , trait plein) et de Hopf (r_{H} , trait pointillé) en fonction de S . Les lignes courtes indiquent les limites $S = -L$ pour r_{PF} et $S = -1$, $S = -L^2$ pour r_{H} . (b) Fréquence ω pour bifurcation de Hopf.

4 Analyse nonlinéaire

Les interactions non-linéaires génèrent des termes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{c} T_2 \\ C_2 \end{array} \right\} \sin(2\pi z) \quad (14)$$

En introduisant (8) et (14) dans (5)-(7) puis en tronquant à cet ordre, on obtient:

$$\partial_t \begin{pmatrix} T \\ C \\ \phi \\ T_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma^2 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & -L\gamma^2 & -k & 0 & 0 \\ -P\gamma^4 r/k & -PS\gamma^4 r/k & -P\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L4\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ C \\ \phi \\ T_2 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi k \phi T_2 \\ -\pi k \phi C_2 \\ 0 \\ \frac{\pi k}{2} \phi T \\ \frac{\pi k}{2} \phi C \end{pmatrix} \quad (15)$$

Nous cherchons les solutions *stationnaires* de (15). T_2 , C_2 , et ϕ peuvent être éliminés et le système (15) réécrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} r-1 & rS \\ Lr & L(rS-L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{r\gamma}{2} \right)^2 (T+SC)^2 \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} \quad (16)$$

Ceci est un problème aux valeurs propres pour l'amplitude au carré, proportionnel dans ce cas à l'énergie cinétique :

$$A^2 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{r\gamma}{2} \right)^2 (T+SC)^2 = \frac{k^2}{8\gamma^2} \phi^2 = \frac{k^2}{4\gamma^4} \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2 \quad (17)$$

La réduction de (15) à (16) ne suppose pas que P soit infini. Les solutions de (16) sont :

$$A^2 = \frac{(r-1) + L(rS-L)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(r-1) - L(rS-L)}{2} \right)^2 + SLr^2} \\ \equiv f_{NL}(r) \pm \sqrt{g_{NL}(r)} \quad (18)$$

Donc il existe une correspondance quantitative entre le problème (16) pour A^2 et le problème (9) pour le taux de croissance σ , utilisant : $\sigma \rightarrow A^2$, $L \rightarrow L^2$, $S \rightarrow LS$. Il existe un état stationnaire “thermique” caractérisé par $A_T^2 = (r-1)$ et un état “solutal” $A_C^2 = L(rS-L)$, avec un couplage SLr^2 . Ces états subissent ou un croisement évité ou la conjugaison complexe, selon le signe de S , comme le montre fig. 4.

Mais l’interprétation n’est pas la même. Pour $S < 0$, il existe une plage sur laquelle A^2 est complexe. Les valeurs complexes ou réelles négatives pour σ indiquent des transitoires oscillants ou décroissants tandis que A^2 doit par définition être réel positif. La transition entre A^2 complexe et réelle positive correspond à la création de deux paires de solutions A , c’est à dire à une paire de bifurcations noeud-col, qui, en traduisant (12), ont lieu en :

$$r_{\text{SN}} = \frac{1 - L^2}{(1 - \sqrt{-LS})^2} \quad (19)$$

Pour $S > 0$, le croisement évité correspond à une transition entre un régime de faible amplitude (appelé régime Soret lorsque le gradient de concentration est dû à l’effet Soret) et un régime de forte amplitude (appelé le régime Rayleigh) [3].

Pour σ , il existe un point de codimension deux en $S = -L^2$, $r = 1/(1 - L)$ auquel la bifurcation de Hopf et la bifurcation fourche coïncident ($f_L = g_L = 0$). Pour A^2 , il existe également un point de codimension deux en $S = -L^3$, $r = 1/(1 - L^2)$, auquel la bifurcation noeud-col et la bifurcation fourche coïncident ($f_{NL} = g_{NL} = 0$). Il s’agit d’une bifurcation fourche dégénérée qui n’est ni supercritique ni souscritique.

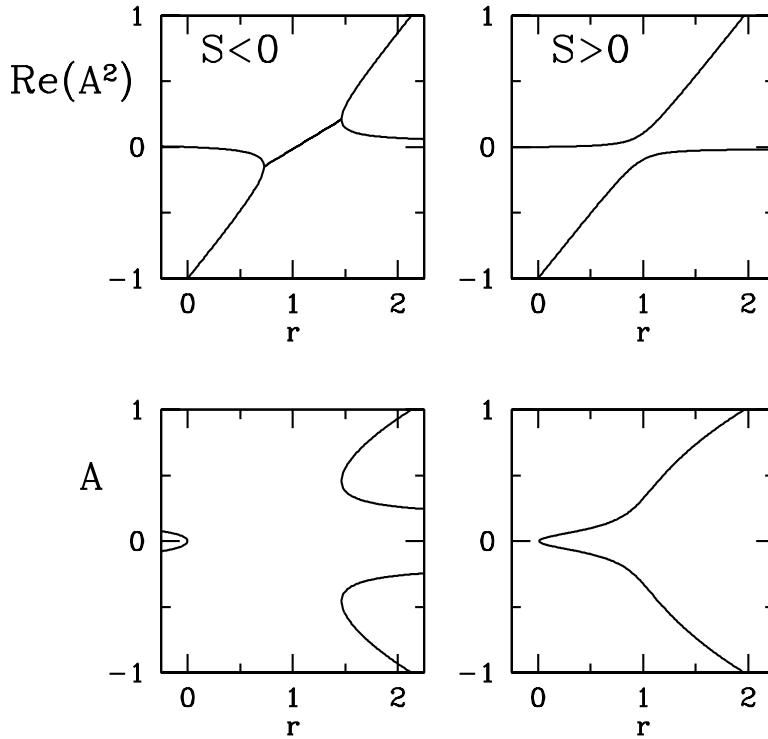


FIG. 4 – $Re(A^2)$ et A en fonction de r . **Coalescence complexe $S < 0$** : La transition entre A^2 complexe et A^2 réelle positive correspond à la création de deux paires de solutions A réelles, c’est à dire à une paire de bifurcations noeud-col. **Croisement évité $S > 0$** : Le changement de pente de A^2 correspond à un changement de courbure de A entre le régime solutal faible et le régime thermique fort.

5 Modèle hybride de type Lorenz

Finalement, nous pouvons combiner (9) et (16) en un seul système dynamique bidimensionnel:

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1 & rS \\ r & rS-L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\frac{r\gamma}{2} \right)^2 (T+SC)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} \quad (20)$$

$S = 0$ est un *centre organisateur* de ce système. (20) reproduit le diagramme de stabilité linéaire, les états stationnaires non-linéaires, et le cycle limite créé par bifurcation de Hopf et détruit par bifurcation globale.

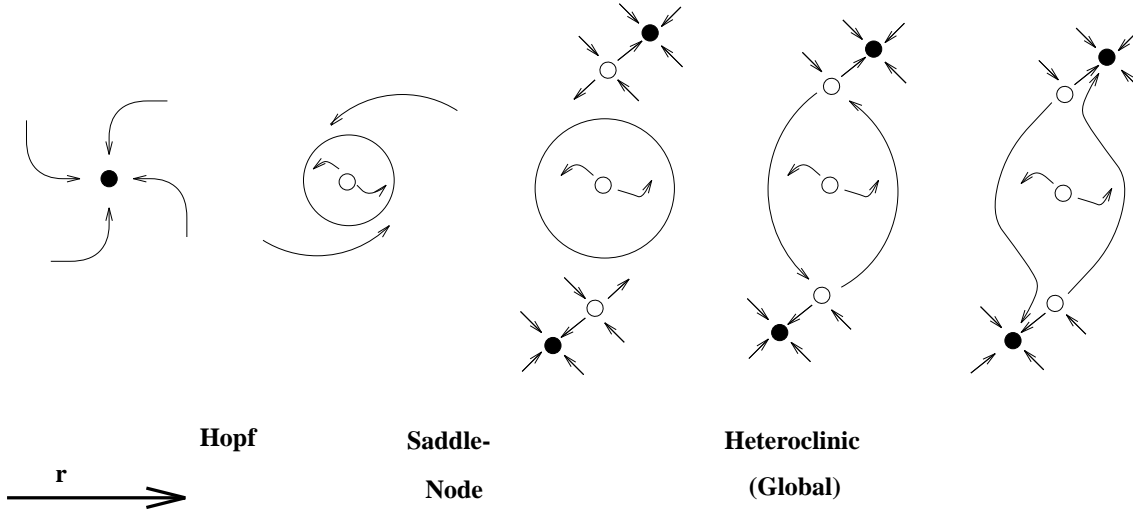


FIG. 5 – Cycle limite créé par bifurcation de Hopf et détruit par bifurcation globale.

Références

- [1] A. Bergeon, D. Henry, H. BenHadid & L.S. Tuckerman, *Marangoni convection in binary mixtures with Soret effect*, J. Fluid Mech. **375**, 143 (1998).
- [2] H.R. Brand, P.C. Hohenberg & V. Steinberg, *Codimension-2 bifurcations for convection in binary fluid mixtures*, Phys. Rev. A **30**, 2548 (1984).
- [3] W. Barten, M. Lücke, M. Kamps & R. Schmitz, *Convection in binary-fluid mixtures: 1. Extended traveling-wave and stationary states*, Phys. Rev. E **51**, 5636 (1995).