

Majeure de Mécanique
Enseignement d'Approfondissement
Instabilités et Chaos

Laurette TUCKERMAN
laurette@limsi.fr

I. Systèmes Dynamiques

Chapitre 1

Systemes Dynamiques

Un systeme dynamique est simplement :

$$\dot{x} = f(x), \quad x, f \text{ vecteurs dans } \mathcal{R}^N \quad (1.1)$$

N s'appelle le nombre de degres de liberte.

Voici des exemples de systemes dynamiques :

-Forme normale d'une bifurcation de noeud-col ($N = 1$)

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (1.2)$$

-Modele de Lorenz ($N = 3$)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y - x) \\ -xz + rx - y \\ xy - 8z/3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

-Equations de Navier-Stokes ($N \gg 1$)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (1.4)$$

Pour les equations de Navier-Stokes, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ et $N = \infty$. Dans un traitement numerique typique tridimensionnel, on utilise un maillage de l'espace avec $N_x = N_y = N_z = 100$, ce qui donne $N = 3 \times 100^3 = 3 \times 10^6$.

D'autres systemes peuvent se recrire sous forme de systemes dynamiques en ajoutant des variables supplementaires, notamment un systeme *non-autonome* :

$$\dot{x} = f(x, t) \implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, \theta) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \equiv t \quad (1.5)$$

ou un systeme d'ordre temporel plus eleve :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \text{ avec } y \equiv \dot{x} \quad (1.6)$$

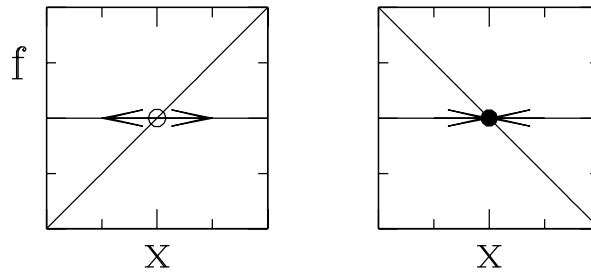


FIG. 1.1 – Point fixe instable (gauche) et point fixe stable (droite). Un point fixe de l'équation $\dot{x} = f(x)$ est solution de $f(\bar{x}) = 0$. La dynamique fait augmenter (diminuer) x là où f est positive (négative). Si $f'(\bar{x}) > 0$, les points voisins évoluent en s'écartant de \bar{x} , qui est alors instable (gauche). Si $f'(\bar{x}) < 0$, les points voisins évoluent en s'approchant de \bar{x} , qui est alors stable (droite).

1.1 Analyse de systèmes à une dimension

1.1.1 Points fixes et stabilité linéaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.7)$$

Un point fixe \bar{x} est solution de :

$$0 = f(\bar{x}) \quad (1.8)$$

La *stabilité linéaire* de \bar{x} peut être étudiée en écrivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + \epsilon(t) & (1.9) \\ \frac{d}{dt}(\bar{x} + \epsilon) &= f(\bar{x} + \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\epsilon + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\epsilon^2 + \dots \\ &\approx f'(\bar{x})\epsilon \\ \epsilon(t) &= e^{t f'(\bar{x})} \epsilon(0) & (1.10) \end{aligned}$$

Il y aura croissance exponentielle dans le temps d'une perturbation ϵ et donc instabilité de \bar{x} si $f'(\bar{x}) > 0$. Par contre si $f'(\bar{x}) < 0$, alors ϵ décroît dans le temps et \bar{x} est stable, comme le montre la figure 1.1.

Nous supposons par la suite que f dépend d'un paramètre μ , par exemple un nombre de Reynolds ou de Rayleigh mesurant un gradient de vitesse ou de température imposé à un fluide ou encore la charge sur une poutre. Une bifurcation stationnaire est un changement de nombre de points fixes (racines de f). Nous verrons que ceci est lié étroitement à la stabilité.

1.1.2 Bifurcations noeud-cols

Une fonction linéaire ne change pas de nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction de μ est le polynôme quadratique, comme celui de la figure 1.2.

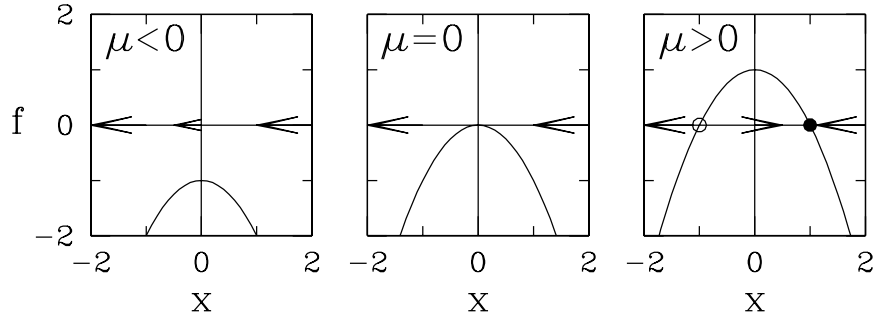


FIG. 1.2 – La fonction $f = \mu - x^2$ a 0, 1, ou 2 racines, si $\mu < 0$, $\mu = 0$, ou $\mu > 0$.

$$f(x, \mu) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}\mu + c_{20}x^2 \quad (1.11)$$

qui est supposé représenter les premiers termes d'un développement de Taylor d'une fonction quelconque. Nous récrivons (1.11) comme

$$f(x, \mu) = \frac{4(c_{00} + c_{01}\mu)c_{20} - c_{10}^2}{4c_{20}} + c_{20} \left(x + \frac{c_{10}}{2c_{20}} \right)^2 \quad (1.12)$$

Si $c_{20} < 0$ et $c_{01} > 0$, nous pouvons définir

$$\tilde{\mu} \equiv \frac{4(c_{00} + c_{01}\mu)c_{20} - c_{10}^2}{4c_{20}}, \quad \tilde{x} \equiv \sqrt{-c_{20}} \left(x + \frac{c_{10}}{2c_{20}} \right) \quad (1.13)$$

et écrire

$$f = \tilde{\mu} - \tilde{x}^2 \quad (1.14)$$

ou, redéfinissant $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$, $\tilde{x} \rightarrow x$,

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (1.15)$$

Nous appelons (1.15) la *forme normale de la bifurcation noeud-col*. Étudions le comportement de (1.15). Les points fixes de (1.15) sont

$$\bar{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu} \quad (1.16)$$

qui existent seulement pour $\mu > 0$. Leur stabilité est déterminée par

$$f'(\bar{x}_{\pm}) = -2\bar{x}_{\pm} = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \mp\sqrt{\mu} \quad (1.17)$$

Selon les signes de $f'(\bar{x})$, on voit que $\bar{x}_+ = \sqrt{\mu}$ est stable, tandis que $\bar{x}_- = -\sqrt{\mu}$ est instable.

Si $c_{20} > 0$ ou $c_{01} < 0$, on déduit une des formes suivantes

$$f(x, \mu) = -\mu + x^2 \quad (1.18)$$

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (1.19)$$

$$f(x, \mu) = -\mu - x^2 \quad (1.20)$$

Dans tous les cas, il y a transition à $\mu = 0$ entre existence d'*aucun* point fixe et de *deux* points fixes dont un est stable et l'autre instable. La figure 1.3 résume ces informations pour chaque cas sur ce qui s'appelle son *diagramme de bifurcation*.

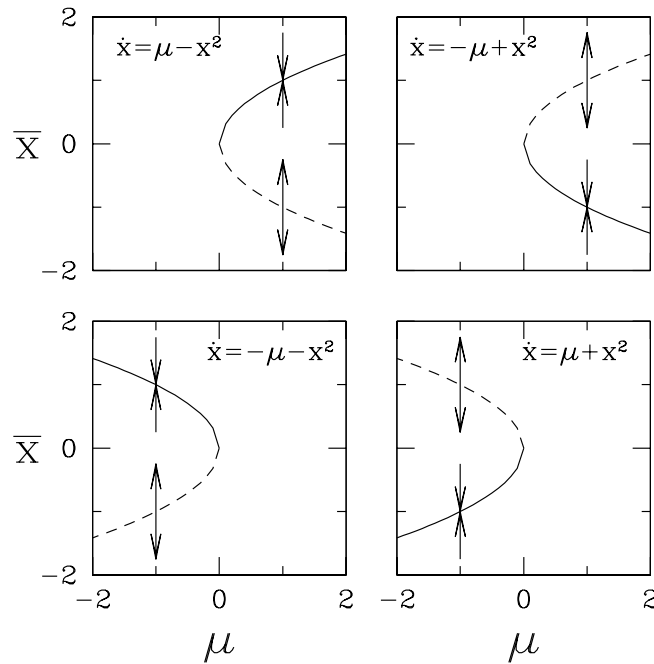


FIG. 1.3 – Diagrammes de bifurcations noeud-cols. Dans tous les cas, il existe deux branches de points fixes d'un coté de $\mu = 0$, dont une stable et une instable, et pas de points fixes de l'autre coté.

1.1.3 Bifurcations fourches

Pour des raisons de symétrie, auxquelles nous reviendrons plus tard, il se peut que $f(x)$ soit restreint à être une fonction impaire en x . Il n'y a alors pas de terme constant ou quadratique en x , et il faut ajouter un terme cubique, comme dans la figure 1.4, pour qu'une bifurcation ait lieu.

Nous pouvons réduire un polynôme cubique à ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (1.21)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \quad (1.22)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3 \quad (1.23)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3 \quad (1.24)$$

Les diagrammes de bifurcation correspondants aux quatre cas sont donnés dans la figure 1.4. L'équation (1.21) s'appelle la forme normale d'une *bifurcation fourche supercritique*. Nous calculons ses points fixes :

$$0 = \bar{x}(\mu - \bar{x}^2) \implies \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Nous calculons la stabilité de ces points fixes.

$$f'(\bar{x}) = \mu - 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (1.26)$$

Le point fixe $\bar{x} = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les branches de nouveaux points fixes $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand

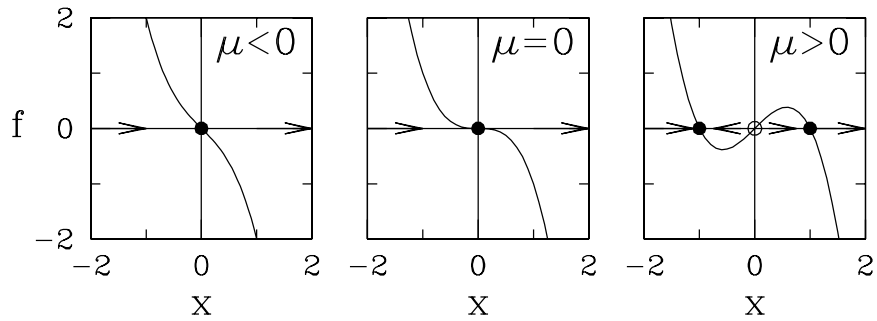


FIG. 1.4 – La fonction $f = \mu x - x^2$ a 1 ou 3 racines, selon si $\mu < 0$, $\mu = 0$, ou $\mu > 0$.

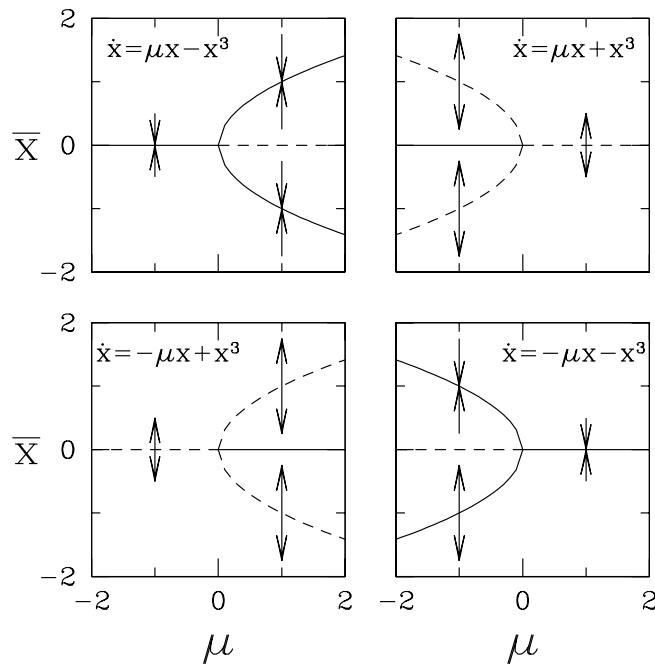


FIG. 1.5 – Diagrammes de bifurcations de fourche. Une branche de points fixes “donne naissance” à deux nouvelles branches en traversant une valeur critique de μ . Si les nouvelles branches sont stables, alors la bifurcation s’appelle fourche supercritique ; si elles sont instables, elle s’appelle fourche souscritique.

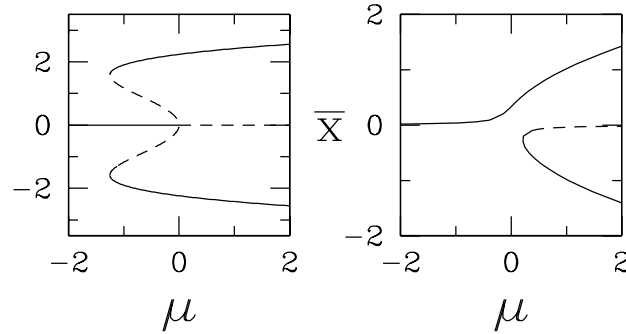


FIG. 1.6 – Gauche : diagramme de bifurcation pour $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5/10$. Le terme d'ordre cinq sert à stabiliser les trajectoires d'une bifurcation de fourche souscritique. Ceci donne lieu à deux bifurcations noeud-cols. En fonction de μ , il y a d'abord un point fixe, puis cinq, puis finalement trois points fixes. Droite : diagramme de bifurcation fourche imparfaite $\dot{x} = 1/27 + \mu x - x^3$. Le terme constant modélise une imperfection, qui fait préférer au système une des deux branches. La bifurcation de fourche a été transformée en bifurcation noeud-col.

ils existent. Faisons le même calcul pour (1.22), qui est la forme normale d'une *bifurcation fourche souscritique*.

$$0 = \bar{x}(\mu + \bar{x}^2) \implies \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

$$f'(\bar{x}) = \mu + 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (1.28)$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe $\bar{x} = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$. Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes $\pm\sqrt{\mu}$ existent dans la région où $\bar{x} = 0$ est stable, et sont toujours instables.

Notez que la plupart des trajectoires dans le cas souscritique évoluent vers l'infini. Sachant que les trajectoires restent bornées, on ajoute parfois à (1.22) un terme stabilisant d'ordre plus élevé, illustré dans la figure 1.6.

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - \alpha x^5 \quad (1.29)$$

Les points fixes de (1.29) sont :

$$0 = \bar{x}(\mu + \bar{x}^2 - \alpha\bar{x}^4) \implies \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\mu})/(2\alpha)} & \text{pour } -1 < 4\alpha\mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{(1 - \sqrt{1 + 4\alpha\mu})/(2\alpha)} & \text{pour } -1 < 4\alpha\mu < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

En effet, (1.29) contient trois bifurcations : une bifurcation fourche souscritique à $\mu = 0$ et deux bifurcations noeud-cols à $\mu = -1$. Une évolution obéissant à (1.29) présente de l'*hystérésis*. En commençant à $\bar{x} = 0$ et $\mu < -1$ et augmentant μ , une transition a lieu à $\mu = 0$ à la bifurcation fourche souscritique où $\bar{x} = 0$ devient instable. Si ensuite on diminue μ , une transition a lieu à $\mu = -1$, où les bifurcations noeud-cols détruisent les branches non-nulles.

Une autre variante, illustrée aussi dans la figure 1.6, est la *bifurcation fourche imparfaite*, dont l'équation est donnée par

$$\dot{x} = \alpha + \mu x - x^3 \quad (1.31)$$

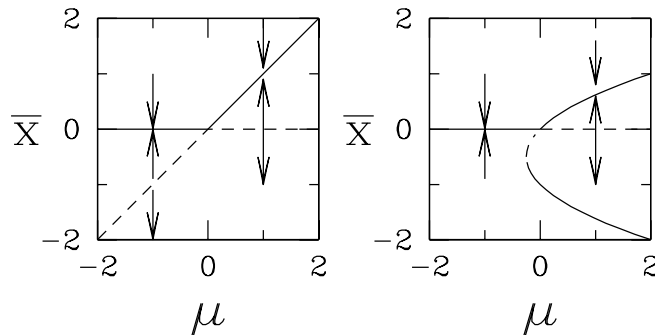


FIG. 1.7 – Diagrammes de bifurcation pour une bifurcation transcritique (gauche) et transcritique avec terme cubique (droite) donnant lieu à une bifurcation noeud-col supplémentaire stabilisante (droite).

Le terme constant sert à “briser” la bifurcation de fourche : une des deux nouvelles branches devient une continuation de la branche de départ et l’autre branche se sépare. La bifurcation de fourche est transformée en bifurcation noeud-col.

1.1.4 Bifurcations transcritiques

Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d’une *bifurcation transcritique*, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (1.32)$$

L’analyse usuelle donne

$$0 = \bar{x}(\mu - \bar{x}) \implies \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \mu \end{cases} \quad (1.33)$$

$$f'(\bar{x}) = \mu - 2\bar{x} = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ -\mu & \text{pour } \bar{x} = \mu \end{cases} \quad (1.34)$$

Donc $\bar{x} = 0$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$, tandis que $\bar{x} = \mu$ fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité. De la même façon que pour la bifurcation de fourche souscritique, un terme d’ordre plus élevé est parfois ajouté à la forme normale afin de stabiliser les trajectoires ; voir la figure 1.7.

1.1.5 Conditions générales

Les comportements expliqués ci-dessus sont illustrés par le *déploiement* de la fourche, qui est la classification du comportement de tous polynômes cubiques

$$f(x) = \alpha + \mu x + \beta x^2 - x^3 \quad (1.35)$$

en fonction de paramètres α et β . La figure 1.8 montre tous les diagrammes possibles, qui contiennent des bifurcations fourches (pour $\alpha = \beta = 0$), transcritiques (pour $\alpha = 0$) et noeud-cols.

Si f est une fonction quelconque, exprimable sous forme de développement de Taylor, voici les conditions générales auxquelles $f(x, \mu)$ doit obéir afin que $(\bar{x}, \bar{\mu})$ soit un point du type désigné.

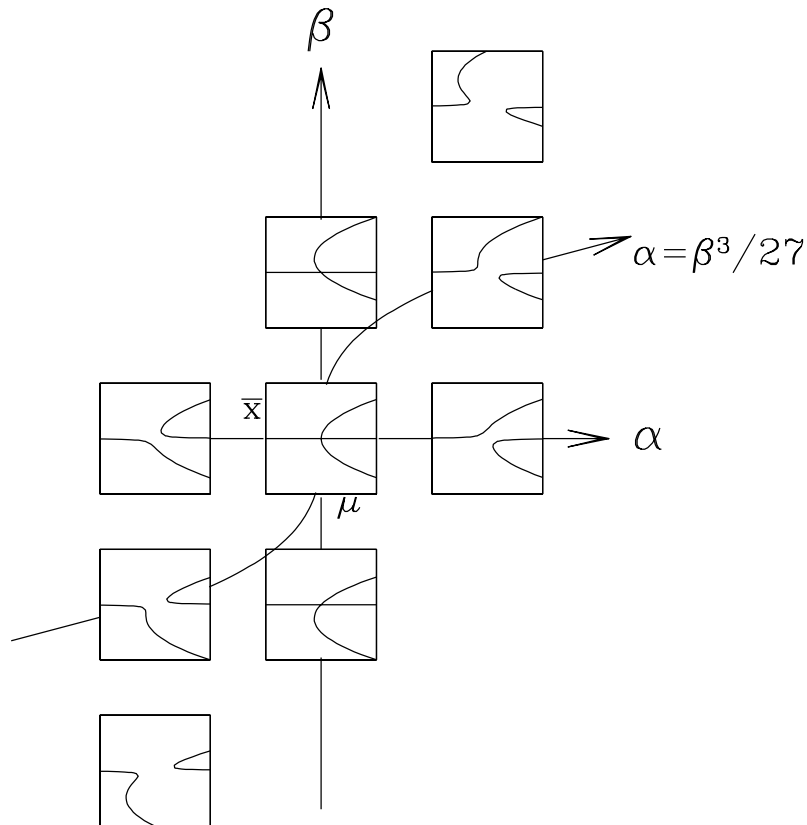


FIG. 1.8 – Déploiement de la fourche. Les diagrammes de bifurcation (μ, \bar{x}) montrant les racines de $0 = \alpha + \mu x + \beta x^2 - x^3$ pour neuf valeurs de (α, β) . La bifurcation fourche a lieu pour $\alpha = \beta = 0$; des bifurcations transcritiques pour $\alpha = 0$. Pour $0 < \alpha < \beta^3/27$ et $\beta^3/27 < \alpha < 0$, il y a trois bifurcations noeud-cols ; pour d'autres valeurs il y en a une.

	f	f_x	f_μ	f_{xx}	$f_{x\mu}$	f_{xxx}
état stationnaire	0					
bifurcation	0	0	$\neq 0$			
noeud-col	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$		
transcritique	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	
fourche	0	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$

Les formes normales (1.15), (1.21), (1.22), (1.32) sont des développements limités de f autour de $(\bar{x}, \bar{\mu})$ d'une fonction obéissant aux conditions ci-dessus, après redefinition de x, μ de la façon décrite dans (1.11)-(1.15).

1.1.6 Des exemples mécaniques simples

Un wagon qui roule sans frottement est attaché à deux batons horizontaux reliés entre eux par un ressort, illustré dans la figure 1.9. Une force horizontale mesurée par P est appliquée au wagon. Trois positions sont possibles : les deux batons peuvent être alignés, ou ils peuvent se plier, à un angle θ qui peut être

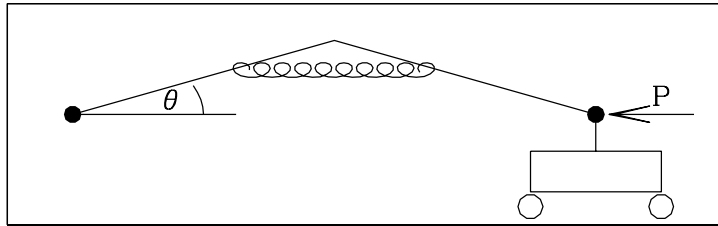


FIG. 1.9 – Wagon roulant et ressort. La variation de l'angle θ en fonction de la charge P est décrite par une bifurcation de fourche.

positif ou négatif. L'énergie potentielle est :

$$V(\theta, P) = \frac{\theta^2}{2} + 2P(\cos \theta - 1) \quad (1.36)$$

Les états stationnaires sont solutions de

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \theta - 2P \sin \theta \quad (1.37)$$

Le nombre de solutions change quand

$$0 = \frac{d}{d\theta} [\theta - 2P \sin \theta]_{\theta=0} = [1 - 2P \cos \theta]_{\theta=0} = 1 - 2P \quad (1.38)$$

Une boucle de fil de longueur L se penchera dans un sens ou l'autre quand L devient trop grand. Cette bifurcation fourche est *souscritique* : en diminuant la longueur, la boucle ne se redresse qu'à une longueur L_0 plus petite que la valeur L_c auquel elle s'est penchée pendant l'augmentation, comme le montre la figure 1.10.

Une charge P est appliquée sur une poutre parfaitement droite et symétrique, qui flambra soit à gauche, soit à droite, selon la figure 1.11. Ceci correspond à une bifurcation de fourche. Si la poutre possède un défaut, le flambage aura lieu systématiquement de ce côté. Le flambement dans l'autre direction est possible, mais seulement en forçant le système d'une façon ou une autre. Ceci correspond à une bifurcation de fourche imparfaite.

1.2 Analyse de systèmes à deux ou plusieurs dimensions

Comme précédemment, nous considérons un système dynamique :

$$\dot{x} = f(x), \quad x, f \in \mathcal{R}^N \quad (1.39)$$

dont les points fixes sont solutions de :

$$0 = f(\bar{x}) \quad (1.40)$$

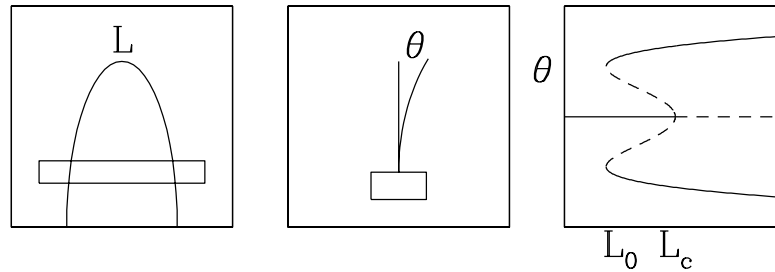


FIG. 1.10 – Une boucle de fil de longueur L penchera à gauche ou à droite quand la longueur dépasse L_c . En diminuant la longueur, elle restera penchée jusqu'à ce que la longueur devienne moins que L_0 . Gauche : vue d'avant. Milieu : vue de côté. Droite : diagramme de bifurcation de fourche souscritique.

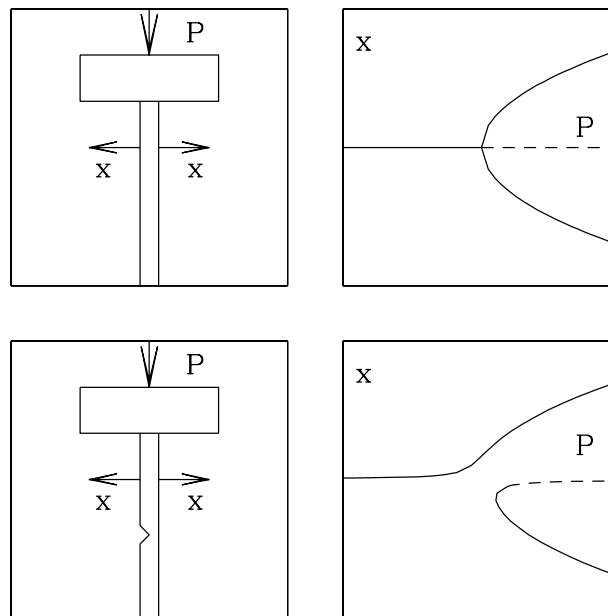


FIG. 1.11 – Une poutre parfaite soumise à une charge flambera à droite ou à gauche indifféremment, ce qui se traduit par une bifurcation de fourche. Une faiblesse d'un côté de la poutre favorisera le flambage dans cette direction, ce qui se traduit par une bifurcation de fourche imparfaite.

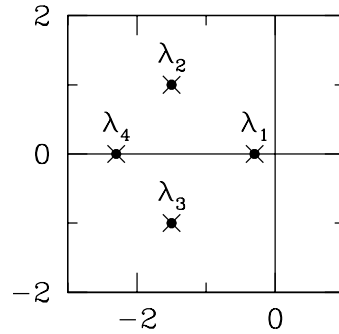


FIG. 1.12 – Valeurs propres d'un Jacobien ayant deux valeurs propres réelles et une paire de valeurs complexes conjuguées, avec $Re(\lambda_4) < Re(\lambda_3) = Re(\lambda_2) < Re(\lambda_1) < 0$.

Pour étudier la stabilité de \bar{x} , nous perturbons par $\epsilon(t) \in \mathcal{R}^N$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\bar{x} + \epsilon) &= f(\bar{x} + \epsilon) \\
 \frac{d\epsilon}{dt} &= f(\bar{x}) + Df(\bar{x})\epsilon + \epsilon D^2 f(\bar{x})\epsilon + \dots \\
 \frac{d\epsilon_i}{dt} &= f_i(\bar{x}) + Df(\bar{x})_{ij}\epsilon_j + \epsilon_i [D^2 f(\bar{x})]_{ijk}\epsilon_k + \dots \\
 &= f_i(\bar{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\epsilon_j + \epsilon_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x})\epsilon_k + \dots
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Par le même raisonnement que précédemment ($f(\bar{x}) = 0$, termes quadratiques en ϵ négligeables) (1.41) se réduit au système linéaire différentiel :

$$\dot{\epsilon} = Df(\bar{x})\epsilon \tag{1.42}$$

$Df(\bar{x})$ est une matrice, nommé le *Jacobien* de f . (Quand x est une variable continue, $Df(\bar{x})$ s'appelle *dérivée de Fréchet*.) La solution de (1.42) est

$$\epsilon(t) = e^{Df(\bar{x})t}\epsilon(0) \tag{1.43}$$

Le comportement de (1.43) dépend de ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (ordonnées telles que $Re(\lambda_1) \geq Re(\lambda_2) \geq \dots$). La question de "stable ou instable ?" devient "stable ou instable *dans quelles directions* ?" Le point fixe \bar{x} est considéré comme étant linéairement stable si les parties réelles de *toutes* les valeurs propres de $Df(\bar{x})$ sont négatives, et instable si même *une* des valeurs propres a une partie réelle positive. Le raisonnement derrière cela est que des perturbations initiales aléatoires contiendront des composantes dans toutes les directions. S'il y a instabilité dans une des directions, alors cette composante va croître et nous nous écarterons donc de \bar{x} dans cette direction.

Dans la situation la plus simple, on a $0 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots$, et λ_1 change de signe à une bifurcation. En projetant sur le vecteur propre correspondant à λ_1 , c'est à dire en prenant le produit scalaire avec le vecteur propre adjoint v_1^T qui satisfait à :

$$v_1^T Df(\bar{x}) = v_1^T \lambda_1 \tag{1.44}$$

on obtient une équation à une dimension. (Dans les autres directions, le comportement est inintéressant : il n'y a que contraction le long de ces directions vers le point fixe.) Les premiers termes du développement de Taylor de cette équation correspondent à une bifurcation noeud-col, fourche, ou transcritique. C'est de cette façon que l'on obtient des bifurcations dans les systèmes physiques à grand nombre de degrés de liberté, tels que la convection thermique. Nous soulignons la correspondance entre des systèmes physiques réalistes et les équations simples polynomiales que nous venons d'étudier :

- Equations compliquées en $N \gg 1$ variables.
Recherche de points fixes \bar{x} , de leurs Jacobiens $Df(\bar{x})$ et de leurs spectres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.
Bifurcation si la partie réelle d'une d'elle change de signe.
- Projection sur vecteur propre adjoint correspondant \implies Fonction d'une seule variable.
- Développement de Taylor autour du point fixe.
Troncature minimale donnant comportement observé \implies Forme normale de bifurcation.

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que de situation unidimensionnelle ou reductible à une dimension. Des situations plus compliquées peuvent se produire en deux dimensions, notamment quand λ_1 et λ_2 font partie d'une paire complexe conjuguée. Décrivons maintenant cette situation et d'autres qui peuvent se produire en deux dimensions. Nous commencerons par décrire la bifurcation de Hopf dans le cadre *nonlinéaire*, puis ensuite nous décrirons les comportements possibles de l'équation *linéaire* (1.43).

1.2.1 Bifurcation de Hopf

Si λ_1, λ_2 sont une paire complexe conjuguée, avec $\lambda_1 = \mu + i\omega$, $\lambda_2 = \mu - i\omega$, on a une *bifurcation de Hopf*, dont une des formes normales est :

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z - |z|^2 z \quad (1.45)$$

Ecrivant $z = x + iy$, (1.45) devient

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + i\omega)(x + iy) - (x^2 + y^2)(x + iy) \quad (1.46)$$

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - (x^2 + y^2)x \quad (1.47)$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y - (x^2 + y^2)y \quad (1.48)$$

Nous pouvons aussi utiliser une représentation polaire $z = re^{i\theta}$. La forme normale (1.45) devient alors :

$$(\dot{r} + ir\dot{\theta})e^{i\theta} = (\mu + i\omega)re^{i\theta} - r^2 re^{i\theta} \quad (1.49)$$

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad (1.50)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (1.51)$$

L'équation (1.50) décrit une fourche dans la direction radiale, et (1.51) décrit une rotation. Les points fixes de (1.50) sont $r = 0$ et $r = \sqrt{\mu}$ (ou nous gardons seulement $r > 0$). Pour la forme normale, nous pouvons calculer le *cycle limite*, c'est-à-dire la solution périodique de (1.45) vers laquelle tendent toutes conditions initiales.

$$z(t) = \sqrt{\mu} e^{i\omega(t-t_0)} \quad (1.52)$$

Comme pour la fourche, il existe aussi une version *souscritique* pour la bifurcation de Hopf, dont la forme normale est

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + |z|^2 z \quad (1.53)$$

Le comportement des systèmes (1.45) et (1.53) dans le voisinage d'une bifurcation de Hopf est montré dans la figure 1.13.

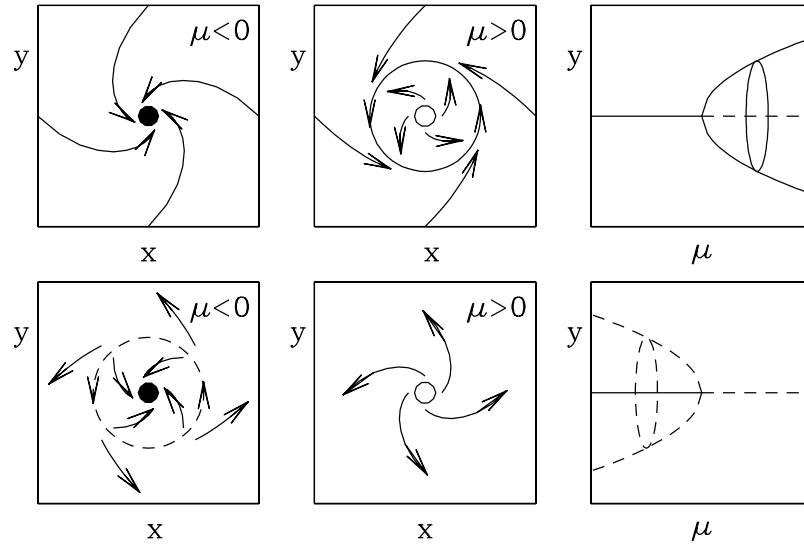


FIG. 1.13 – Bifurcations de Hopf. Haut : cas supercritique, $\dot{z} = \mu z - |z|^2 z$. Bas : cas souscritique, $\dot{z} = \mu z + |z|^2 z$. A gauche et au milieu : comportement des trajectoires pour $\mu < 0$ et pour $\mu > 0$. Les points et cercles pleins correspondent à des points fixes et cycles limites stables. Les points vides et cercles en pointillé correspondent à des points fixes et cycles limites instables. Droite : diagrammes de bifurcation montrant les solutions en fonction de μ . Les courbes pleines correspondent à des branches de solutions stables ; les courbes pointillées à des branches de solutions instables. Les ellipses représentent un membre de la branche de cycles limites.

1.2.2 Comportement linéaire de systèmes bidimensionnels

Effectuons l'analyse de stabilité linéaire du point fixe $\bar{z} = 0$, correspondant à $\bar{x} = \bar{y} = 0$ perturbé par $\epsilon_x + i\epsilon_y$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda = \mu \pm i\omega$. Le système linéaire (1.54) se comporte comme :

$$\epsilon_x(t) = e^{\mu t} [\cos(\omega t)\epsilon_x(0) - \sin(\omega t)\epsilon_y(0)] \quad (1.55)$$

$$\epsilon_y(t) = e^{\mu t} [\sin(\omega t)\epsilon_x(0) + \cos(\omega t)\epsilon_y(0)] \quad (1.56)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix} (t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix} (0) \quad (1.57)$$

C'est à dire, l'équation différentielle matricielle

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon \quad (1.58)$$

a comme solution

$$\epsilon(t) = e^{At}\epsilon(0) \quad (1.59)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos(\omega t) & -e^{\mu t} \sin(\omega t) \\ e^{\mu t} \sin(\omega t) & e^{\mu t} \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Nous pouvons classifier tous les comportements linéaires possibles d'un point fixe d'un système à deux dimensions. Ceux-ci sont :

Nom et classification	Matrice	Comportement
Noeud : stable ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) instable ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$)	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t} x_2(0) \end{aligned}$
Noeud étoile : stable ($\lambda < 0$) instable ($\lambda > 0$)	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda t} x_1(0) \\ x_2 &= e^{\lambda t} x_2(0) \end{aligned}$
Noeud dégénéré : stable ($\lambda < 0$) instable ($\lambda > 0$)	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda t} (x_1(0) + t x_2(0)) \\ x_2 &= e^{\lambda t} x_2(0) \end{aligned}$
Points fixes non-isolés : stable ($\lambda < 0$) instable ($\lambda > 0$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0) \\ x_2 &= e^{\lambda t} x_2(0) \end{aligned}$
Col : $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t} x_2(0) \end{aligned}$
Spirale : stable ($\mu < 0$) instable ($\mu > 0$)	$\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$
Centre :	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$

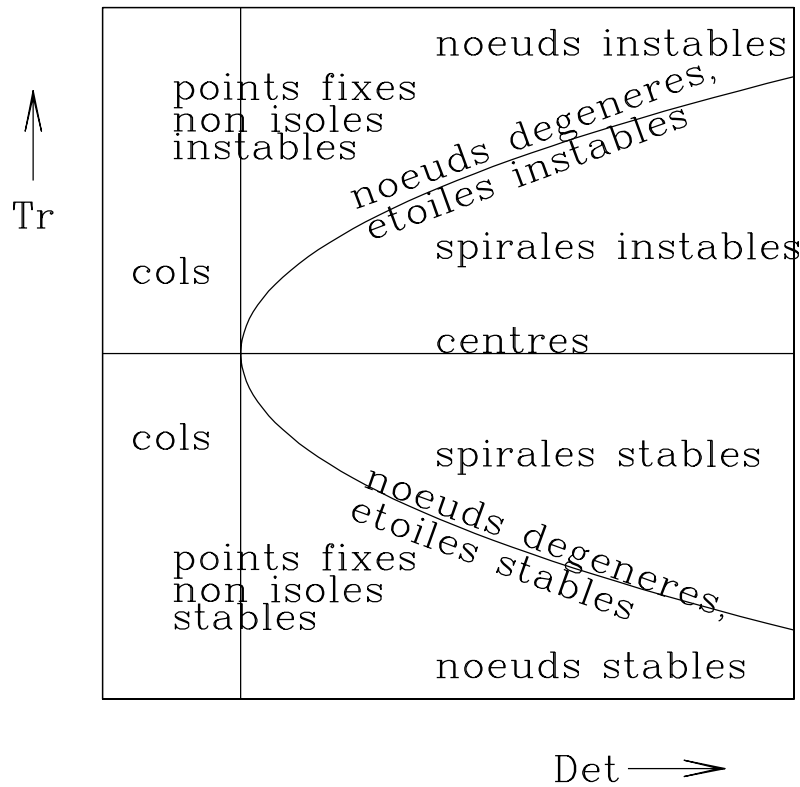


FIG. 1.14 – Comportement de systèmes linéaires bidimensionnels en fonction de la trace Tr et du déterminant Det de la matrice. Pour $Det < 0$, les deux valeurs propres sont réelles et de signes opposés, menant à un col. Pour $Det > Tr^2/4$, les valeurs propres sont complexes conjuguées, et le comportement est donc oscillatoire. Pour $Tr > 0$ au moins une des valeurs propres à partie réelle positive et le point fixe est donc instable. Des cas limites sont les points fixes non-isolés ($Det = 0$), les étoiles et noeuds dégénérés ($Tr^2 = 4Det$) et les centres ($Tr = 0, Det > 0$).

Tous ces comportements peuvent être classifiés selon la *trace* Tr et du *déterminant* Det de la matrice, comme le montre la figure 1.14. Rappelons que pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(Tr \pm \sqrt{Tr^2 - 4Det} \right) \quad (1.61)$$

$$Tr \equiv a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (1.62)$$

$$Det \equiv ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \quad (1.63)$$

1.2.3 Blocs de Jordan et croissance transitoire

Les diagramme (Det, Tr) ne distingue pas entre les noeuds étoiles et les noeuds dégénérés, car les valeurs propres dans les deux cas sont doubles : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Néanmoins ces systèmes se comportent très

différemment, comme le montre le tableau des comportements ci-dessus. Expliquons en plus de détails le comportement autour d'un noeud dégénéré.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

est un multiple de l'identité. Nous calculons ses vecteurs propres :

$$\lambda x_1 + 0x_2 = \lambda x_1 \implies x_1 \text{ arbitraire} \quad (1.65)$$

$$0x_1 + \lambda x_2 = \lambda x_2 \implies x_2 \text{ arbitraire} \quad (1.66)$$

Tous vecteurs $(x_1, x_2)^T$ sont vecteurs propres, et l'espace propre correspondant à la valeur propre double λ est bidimensionnel. Par contre, la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

s'appelle un *bloc de Jordan*. Calculons ses vecteurs propres :

$$\lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1 \implies x_2 = 0 \quad (1.68)$$

$$0x_1 + \lambda x_2 = \lambda x_2 \implies x_1 \text{ arbitraire} \quad (1.69)$$

L'espace propre est alors unidimensionnel, consistant en tous multiples de $(1, 0)^T$. Pour la plupart des matrices A , que les valeurs propres soient multiples ou non, il existe N vecteurs propres linéairement indépendants, solutions de

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (1.70)$$

Tout vecteur dans \mathcal{R}^N peut alors être écrit comme une somme des vecteurs propres. Ceci n'est pas le cas pour un bloc de Jordan. Où pouvons nous "retrouver" la dimension manquante ? Le bloc de Jordan (1.67) a aussi un *vecteur propre généralisé*, qui est solution de

$$(A - \lambda I)v = x, \quad (1.71)$$

où x est vecteur propre. Ce vecteur propre généralisé se calcule :

$$\lambda v_1 + 1v_2 - \lambda v_1 = c \implies v_2 = c \neq 0 \quad (1.72)$$

$$0v_1 + \lambda v_2 - \lambda v_2 = 0 \implies v_1 \text{ arbitraire} \quad (1.73)$$

Donc n'importe quel vecteur v satisfaisant à $v_2 \neq 0$ est un vecteur propre généralisé de (1.67). Un vecteur propre généralisé est déterminé, comme un vecteur propre ordinaire, jusqu'à une constante multiplicative arbitraire, comme le montre (1.72), mais aussi jusqu'à une constante additive arbitraire, car on peut lui ajouter n'importe quelle multiple du vecteur propre, comme le montre (1.73). Cette non-unicité peut être levée à l'aide d'un produit scalaire, en exigeant que le vecteur propre soit normalisé, et en exigeant que le produit scalaire du vecteur propre généralisé avec le vecteur propre soit nul. Le vecteur propre et vecteur propre généralisé de (1.67) rendus uniques par ces critères sont alors :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

Nous avons vu que le comportement d'un système près d'un noeud dégénéré est

$$x_1 = e^{\lambda t}(x_1(0) + x_2(0)t) \quad (1.75)$$

$$x_2 = e^{\lambda t}x_2(0) \quad (1.76)$$

Le terme linéaire dans (1.75) peut amener le système à présenter une *croissance transitoire*, même quand la valeur propre λ est négative, comme le montre la figure 1.15.

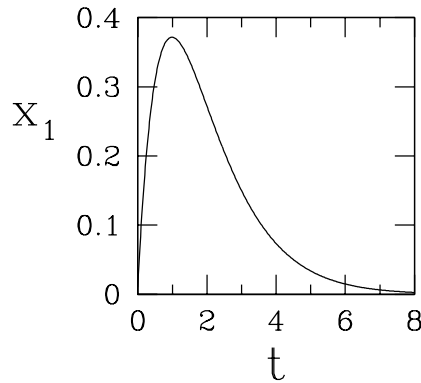


FIG. 1.15 – Croissance transitoire. Quand l'évolution de (x_1, x_2) est régie par un système linéaire qui est un bloc de Jordan, alors $x_1(t)$ peut commencer par croître, même si la valeur propre négative de la matrice finit par donner lieu à une décroissance exponentielle.

1.2.4 Bifurcations globales donnant lieu à des cycles limites

Mise à part les bifurcations de Hopf, d'autres événements, nommés *bifurcations globales*, peuvent créer ou détruire des cycles limites en deux dimensions,

Deux cycles limites peuvent subir une bifurcation noeud-col, analogue à celle subie par deux points fixes. Le système

$$\dot{r} = \alpha r(\mu - \mu_c - (r^2 - r_c^2)^2) \quad (1.77)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (1.78)$$

possèdera deux cycles limites avec rayon près de $r = r_c$ quand $\mu > \mu_c$, entourant tous les deux un point fixe à $r = 0$. Leur stabilité dépend du signe de α . Cette transition, nommée *bifurcation noeud-col de cycles limites*, est illustré dans la figure 1.16.

Une bifurcation noeud-col usuel de deux points fixes peut aussi donner naissance à un cycle limite si ceux-ci sont *sur* une trajectoire fermée. Pour ceci, il est nécessaire de briser l'invariance angulaire. Le système d'équations suivant et la figure 1.17 montrent un exemple d'une telle transition, nommée *bifurcation noeud-col sur cycle limite*.

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (1.79)$$

$$\dot{\theta} = \mu + 1 + \cos(\theta) \quad (1.80)$$

Le cycle limite ainsi produit ne sera pas parcouru uniformément, comme le montre la figure 1.19. Il y aura une phase lente en parcourant le voisinage des anciens points fixes, quelquefois nommés les *fantômes des points fixes*.

Une troisième façon de créer ou de détruire un cycle limite repose sur la proximité de deux points fixes, un col et un point spirale. Au moment de la bifurcation, une des trajectoires quittant le col contourne le point spiral et retourne au col. Cette trajectoire s'appelle un *cycle homocline* et prend un temps infini. Cette *bifurcation homocline* est illustré dans la figure 1.18. Ici aussi, le signal temporel se comporte de façon non uniforme : le cycle limite passe longtemps dans le voisinage du col.

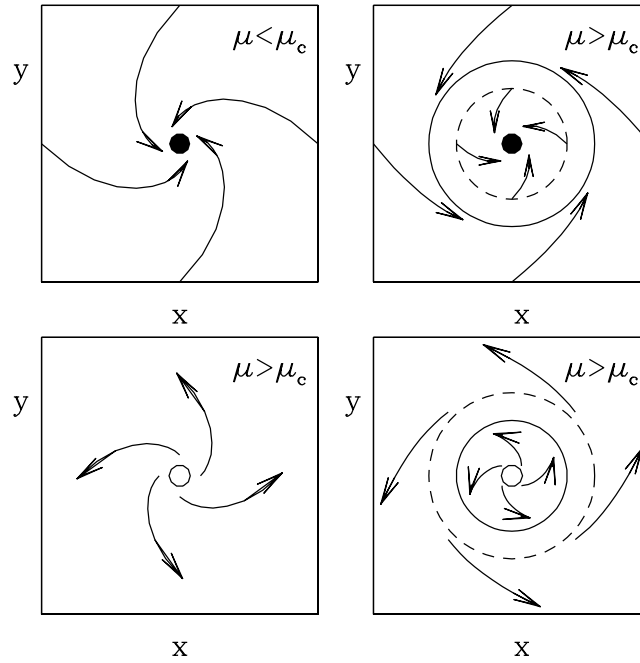


FIG. 1.16 – Bifurcation noeud-col de deux cycles limites.

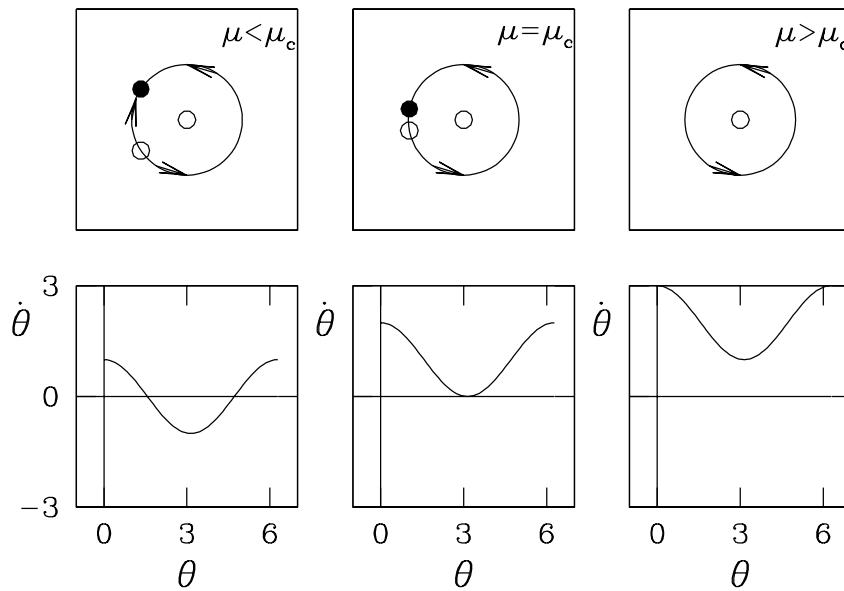


FIG. 1.17 – Bifurcation noeud-col sur un cycle limite.

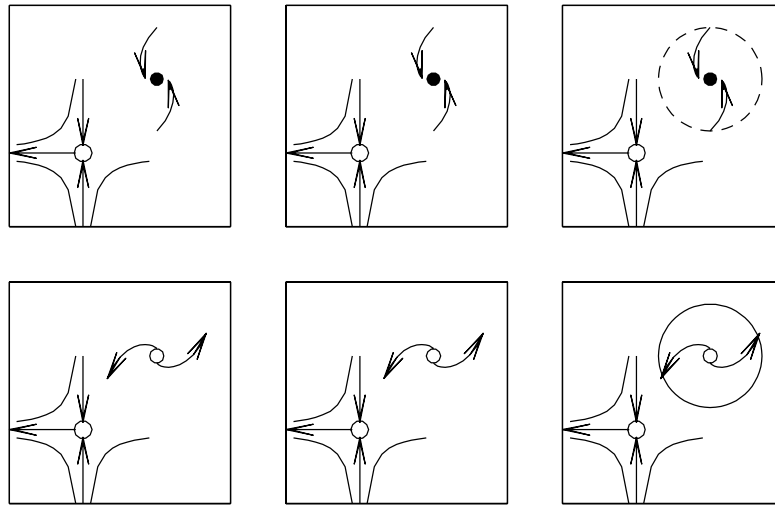


FIG. 1.18 – Bifurcation homocline

Dans une situation expérimentale ou numérique, on ne connaît pas les équations complexes sousjacentes, mais seulement le comportement d'une ou plusieurs variables échantillonnées. Il faut alors déterminer l'origine d'un cycle limite à partir de la variation de ses propriétés en traversant la bifurcation, qui est supposée avoir lieu à $\mu = 0$. Le tableau ci-dessous présente ces propriétés pour les bifurcations décrites ci-dessus qui donnent naissance à un cycle limite. La longueur des phases lentes diverge lorsqu'on s'approche de la bifurcation. La notation $O(1)$ veut dire que la quantité en question reste finie en traversant la bifurcation : elle n'approche ni zéro ni l'infini.

	Amplitude	Période
Hopf supercritique	$O(\mu^{\frac{1}{2}})$	$O(1)$
Noeud-col <i>de</i> cycles limites	$O(1)$	$O(1)$
Noeud-col <i>sur</i> cycle limite	$O(1)$	$O(\mu^{-\frac{1}{2}})$
Homocline	$O(1)$	$O(\log(\mu))$

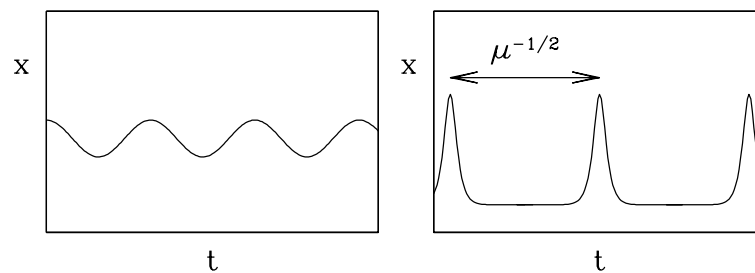


FIG. 1.19 – Signal temporel près de la bifurcation dans le cas d'un cycle limite produit par une bifurcation de Hopf (gauche) et une bifurcation noeud-col sur un cycle limite (droite). L'oscillation à gauche est régulière, tandis que celle de droite contient de longues phases pendant lesquelles la quantité ne change pas, séparées par des phases courtes de changement subit.

1.3 Exercices

1.3.1 Diagrammes de bifurcation en une dimension

Dessinez un diagramme de bifurcation approximatif pour

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{x} &= \mu x + \frac{x^3}{1+x^2} \\ \text{b) } \dot{x} &= \mu + x + \log(1+x) \\ \text{c) } \dot{x} &= \mu x - \sin x \end{aligned}$$

1.3.2 Bifurcations globales

a) Montrez que, près d'une bifurcation noeud-col, le temps pour traverser le voisinage des anciens points fixes ("fantômes") se comporte comme $\mu^{-1/2}$ en évaluant

$$\int dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\mu + x^2}$$

b) Comment se comporte la période de la solution $\theta(t)$ du système

$$\dot{\theta} = \mu + 1 + \cos \theta$$

pour $0 < \mu \ll 1$?

1.3.3 Systèmes bidimensionnels : le pendule

Trouvez les points fixes et leurs classifications et stabilités pour le pendule

$$\ddot{\theta} = \sin \theta = 0 \implies \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = \sin \theta \end{cases}$$

1.3.4 Modèle de Lorenz

Trouvez les points fixes et les bifurcations du modèle de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z \end{aligned}$$

en fonction de r .