

Majeure de Mécanique
Enseignement d'Approfondissement
Instabilités et Chaos

Laurette TUCKERMAN
laurette@limsi.fr

IV. Ecoulements Ouverts

Ce chapitre résume et traduit de l'anglais des parties des deux textes suivants :

- P. J. Schmid & D. S. Henningson, *Stability and Transition in Shear Flows*, Springer, 2001.
- P. Huerre & M. Rossi, *Hydrodynamic instabilities in open flow*, dans *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, ed. C. Godrèche & P. Manneville, Cambridge University Press, 1998.

Des références à la bibliographie originale suivent le texte.

Chapitre 4

Écoulements Ouverts

4.1 Écoulements plans parallèles

4.1.1 Introduction

Nous analyserons la stabilité linéaire d'un écoulement plan parallèle $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$. De tels écoulements sont relativement faciles à trouver, car le terme non linéaire dans les équations de Navier-Stokes est nul et l'incompressibilité est identiquement satisfaite :

$$\begin{aligned}(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} &= (U(y)\mathbf{e}_x \cdot \nabla)U(y)\mathbf{e}_x = U(y)\partial_x U(y)\mathbf{e}_x = 0 \\ \nabla \cdot U(y)\mathbf{e}_x &= \partial_x U(y) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Il reste alors à résoudre

$$0 = -\nabla P + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{U} = \begin{cases} -\partial_x P + \frac{1}{R}U''(y) \\ -\partial_y P \\ -\partial_z P \end{cases}\tag{4.2}$$

Comme $\partial_x P$ ne dépend que de y et $\partial_y P = 0$, il faut que $\partial_x P$ soit une constante, qu'on appellera $-G$. Dans le cadre des fluides parfaits, $R = \infty$ et alors toutes fonctions $U(y)$ sont admises. Dans le cadre de fluides visqueux, il reste à résoudre

$$\begin{aligned}0 &= G + \frac{1}{R}U''(y) \\ U(y) &= -\frac{GR}{2}y^2 + ay + b\end{aligned}\tag{4.3}$$

4.1.2 Écoulements de Poiseuille et de Couette

Des exemples bien connus sont les écoulements de Poiseuille et de Couette plan dans une conduite définie par $-1 \leq y \leq +1$. Dans l'écoulement de Poiseuille, les bords sont stationnaires, ce qui donne $U(\pm 1) = 0$, menant à

$$U(y) = \frac{GR}{2}(1 - y^2)\tag{4.4}$$

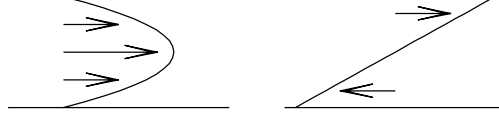


FIG. 4.1 – Ecoulements de Poiseuille (gauche) et de Couette (droite).

Dans l'écoulement de Couette, le gradient de pression G est nul, et le mouvement est engendré par la translation des parois à des vitesses différentes, par exemple $U(\pm 1) = \pm 1$, menant à

$$U(y) = y \quad (4.5)$$

(Un changement de repère fait que l'écoulement et ses propriétés ne dépendent que de la différence entre les vitesses des deux plaques et non pas des vitesses individuelles.) Les écoulements de Poiseuille et de Couette plan, ainsi que le problème analogue de Poiseuille dans un tuyau ($U(z) = 1 - r^2$), présente le même comportement : ils subissent une transition subite vers la turbulence tridimensionnelle. Ils présentent aussi le même mystère : aux nombres de Reynolds où cette transition a lieu, ces écoulements sont linéairement stables. Dans la suite, nous résumerons ce qui est connu sur ce problème classique.

4.1.3 Réduction à deux variables

Nous étudierons maintenant le comportement de perturbations $\mathbf{u} = (u, v, w)$ autour d'un écoulement plan parallèle. Le terme non linéaire linéarisé autour d'un tel écoulement donne :

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (U(y) \mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{u} = U(y) \partial_x \mathbf{u} \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) U(y) \mathbf{e}_x = v U'(y) \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les équations de Navier-Stokes linéarisées deviennent :

$$\partial_t \mathbf{u} + U \partial_x \mathbf{u} + v U' \mathbf{e}_x = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u} \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.8)$$

Nous souhaitons réduire ce système de quatre équations en quatre variables (u, v, w, p) à deux équations en deux variables, qui seront la vitesse v et la vorticité η dans la direction y . Nous commençons par prendre la divergence de (4.7) dans le but d'éliminer la pression.

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (U \partial_x \mathbf{u}) + \nabla \cdot (v U' \mathbf{e}_x) = \nabla \cdot (-\nabla p) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \Delta \mathbf{u} \right) \quad (4.9)$$

Calculant les termes individuels de (4.9) et utilisant (4.8) :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\
\nabla \cdot (U \partial_x \mathbf{u}) &= U \nabla \cdot (\partial_x \mathbf{u}) + (\nabla U) \cdot \partial_x \mathbf{u} = U \partial_x \nabla \cdot \mathbf{u} + U' \partial_x v = U' \partial_x v \\
\nabla \cdot (v U' \mathbf{e}_x) &= \partial_x (v U') = U' \partial_x v \\
\nabla \cdot (-\nabla p) &= -\Delta p \\
\nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \Delta \mathbf{u} \right) &= \frac{1}{R} \Delta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0
\end{aligned}$$

mène à

$$2U' \partial_x v = -\Delta p \quad (4.10)$$

Nous prenons maintenant le laplacien de la composante selon y de (4.7) :

$$\Delta \partial_t v + \Delta (U \partial_x v) = -\Delta \partial_y p + \frac{1}{R} \Delta^2 v \quad (4.11)$$

Nous développons les termes au milieu de 4.11 :

$$\begin{aligned}
\Delta (U \partial_x v) &= U \Delta \partial_x v + 2U' \partial_{xy} v + U'' \partial_x v \\
-\Delta \partial_y p &= \partial_y (2U' \partial_x v) = 2U' \partial_{xy} v + 2U'' \partial_x v
\end{aligned}$$

pour arriver à notre première équation, qui ne contient que v :

$$(\partial_t + U \partial_x) \Delta v = U'' \partial_x v + \frac{1}{R} \Delta^2 v \quad (4.12)$$

La deuxième équation est obtenue en prenant la composante selon y du rotationnel de (4.7) :

$$\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} + U \partial_x \mathbf{u} + v U' \mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \left(-\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u} \right) \quad (4.13)$$

Définissons

$$\eta \equiv \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \partial_z u - \partial_x w \quad (4.14)$$

et calculons les termes individuels de (4.13) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t \eta \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times (U \partial_x \mathbf{u}) &= \partial_z (U \partial_x u) - \partial_x (U \partial_x w) = U \partial_{xz} u - U \partial_{xx} w = U \partial_x \eta \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times (v U' \mathbf{e}_x) &= \partial_z (v U') = U' \partial_z v \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times (-\nabla p) &= 0 \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{R} \Delta \mathbf{u} \right) &= \frac{1}{R} \Delta \eta
\end{aligned}$$

Ceci nous donne notre deuxième équation, qui couple η et v .

$$(\partial_t + U \partial_x) \eta + U' \partial_z v = \frac{1}{R} \Delta \eta \quad (4.15)$$

Les équations (4.12) et (4.15) se complètent par des conditions aux limites. Nous supposons les conditions aux limites périodiques en x et z . En y , l'équation (4.12) est du 4^{ème} ordre en v , nécessitant 4

conditions aux limites sur v , tandis que l'équation (4.15) est du 2^{eme} ordre en η , nécessitant 2 conditions aux limites sur η . Ces conditions aux limites sont appliquées à $y = y_{\pm}$, où y_{\pm} peut être fini où infini. Nous avons

$$v = 0 \text{ à } y = y_{\pm} \quad (4.16)$$

Traduisons les conditions aux limites $u = w = 0$ à $y = y_{\pm}$ à des conditions sur v et η :

$$\partial_x u = \partial_z w = 0 \quad \implies \partial_y v = 0 \quad (4.17)$$

$$\partial_z u = \partial_x w = 0 \quad \implies \eta = 0 \quad (4.18)$$

4.1.4 Equations de Orr-Somerfeld et de Squire

Le système linéaire (4.12), (4.15) avec conditions aux limites (4.16)-(4.18) est *homogène* en x, z, t ; c'est-à-dire que ni les équations ni les conditions aux limites ne distinguent entre des valeurs différentes de x, z, t . Par contre, le système n'est pas homogène en y à la fois parce que l'écoulement plan parallèle $U(y)$ dont nous étudions la stabilité dépend de y et aussi parce que les conditions aux limites distinguent entre des valeurs différentes de y : on peut être plus près ou plus loin des parois. Une généralisation du principe qu'une équation différentielle ordinaire linéaire a comme solutions des fonctions exponentielles ou trigonométriques s'applique à ce cas, pour assurer que les solutions sont de la forme :

$$v(x, y, z, t) = \hat{v}(y)e^{i(\alpha(x-ct)+\beta z)} \quad (4.19)$$

$$\eta(x, y, z, t) = \hat{\eta}(y)e^{i(\alpha(x-ct)+\beta z)} \quad (4.20)$$

Comme nous cherchons des solutions bornées en x, z , les nombres d'onde α et β sont contraints à être réels. Par contre, nous ne précisons pas si c est réel, imaginaire, ou complexe. C'est justement ceci qui servira à distinguer entre les écoulements \mathbf{U} stables et instables. Nous remarquons que la convention dans ce domaine est de poser la dépendance temporelle $\exp(-i\alpha ct)$. Avec α réel, cette convention fait que c_i est le *taux de croissance* : les perturbations v, η sont croissantes si $c_i > 0$, sont décroissantes si $c_i < 0$, et neutres si $c_i = 0$. La valeur de c_r donne la *vitesse de phase* : une crête se déplace à vitesse c_r .

En substituant (4.19)-(4.20) dans les équations (4.12) et (4.15), et en définissant $D \equiv d/dy$ et $k^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2$, nous obtenons :

$$(-i\alpha c + U i\alpha)(D^2 - k^2)\hat{v} = U'' i\alpha \hat{v} + \frac{1}{R}(D^2 - k^2)^2 \hat{v} \quad (4.21)$$

$$-i\alpha c \hat{\eta} + U i\alpha \hat{\eta} + U' i\beta \hat{v} = \frac{1}{R}(D^2 - k^2)\hat{\eta} \quad (4.22)$$

ou encore, en divisant par $i\alpha$,

$$(U - c)(D^2 - k^2)\hat{v} = U'' \hat{v} + \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2)^2 \hat{v} \quad (4.23)$$

$$(U - c)\hat{\eta} + U' \frac{\beta}{\alpha} \hat{v} = \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2)\hat{\eta} \quad (4.24)$$

Les équations (4.23)-(4.24) avec (4.16)-(4.18) constituent un problème de valeurs propres et vecteurs propres avec valeurs propres c et vecteurs propres $\hat{v}, \hat{\eta}$. L'équation (4.23) pour \hat{v} s'appelle *l'équation de Orr-Sommerfeld* (Orr, 1907 ; Sommerfeld, 1908) et l'équation (4.24) qui couple \hat{v} et $\hat{\eta}$ s'appelle *l'équation de Squire* (Squire, 1933).

Pour les fluides parfaits, les coefficients du problème sont tous réels. Ceci implique que les valeurs propres c sont soit réelles (perturbation neutre), soit complexe conjuguées (une perturbation croissante et une autre décroissante). Ceci est une propriété des fluides parfaits et des problèmes conservatifs en général. Comme il y a conservation des volumes, croissance dans une dimension (selon un vecteur propre) doit être compensée par décroissance dans une autre. La stabilité dans les systèmes conservatifs est défini différemment que dans les systèmes dissipatifs. Dans un système conservatif, la plupart des valeurs propres ic sont imaginaires ($c_i = 0$), avec vitesse de phase ou fréquence d'oscillation non nulle ($c_r \neq 0$). Donc la plupart des directions sont neutres, ou oscillatoires. Le système devient instable quand deux valeurs $\pm c_r$ se rejoignent à zéro et ressortent dans les directions $\pm c_i$, donnant une direction croissante et une direction décroissante. Par contre, dans un système dissipatif, la plupart des valeurs propres σ sont négatives ou complexes avec parties réelles négatives. Donc la plupart des directions sont amorties. Le système devient instable quand une ou plusieurs entre elles traversent zéro pour devenir positives.

Le système (4.23), (4.24) peut s'écrire sous forme matricielle abrégée :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [(U - c) - \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2)](D^2 - k^2) - U'' & 0 \\ U' \frac{\beta}{\alpha} & (U - c) - \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ B & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ce système est triangulaire supérieur. Les valeurs et vecteurs propres peuvent alors être divisés en deux familles, les *modes de Orr-Sommerfeld* et les *modes de Squire* :

$$\begin{aligned} \text{Modes OS : } \quad \mathcal{L}_{OS}\hat{v} = 0, \hat{v} \neq 0 \\ \mathcal{L}_{SQ}\hat{\eta} = -B\hat{v} \end{aligned} \quad \text{Modes SQ : } \quad \hat{v} = 0 \\ \mathcal{L}_{SQ}\hat{\eta} = 0, \hat{\eta} \neq 0 \quad (4.26)$$

Les modes de Squire sont toujours neutres, dans le cadre des fluides parfaits $R = \infty$, et amortis, dans le cadre de fluides visqueux. Nous démontrons cela en écrivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(U - c - \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2) \right) \hat{\eta} \\ 0 &= \int dy \hat{\eta}^* \left(U - c - \frac{1}{Ri\alpha}(D^2 - k^2) \right) \hat{\eta} \\ &= \int dy U |\hat{\eta}|^2 - c \int dy |\hat{\eta}|^2 - \frac{1}{Ri\alpha} \int dy \hat{\eta}^* D^2 \hat{\eta} + \frac{k^2}{Ri\alpha} \int dy |\hat{\eta}|^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_{-1}^{+1} dy \hat{\eta}^* D^2 \hat{\eta} = \hat{\eta}^* D \hat{\eta} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} dy |D \hat{\eta}|^2 \quad (4.28)$$

où le terme de surface disparaît à cause des conditions aux limites $\hat{\eta}(\pm 1) = 0$. La partie imaginaire de (4.27) est alors :

$$c_i \int dy |\hat{\eta}|^2 = -\frac{1}{Ri\alpha} \int dy |D \hat{\eta}|^2 - \frac{k^2}{Ri\alpha} \int dy |\hat{\eta}|^2 \leq 0 \quad (4.29)$$

Pour rechercher des instabilités linéaires, nous étudions alors l'équation et les modes de Orr-Sommerfeld.

4.1.5 Transformation de Squires

Un résultat très connu concernant l'équation de Orr-Sommerfeld s'appelle le *Théorème de Squire* (Squire, 1933). Substituons les définitions :

$$\tilde{\alpha}^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 \quad (4.30)$$

$$\tilde{\beta} \equiv 0 \quad (4.31)$$

$$\tilde{R} \equiv R\alpha/\tilde{\alpha} \quad (4.32)$$

dans l'équation (4.23) :

$$(U - c)(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\hat{v} = U''\hat{v} + \frac{1}{\tilde{R}\tilde{\alpha}}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)^2\hat{v} \quad (4.33)$$

Nous voyons que (4.23) est équivalent à une autre équation de Orr-Sommerfeld où le nombre d'onde suivant x est augmenté, le nombre d'onde suivant z est mis à zéro (la perturbation ne dépend pas de z), le nombre de Reynolds est diminué, et c et \hat{v} restent inchangés. Dans le cas d'un fluide visqueux, nous supposons qu'il n'y a pas d'instabilité pour les bas nombres de Reynolds. Puis, pour α, β donnés, nous augmentons R jusqu'à ce qu'un des c_i devienne positif, et il y a instabilité. Le théorème de Squire nous dit alors que les nombres d'ondes $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = 0$ donnent une instabilité pour \tilde{R} , qui est moins que R . Pour chercher les nombres de Reynolds où (4.23) devient instable, il suffit de se limiter alors au cas bidimensionnels, avec $\beta = 0$. Dans le cas d'un fluide parfait, le théorème de Squire dit que le problème avec $\alpha, \beta > 0$ est identique au problème avec $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = 0$. Il paraîtrait alors qu'il suffit de se limiter à l'étude du cas bidimensionnel $\beta = 0$.

Remarquons alors que le problème de la stabilité des écoulements plan parallèles (sections 4.1.1 et 4.1.2) a été fortement simplifié. Nous avons réduit les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes à deux équations (section 4.1.3) Ensuite nous avons réduit ces équations à des équations différentielles ordinaires contenant deux nombres d'onde en x et z , et ensuite 'a l'équation de Orr-Sommerfeld seule (section 4.1.4) Enfin, nous avons éliminé un des nombres d'onde, (section 4.1.5), aboutissant à une équation qui relie c à R et k . C'est grâce à ces simplifications successives qu'il a été possible de déterminer rigoureusement que les écoulements de Poiseuille et de Couette sont linéairement stables pour les nombres de Reynolds qui, expérimentalement et même numériquement, mènent à la turbulence.

Comment résoudre ce dilemme ? Nous verrons dans la section 4.3 qu'il est possible que le théorème de Squires ait *retardé* le progrès de la compréhension de la transition vers la turbulence dans les écoulements plan parallèles pendant 60 ans.

4.2 Théorie classique des fluides parfaits

4.2.1 Equation de Rayleigh

Dans le cadre des fluides parfaits, l'équation de Orr-Sommerfeld s'appelle *l'équation de Rayleigh* (Rayleigh, 1880, 1887).

$$[(U - c)(D^2 - k^2) - U''] \hat{v} = 0 \quad (4.34)$$

Nous allons maintenant démontrer plusieurs propriétés classiques de (4.34). Selon le *théorème du point d'inflexion de Rayleigh* (1880), s'il existe un c_i non nul, alors $U(y)$ a un point d'inflexion. Ceci veut

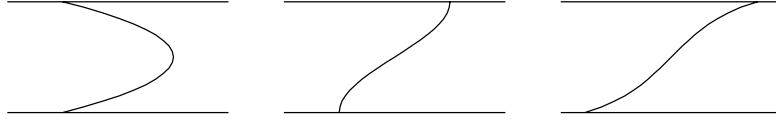


FIG. 4.2 – Trois profils de vitesse. Gauche : ce profil n'a pas de point d'inflexion $U''(y_S) = 0$ et est donc stable selon le critère de Rayleigh. Milieu : ce profil a un point d'inflexion qui pourrait être instable selon le critère de Fjortoft. Droite : ce profil a un point d'inflexion qui donne un écoulement stable selon le critère de Fjortoft.

dire que, dans le cadre des fluides parfaits, si le profil U n'a pas de point d'inflexion, alors il est stable. Commençant par (4.34), nous divisons par $-(U - c)$ (puisque $(U - c)$ ne peut pas atteindre zéro lorsque $c_i \neq 0$) ; nous multiplions par \hat{v}^* , le complexe conjugué de \hat{v} , et nous intégrons sur $[-1, 1]$:

$$0 = \int_{-1}^{+1} dy \hat{v}^* \left[(-D^2 + k^2) + \frac{U''}{U - c} \right] \hat{v} \quad (4.35)$$

Nous récrivons (4.35) avec l'aide d'une intégration par parties comme nous l'avons fait dans (4.28) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{+1} dy \left[|D\hat{v}|^2 + k^2|\hat{v}|^2 + \frac{U''}{U - c}|\hat{v}|^2 \right] \\ &= \int_{-1}^{+1} dy \left[|D\hat{v}|^2 + k^2|\hat{v}|^2 + \frac{U''(U - c_r)}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 \right] + ic_i \int_{-1}^{+1} dy \frac{U''}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour que la partie imaginaire du membre droite de (4.36) soit zéro, il faut que l'intégrale le soit (puisque $c_i \neq 0$, et pour cela, il faut que U'' change de signe sur $[-1, +1]$, et donc que U ait un point d'inflexion y_S où $U''(y_S) = 0$).

Le *théorème de Fjortoft* (Fjortoft, 1950) précise le critère du point d'inflexion : si $c_i \neq 0$, alors il faut que $U''(y)(U(y) - U(y_S))$ soit négatif sur une partie de l'intervalle $[-1, +1]$. Récrivons la partie réelle de (4.36) :

$$\int_{-1}^{+1} dy \frac{U''(U - c_r)}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 = - \int_{-1}^{+1} dy [|D\hat{v}|^2 + k^2|\hat{v}|^2] < 0 \quad (4.37)$$

Définissons $U_S \equiv U(y_S)$, et multiplions la partie imaginaire de (4.36) par $(c_r - U_S)/c_i$:

$$\int_{-1}^{+1} dy \frac{U''(c_r - U_S)}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 = 0 \quad (4.38)$$

Ajoutons (4.37) et (4.38) :

$$\int_{-1}^{+1} dy \frac{U''(U - c_r + c_r - U_S)}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 = - \int_{-1}^{+1} dy [|D\hat{v}|^2 + k^2|\hat{v}|^2] < 0 \quad (4.39)$$

Nous avons donc

$$\int_{-1}^{+1} dy \frac{U''(U - U_S)}{|U - c|^2}|\hat{v}|^2 < 0 \quad (4.40)$$

qui exige que $U''(y)(U - U_S)$ soit négatif sur une partie de l'intervalle. Nous remarquons que les critères de Rayleigh et de Fjortoft ne s'appliquent qu'aux fluides parfaits et ne peuvent que démontrer la stabilité et non pas l'instabilité.

Le *théorème du semi-cercle de Howard* (Howard, 1961) dit que les valeurs propres instables de l'équation de Rayleigh obéissent à :

$$\left(c_r - \frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min}) \right)^2 + c_i^2 \leq \frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min})^2 \quad (4.41)$$

Autrement dit, ils se situent à l'intérieur du cercle ayant la moyenne de la valeur maximale et minimale de U comme centre et la moitié de leur différence comme rayon. Nous ne démontrons pas ce théorème.

4.2.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Appliquons maintenant l'équation de Rayleigh à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Pour cela, nous étudierons la stabilité de profils linéaires par morceaux dans le domaine $-\infty < y < \infty$. Pour ce cas, il faut donner des conditions de saut à vérifier à chaque discontinuité de U . La première condition est

$$\left[\frac{\hat{v}}{U - c} \right] = 0 \quad (4.42)$$

où $]$ désigne la différence entre la quantité évaluée des deux cotés de la discontinuité. Cette condition assure que l'interface entre les deux cotés reste bien définie. La deuxième condition est

$$((U - c)D - U')\hat{v}] = 0 \quad (4.43)$$

Cette condition assure que la contrainte normale (la pression) est continue. Considérons maintenant le profil le plus simple :

$$U = \begin{cases} U_+ \text{ pour } y > 0 \\ U_- \text{ pour } y < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Dans chacun des deux domaines, l'équation de Rayleigh (4.34) prend la forme

$$(D^2 - k^2)\hat{v} = 0 \quad (4.45)$$

Compte tenu des conditions aux limites $\hat{v} = 0$ à $y = \pm\infty$, la solution est :

$$\hat{v} = \begin{cases} Ae^{-ky} \text{ pour } y > 0 \\ Be^{ky} \text{ pour } y < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Nous appliquons les conditions de saut à $y = 0$

$$0 = \frac{\hat{v}}{U - c}(0^+) - \frac{\hat{v}}{U - c}(0^-) = \frac{A}{U_+ - c} - \frac{B}{U_- - c} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} 0 &= ((U - c)D - U')\hat{v}(0^+) - ((U - c)D - U')\hat{v}(0^-) \\ &= (U_+ - c)(-kA) - (U_- - c)kB \end{aligned} \quad (4.48)$$

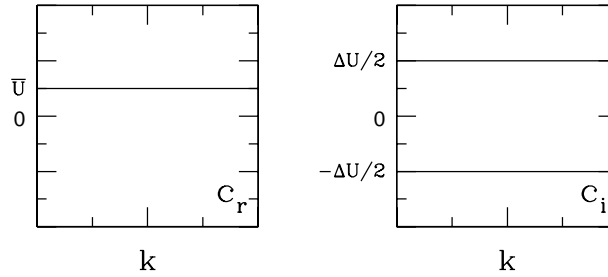


FIG. 4.3 – c_r et c_i pour instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le cas de profil constant par morceaux.

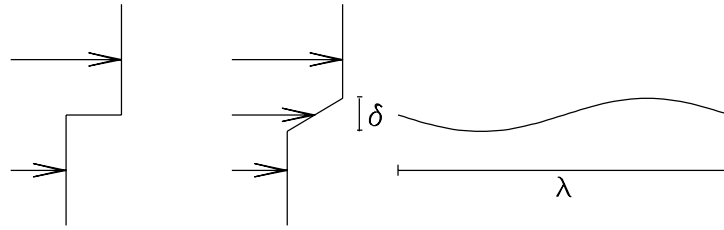


FIG. 4.4 – Gauche : un profil constant par morceaux. Milieu : un profil linéaire par morceaux. Droite : le profil linéaire par morceaux est instable aux perturbations ayant une longueur d'onde λ qui dépasse 10δ .

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_+ - c} & \frac{-1}{U_- - c} \\ (U_+ - c) & (U_- - c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

dont l'existence d'une solution exige que le déterminant soit nul :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U_- - c}{U_+ - c} + \frac{U_+ - c}{U_- - c} \\ 0 &= (U_- - c)^2 + (U_+ - c)^2 = 2c^2 - 2(U_+ + U_-)c + U_+^2 + U_-^2 \\ c &= \frac{1}{2} \left[U_+ + U_- \pm \sqrt{(U_+ + U_-)^2 - 2(U_+ + U_-)^2} \right] = \frac{U_+ + U_-}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(U_+ - U_-)^2} \\ &\equiv \bar{U} \pm i \frac{\Delta U}{2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

La perturbation décrite par (4.46) et (4.19) se propage donc avec une vitesse de phase c_r qui est la moyenne \bar{U} des deux vitesses, tandis qu'elle s'amplifie et s'amortie à un taux c_i qui est $\Delta U/2$, la moitié de la différence entre les deux vitesses. Comme c_i est toujours positif, le profil constant par morceaux (4.44) est instable : cette analyse décrit une version simplifiée de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Néanmoins, l'analyse ci-dessus calcule un c qui est indépendant du nombre d'onde k : le profil (4.44) est instable à des perturbations avec *tous* nombres d'onde k , qui se propagent tous à la même vitesse. Cette propriété n'est pas réaliste et est une conséquence de la simplicité du profil constant par morceaux. Utilisons maintenant un modèle un peu plus réaliste de l'interface où le profil de vitesse n'est pas discontinu,

mais seulement sa dérivée à $y = \pm\delta$. Le profil et la solution sont décrits dans les trois régions par :

$$\begin{aligned} y > +\delta & : U = U_+ & U' = 0 & \hat{v} = \hat{v}_+ \equiv A_+ e^{-ky} & D\hat{v}_+ = -kA_+ e^{-ky} \\ -\delta < y < +\delta & : U = \bar{U} + \frac{\Delta U}{2\delta} y & U' = \frac{\Delta U}{2\delta} & \hat{v} = \hat{v}_0 \equiv A_0 e^{-ky} + B_0 e^{ky} & D\hat{v}_0 = -kA_0 e^{-ky} + kB_0 e^{ky} \\ y < -\delta & : U = U_- & U' = 0 & \hat{v} = \hat{v}_- \equiv B_- e^{ky} & D\hat{v}_- = kB_- e^{ky} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Quand U est continu, la condition (4.42) implique que \hat{v} l'est aussi. Les conditions auxquelles la solution doit satisfaire sont :

$$0 = \hat{v}_0(\delta) - \hat{v}_+(\delta) = A_0 e^{-k\delta} + B_0 e^{k\delta} - A_+ e^{-k\delta} \quad (4.52)$$

$$0 = \hat{v}_0(-\delta) - \hat{v}_-(-\delta) = A_0 e^{k\delta} + B_0 e^{-k\delta} - B_- e^{-k\delta} \quad (4.53)$$

$$0 = [(U - c)D - U']\hat{v}_0(\delta) - [(U - c)D - U']\hat{v}_+(\delta) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} &= (U - c)[D\hat{v}_0(\delta) - D\hat{v}_+(\delta)] - [(U' \hat{v}_+(\delta)) - (U' \hat{v}_0(\delta))] \\ &= (U_+ - c)[-kA_0 e^{-k\delta} + kB_0 e^{k\delta} - (-kA_+ e^{-k\delta})] + \frac{\Delta U}{2\delta}(A_0 e^{-k\delta} + B_0 e^{k\delta}) \end{aligned}$$

$$0 = [(U - c)D - U']\hat{v}_0(-\delta) - [(U - c)D - U']\hat{v}_-(-\delta) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} &= (U - c)[D\hat{v}_0(-\delta) - D\hat{v}_-(-\delta)] - [(U' \hat{v}_-(-\delta)) - (U' \hat{v}_0(-\delta))] \\ &= (U_- - c)[-kA_0 e^{k\delta} + kB_0 e^{-k\delta} - (kB_- e^{-k\delta})] + \frac{\Delta U}{2\delta}(A_0 e^{k\delta} + B_0 e^{-k\delta}) \end{aligned}$$

Utilisant (4.52) et (4.53) pour éliminer A_+ et B_- dans (4.54) et (4.55) donne

$$0 = (U_+ - c)2kB_0 e^{k\delta} + \frac{\Delta U}{2\delta}(A_0 e^{-k\delta} + B_0 e^{k\delta}) \quad (4.56)$$

$$0 = (U_- - c)(-2k)A_0 e^{k\delta} + \frac{\Delta U}{2\delta}(A_0 e^{k\delta} + B_0 e^{-k\delta}) \quad (4.57)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta U}{2\delta} e^{-k\delta} & ((U_+ - c)(-2k) + \frac{\Delta U}{2\delta}) e^{k\delta} \\ ((U_- - c)2k + \frac{\Delta U}{2\delta}) e^{k\delta} & \frac{\Delta U}{2\delta} e^{-k\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

dont l'existence d'une solution exige :

$$c = \bar{U} \pm \frac{\Delta U}{4k\delta} \sqrt{(1 - 2k\delta)^2 - e^{-4k\delta}} \quad (4.59)$$

Maintenant c dépend de k et, plus particulièrement, peut être réel (perturbation neutre) ou complexe (perturbations croissante et décroissante). La limite entre les deux régimes est trouvée en résolvant numériquement l'équation

$$(2\hat{k} - 1)^2 = e^{-2\hat{k}} \quad (4.60)$$

qui a comme solution $\hat{k} = 0.64$. Les perturbations instables sont caractérisées par :

$$\begin{aligned} k\delta &< 0.64 \\ \frac{2\pi\delta}{\lambda} &< 0.64 \\ \lambda &> \frac{2\pi}{0.64} \delta \approx 10 \delta \end{aligned} \quad (4.61)$$

Le profil linéaire par morceaux (4.51) est instable aux perturbations dont la longueur d'onde est plus que dix fois plus grande que l'épaisseur δ de l'interface. Nous pouvons vérifier que, quand δ tend vers zéro, nous trouvons le résultat précédent (4.50) du profil discontinu.

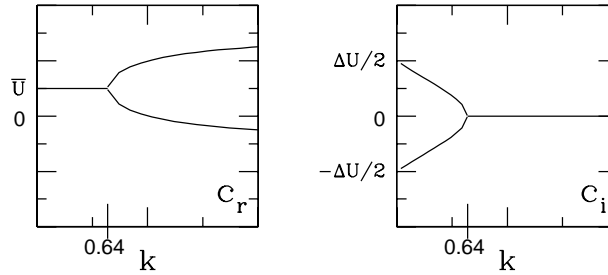


FIG. 4.5 – c_r et c_i pour instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le cas de profil linéaire par morceaux.

4.3 Au-delà des valeurs propres

4.3.1 Théorie de l'énergie

Le terme non linéaire dans les équations de Navier-Stokes est conservatif. Ceci est facilement démontré en prenant le produit scalaire de $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ avec \mathbf{U} et en écrivant :

$$\mathbf{U} \cdot [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}] = \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{U^2}{2} \right) - \frac{U^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (4.62)$$

La décomposition (4.62) peut être justifiée en écrivant :

$$U_i U_j \partial_j U_i = \partial_j \left(U_j \frac{U_i^2}{2} \right) - \frac{U_i^2}{2} \partial_j U_j \quad (4.63)$$

Nous intégrons (4.62) sur un volume qui est, soit périodique, soit tel que la vitesse s'annule aux parois. Le deuxième terme du membre droit est zéro pour un fluide incompressible. Le premier terme est transformé par le théorème de Gauss et l'intégrale sur la surface qui en résulte est nulle à cause des conditions sur les parois.

$$\int dV \mathbf{U} \cdot [(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}] = \int dV \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{U^2}{2} \right) - \int dV \frac{U^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (4.64)$$

Nous pouvons aussi effectuer un calcul semblable sur les équations *non linéaires* qui contrôlent la croissance d'une perturbation \mathbf{u} (non-infinitésimale) de l'écoulement stationnaire \mathbf{U} .

$$\mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \frac{1}{R} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (4.65)$$

Nous substituons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \\
 \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{U} \\
 -\mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} &= \nabla \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - |\nabla \mathbf{u}|^2
 \end{aligned}$$

et nous intégrons sur un volume. Comme précédemment, nous utilisons le théorème de Gauss et les conditions sur les parois (\mathbf{u} est soit nul sur les parois, soit périodique) pour supprimer tous les termes de divergences ci-dessus. Finalement, nous utilisons l'incompressibilité. Ce qui reste est l'équation de Reynolds-Orr :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int dV \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) &= - \int dV \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}] - \frac{1}{R} \int dV |\nabla \mathbf{u}|^2 \\
 \frac{dE(\mathbf{u})}{dt} &= \mathcal{P}(\mathbf{u}) - \frac{1}{R} \mathcal{D}(\mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

$\mathcal{D}(\mathbf{u})/R$ est l'énergie que perd \mathbf{u} à la dissipation visqueuse. Comment \mathbf{u} est-il alimenté en énergie ? L'écoulement de base \mathbf{U} est entretenu (par exemple, en fournissant le gradient de pression pour l'écoulement de Poiseuille, ou en obligeant les plaques à continuer à se déplacer à des vitesses différentes pour l'écoulement de Couette) et le terme $\mathcal{P}(\mathbf{u})$ mesure l'énergie échangée entre l'écoulement de base \mathbf{U} et la perturbation \mathbf{u} . L'évolution de l'énergie de \mathbf{u} provient de termes linéaires en \mathbf{u} : la dissipation visqueuse, et le terme non linéaire linéarisé autour de \mathbf{U} . On remarque que

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}(\mathbf{u}) \tag{4.67}$$

est indépendant de l'amplitude de \mathbf{u} , une conséquence du fait que l'évolution de l'énergie de \mathbf{u} provient de termes linéaires en \mathbf{u} .

Joseph (Joseph, 1976) a défini un nombre de Reynolds R_E tel que

- Pour $R < R_E$, $\dot{E}(u) < 0$ pour tous \mathbf{u} .
- Pour $R > R_E$, il existe une perturbation \mathbf{u} telle que $\dot{E}(\mathbf{u}) > 0$.

Il est possible de démontrer que

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\mathbf{u}} - \left(\frac{\mathcal{P}(\mathbf{u})}{\mathcal{D}(\mathbf{u})} \right) \tag{4.68}$$

D'autres nombre de Reynolds critiques peuvent aussi être définis. R_G est le nombre de Reynolds en dessous duquel l'écoulement finira toujours par revenir à l'écoulement de base, pour toutes perturbations possibles. R_T est le nombre de Reynolds minimal au-delà duquel la turbulence peut être maintenue. R_L est le seuil d'instabilité linéaire de l'écoulement de base. Le tableau ci-dessous montre que ces nombres de Reynolds sont différents pour les écoulements de Poiseuille et de Couette.

Écoulement	R_E	R_G	R_T	R_L
Poiseuille plan	49.5	--	1000	5772
Couette plan	20.7	125	360	∞
Poiseuille circulaire	81.5	--	2000	∞

4.3.2 Croissance transitoire

Nous revenons aux écoulements de Poiseuille et de Couette. L'écoulement de Poiseuille devient linéairement instable à $R = 5772$ (Orszag, 1971), tandis que les expériences et les simulations montrent une transition vers la turbulence à $Rey \approx 1000$. L'écoulement de Couette est linéairement stable pour tous nombre de Reynolds, tandis que les expériences (Tillmark & Alfredsson, 1992 ; Daviaud et al., 1992) et les simulations (Lundbladh & Johansson, 1991 ; Hamilton et al., 1995) montrent une transition vers la turbulence à $Rey \approx 300$. Une théorie pour expliquer ces contradictions a été proposée qui repose sur la *croissance transitoire* (Butler & Farrell, 1992 ; Trefethen et al., 1993). Considérons le problème modèle :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 1 & -2/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

La matrice étant triangulaire supérieure, on voit que les valeurs propres sont $-1/R$ et $-2/R$, toutes les deux négatives. Les vecteur propres correspondants sont :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{R} : \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = -\frac{2}{R} : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

L'évolution se comporte comme

$$\begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = v_0 \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} e^{-t/R} + (\eta_0 - v_0 R) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t/R} \quad (4.71)$$

Développons (4.71) pour t petit :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 e^{-2t/R} + Rv_0(e^{-t/R} - e^{-2t/R}) \\ &= \eta_0 e^{-2t/R} + Rv_0(1 - \frac{t}{R} + \dots - 1 + \frac{2t}{R} - \dots) \\ &= \eta_0 e^{-2t/R} + v_0 t \end{aligned} \quad (4.72)$$

Equation (4.72) montre que la différence entre exponentiels décroissants peut se traduire par une croissance algébrique pour des temps courts, appelée *croissance transitoire*, comme cela se passe pour les blocs de Jordan. Nous voyons que la matrice (4.69) ressemble de plus en plus à un bloc de Jordan lorsque $R \rightarrow \infty$. Cette tendance se remarque aussi en regardant le produit scalaire entre les vecteurs propres :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R = \sqrt{1 + R^2} \cos \phi \quad (4.73)$$

où ϕ est l'angle entre les deux vecteurs propres. Equation (4.73) montre que $\phi \rightarrow 0$ et donc que les vecteurs propres deviennent parallèles lorsque $R \rightarrow \infty$.

Cette observation simple nous libérerait du théorème de Squires. Même si la recherche des valeurs propres les plus grandes (ou les moins négatives) en fonction de R peut être effectuée en se limitant à

$\beta = 0$, ceci n'est pas le cas pour les vecteurs propres montrant la plus grande croissance transitoire. Revenant aux écoulements hydrodynamique, nous pouvons définir :

$$G \equiv \max_{\alpha, \beta, t, \hat{v}_0, \hat{\eta}_0} \frac{E(t)}{E(0)} \quad (4.74)$$

où la maximisation s'effectue sur tous les nombres d'ondes α , β , tous temps t , et toutes conditions initiales $\hat{v}_0(y)$, $\hat{\eta}_0(y)$. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant (Trefethen et al., 1993, Schmid & Henningson, 1994, Butler & Farrell, 1992) :

Écoulement	G	t_{\max}	α_{\max}	β_{\max}
Poiseuille plan	$0.20 R^2 \times 10^{-3}$	$0.076 R$	0	2.04
Couette plan	$1.18 R^2 \times 10^{-3}$	$0.117 R$	$35/R$	1.6
Poiseuille circulaire	$0.07 R^2 \times 10^{-3}$	$0.048 R$	0	1
Couche limite de Blasius	$1.18 R^2 \times 10^{-3}$	$0.778 R$	0	0.65

Le facteur d'amplification G peut être très grand. Par exemple, $G = 200$ pour l'écoulement de Poiseuille plan à $R = 1000$, et $G = 100$ pour l'écoulement de Couette plan à $R = 300$, où la transition vers la turbulence a lieu dans ces écoulements. En plus, la perturbation qui maximise G a $\alpha = 0$ (ou, dans le cas de Couette plan, $\alpha \rightarrow 0$). La valeur de β est, dans le cas de Couette plan, proche de $\pi/2$, donnant une demi-longueur d'onde π/β de 2, la distance entre les deux plaques. Ceci s'apparenterait à une structure de rouleaux longitudinaux comme les rouleaux convectives, dont les axes seraient dans la direction principale x de l'écoulement de base, une structure qui a été observée expérimentalement (Dauchot & Daviaud, 1995 ; Bottin et al., 1997, 1998) et numériquement (Barkley & Tuckerman, 1999 ; Tuckerman & Barkley, 2002).

Trefethen propose aussi d'étendre le modèle (4.69) en ajoutant des termes non linéaires qui, comme ceux de Navier-Stokes, conservent l'énergie :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 1 & -2/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} + \sqrt{v^2 + \eta^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Ces résultats sont très intéressants, mais un rapport entre la croissance transitoire et la transition vers la turbulence dans les écoulements ouverts n'a pas encore été démontré et reste très controversé.

Bibliographie

- [1] D. Barkley & L.S. Tuckerman, *Stability analysis of perturbed plane Couette flow*, Phys. Fluids **11**, 1187 (1999).
- [2] F. Daviaud, J. Hegseth, & P. Bergé, *Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2511 (1992).
- [3] S. Bottin, O. Dauchot & F. Daviaud, *Intermittency in a locally forced plane Couette flow*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4377 (1997).
- [4] S. Bottin, O. Dauchot, F. Daviaud, & P. Manneville, *Experimental evidence of streamwise vortices as finite amplitude solutions in transitional plane Couette flow*, Phys. Fluids **10**, 2597 (1998).
- [5] K.M. Butler & B.F. Farrell, *Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow*, Phys. Fluids A **4**, 1637 (1992).
- [6] O. Dauchot & F. Daviaud, *Streamwise vortices in plane Couette flow*, Phys. Fluids **7**, 901 (1995).
- [7] R. Fjortoft, *Application of integral theorems in deriving criteria for instability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex*, Geofys Publ. Oslo **17**, 1 (1950).
- [8] D.D. Joseph, *Stability of Fluid Motions I, II*. Springer, 1976.
- [9] J.M. Hamilton, J. Kim, & F. Waleffe, *Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures*, J. Fluid Mech. **287**, 317 (1995).
- [10] L. Howard, *Note on a paper of John W. Miles*, J. Fluid Mech. **10**, 509 (1961).
- [11] A. Lundbladh & A.V. Johansson, *Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **229**, 499 (1991).
- [12] W.M.F. Orr, *The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid*, Proc R Irish Acad A **27**, 9 (1907).
- [13] S.A. Orszag, *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*. J. Fluid. Mech. **50**, 689 (1971).
- [14] L. Rayleigh, *On the stability of certain fluid motions* Proc. Math. Soc. Lond. **11**, 57 (1880).
- [15] L. Rayleigh, *On the stability of certain fluid motions*, Proc. Math. Soc. Lond. **19**, 67 (1887).
- [16] S.C. Reddy & D.S. Henningson, *Energy growth in viscous channel flows*, J. Fluid Mech. **252**, 209 (1993).
- [17] P.J. Schmid & D.S. Henningson, *Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow*. J. Fluid Mech. **277**, 197 (1994)
- [18] A. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen*, Dans Atti. del 4 Congr. Internat. dei Mat. III, pp 116-124 (1908).

- [19] H.B. Squire, *On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls*, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A **142**, 621 (1933).
- [20] N. Tillmark & P.H. Alfredsson, *Experiments on transition in plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **235**, 89 (1992).
- [21] L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, S.C. Reddy, & T.A. Driscoll, *Hydrodynamic stability without eigenvalues*, Science **261**, 578 (1993).
- [22] L.S. Tuckerman & D. Barkley, *Symmetry breaking and chaos in perturbed plane Couette flow*, Theoret. Comput. Fluid Dynamics **16**, 91 (2002).