

Majeure de Mécanique
Enseignement d'Approfondissement
Instabilités et Chaos

Laurette TUCKERMAN
laurette@limsi.fr

II. Convection et Modèle de Lorenz

Chapitre 2

Convection et Modèle de Lorenz

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une couche de fluide contenue entre deux plaques maintenues à deux températures différentes. Si la plaque inférieure est plus chaude que la plaque supérieure, ceci produira un mouvement du fluide, au dessus d'un certain seuil.

Le mécanisme physique fondamental peut être compris par un argument dû à Rayleigh concernant les fluides parfaits, qui est illustré dans la figure 2.1. Un gradient vertical de pression s'établit dans la couche de sorte qu'il équilibre la force gravitationnelle, qui dépend de la densité locale. Maintenant déplaçons verticalement une particule de fluide. Dans l'absence de viscosité ou de diffusion thermique, la particule conservera sa température, et donc la force gravitationnelle exercée sur elle, mais se trouvera à une hauteur où le gradient de pression est différent et les forces ne s'équilibreront donc plus. Il y a deux cas. Si la différence des forces renvoie la particule vers sa hauteur de départ, alors la situation de départ est stable. Ceci est le cas quand la densité diminue avec la hauteur. Si la différence entre les forces envoie la particule encore plus loin, amplifiant le déplacement, alors la situation de départ est instable. Ceci est le cas quand la densité augmente avec la hauteur.

Nous commencerons par poser les équations de milieux continu régissant le problème couplé des champs de vitesse et de température, les équations de Boussinesq. Avec des hypothèses supplémentaires, nous simplifierons au maximum ces équations pour effectuer une analyse de stabilité linéaire.

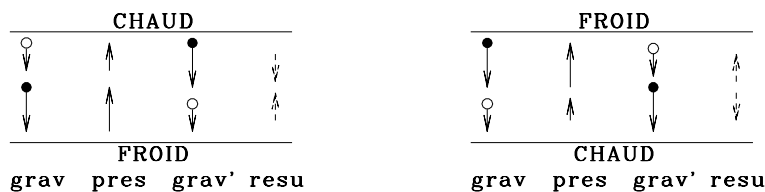


FIG. 2.1 – Mécanisme d'instabilité de la convection. Les forces gravitationnelles et de pression s'équilibrent. Si des particules sont déplacées en conservant leurs températures et donc leurs densités, la force gravitationnelles et de pression ne s'équilibreront plus. Si la plaque froide est située en bas et la plaque chaude en haut, la différence des forces s'opposera au déplacement, donnant une situation stable. Dans le cas contraire, la différence des forces amplifiera le déplacement, donnant une situation instable.

2.1 Equations de milieux continu

2.1.1 Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq consiste à supposer que toutes les propriétés du fluide, en particulier les taux de diffusion de mouvement (viscosité) μ et de température κ , et la densité ρ sont constants et uniformes, mis à part dans la force qui est le "moteur" de la convection, la poussée d'Archimède, où la densité est supposée varier linéairement avec la température.

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (2.1)$$

Ces approximations sont valables quand la différence $T_0 - T_1$ entre les deux températures n'est pas trop grande. Les équations qui en résultent sont :

$$\rho_0 [\partial_t + (U \cdot \nabla)] U = -\nabla P - g\rho(T)\mathbf{e}_z + \mu\Delta U \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.2b)$$

$$[\partial_t + (U \cdot \nabla)] T = \kappa\Delta T \quad (2.2c)$$

avec conditions aux limites

$$U = 0 \text{ à } z = 0, 1 \quad (2.2d)$$

$$T = T_0 \text{ à } z = 0, \quad T = T_1 \text{ à } z = 1 \quad (2.2e)$$

où U est le champ de vitesse, T le champ de température, P la pression, g l'accélération gravitationnelle, μ la viscosité dynamique et κ la diffusivité thermique. Les termes en $U \cdot \nabla$ tiennent compte de l'*advection* : même sans forces, les champs de vitesse et de température changent leurs distributions dans l'espace, à cause de la vitesse du fluide qui les emporte. Les termes en Δ tiennent compte de la diffusion du mouvement ou diffusion thermique. L'équation $\nabla \cdot U = 0$ traduit l'incompressibilité qu'implique l'approximation de Boussinesq.

2.1.2 Calcul et soustraction de l'état de base

Le système (2.2) a une solution très simple :

$$\text{pas de mouvement :} \quad U^* = 0 \quad (2.3a)$$

$$\text{gradient uniforme de température :} \quad T^* = T_0 - (T_0 - T_1)\frac{z}{d} \quad (2.3b)$$

$$\text{pression hydrostatique :} \quad P^* = P_0 + dg\rho_0 \left[\frac{z}{d} + \frac{\alpha}{2}(T_0 - T_1) \left(\frac{z}{d}\right)^2 \right] \quad (2.3c)$$

Dans (2.3), le champ de pression qui neutralise la poussée d'Archimède s'établit, exactement comme le fait le champ de pression hydrostatique pour annuler la force gravitationnelle usuelle.

$$-\nabla P^* - g\rho(T^*) = 0 \quad (2.4)$$

Nous introduisons alors des variables mesurant les perturbations à l'état de base (2.3) : entre

$$T = T^* + \hat{T} \quad P = P^* + \hat{P} \quad (2.5)$$

Utilisant les calculs

$$\begin{aligned}
\rho(T^* + \hat{T}) &= \rho_0(1 + \alpha(T^* + \hat{T} - T_0)) \\
&= \rho_0(1 - \alpha(T^* - T_0)) - \rho_0\alpha\hat{T} = \rho(T^*) - \rho_0\alpha\hat{T} \\
-\nabla P - g\rho(T)\mathbf{e}_z &= -\nabla P^* - g\rho(T^*) - \nabla\hat{P} + g\rho_0\alpha\hat{T}\mathbf{e}_z \\
(U \cdot \nabla)T &= (U \cdot \nabla)T^* + (U \cdot \nabla)\hat{T} \\
&= (U \cdot \nabla)\left(T_0 - (T_0 - T_1)\frac{z}{d}\right) + (U \cdot \nabla)\hat{T} \\
&= -\frac{T_0 - T_1}{d}U \cdot \mathbf{e}_z + (U \cdot \nabla)\hat{T}
\end{aligned}$$

nous remplaçons les équations (2.2) par

$$\rho_0 [\partial_t + (U \cdot \nabla)] U = -\nabla\hat{P} - g\rho_0\alpha\hat{T}\mathbf{e}_z + \mu\Delta U \quad (2.6a)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.6b)$$

$$[\partial_t + (U \cdot \nabla)] \hat{T} = \frac{T_0 - T_1}{d}U \cdot \mathbf{e}_z + \kappa\Delta\hat{T} \quad (2.6c)$$

avec conditions aux limites homogènes

$$U = 0 \text{ à } z = 0, 1 \quad (2.6d)$$

$$\hat{T} = 0 \text{ à } z = 0, 1 \quad (2.6e)$$

2.1.3 Adimensionalisation

En choisissant les échelles

$$z = d\bar{z}, \quad t = \frac{d^2}{\kappa}, \quad U = \frac{\kappa}{d}\bar{U}, \quad \hat{T} = \frac{\mu\kappa}{d^3g\rho_0\alpha}\bar{T}, \quad \hat{P} = \frac{\rho_0\mu\kappa}{\rho_0d^2}\bar{P} \quad (2.7)$$

et les introduisant dans les equations (2.6),

$$\frac{\kappa}{d^2} \frac{\kappa}{d} \rho_0 [\partial_{\bar{t}} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla})] \bar{U} = -\frac{1}{d} \frac{\rho_0\mu\kappa}{\rho_0d^2} \bar{\nabla}\bar{P} + g\rho_0\alpha \frac{\mu\kappa}{d^3g\rho_0\alpha} \bar{T}\mathbf{e}_z + \mu \frac{1}{d^2} \frac{\kappa}{d} \bar{\Delta}\bar{U} \quad (2.8a)$$

$$\frac{1}{d} \frac{\kappa}{d} \bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0 \quad (2.8b)$$

$$\frac{\kappa}{d^2} \frac{\mu\kappa}{d^3g\rho_0\alpha} [\partial_{\bar{t}} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla})] \bar{T} = \frac{\kappa}{d} \frac{T_0 - T_1}{d} \bar{U} \cdot \mathbf{e}_z + \kappa \frac{1}{d^2} \frac{\mu\kappa}{d^3g\rho_0\alpha} \bar{\Delta}\bar{T} \quad (2.8c)$$

ainsi que la définition $\nu = \mu/\rho_0$, on obtient :

$$[\partial_{\bar{t}} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla})] \bar{U} = \frac{\nu}{\kappa} [-\bar{\nabla}\bar{P} + \bar{T}\mathbf{e}_z + \bar{\Delta}\bar{U}] \quad (2.9a)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{U} = 0 \quad (2.9b)$$

$$[\partial_{\bar{t}} + (\bar{U} \cdot \bar{\nabla})] \bar{T} = \frac{(T_0 - T_1)d^3g\alpha}{\kappa\nu} \bar{U} \cdot \mathbf{e}_z + \bar{\Delta}\bar{T} \quad (2.9c)$$

Les paramètres non-dimensionnels qui ressortent de (2.9) sont

$$\text{le nombre de Prandtl : } Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.10)$$

$$\text{le nombre de Rayleigh : } Ra \equiv \frac{(T_0 - T_1)d^3g\alpha}{\kappa\nu} \quad (2.11)$$

Le nombre de Rayleigh est la mesure adimensionnelle du gradient thermique imposé. C'est en l'augmentant que les instabilités auront lieu. Le nombre de Prandtl Pr est le rapport entre la diffusivité de la vitesse et la diffusivité thermique : pour Pr grand (petit) ce sera la température (vitesse) qui sera la plus "volatile".

2.1.4 Conditions aux limites

Nous simplifierons la notation en revenant à U, T, z , etc. sans barres et nous écrirons $U = (u, v, w)$. Nous chercherons des solutions qui sont périodiques dans la direction horizontale, avec périodicité $2\pi/q$. Dans la direction verticale, nous imposerons à $z = 0, 1$

$$T = 0 \quad \text{parois conducteurs parfaits} \quad (2.12a)$$

$$w = 0 \quad \text{parois impénétrables} \quad (2.12b)$$

Les conditions aux limites verticales réalistes seraient

$$u = v = 0 \quad \text{parois rigides : vitesses tangentielles nulles} \quad (2.13)$$

Au lieu de (2.13), nous imposerons plutôt une condition irréaliste qui simplifiera les calculs, qui est :

$$\partial_z u + \partial_x w = \partial_z v + \partial_y w = 0 \quad \text{contraintes tangentielles nulles} \quad (2.14)$$

Physiquement, la condition (2.14) correspondrait à des surfaces libres. Mais il est difficile d'imaginer une surface libre se maintenant dans le vide à une température donnée. (D'abord, la couche tomberait par terre, et, deuxièmement, nous n'aurions pas de parois à chauffer ou refroidir.) Grâce à (2.12b), nous avons

$$w|_{z=0,1} = 0 \implies \partial_x w|_{z=0,1} = \partial_y w|_{z=0,1} = 0 \quad (2.15)$$

qui peut être combiné avec (2.14) pour donner

$$\partial_z u = \partial_z v = 0 \quad (2.16)$$

L'avantage d'imposer (2.16) au lieu de (2.13) est, comme nous le verrons par la suite, de permettre l'utilisation des fonctions trigonométriques $\sin(k\pi z)$, qui sont faciles à manipuler.

2.1.5 Cas bidimensionnel

Par la suite, nous supposerons la solution bidimensionnelle, c'est-à-dire, avec $v = 0$ et $\partial_y = 0$. Visuellement, il s'agit de rouleaux droits et infinis, orienté selon l'axe \mathbf{e}_y , comme le montre la figure 2.2. Nous introduisons alors la fonction de courant ψ :

$$U = \nabla \times \psi \mathbf{e}_y \implies \begin{cases} u = -\partial_z \psi \\ w = \partial_x \psi \end{cases} \quad (2.17)$$

Les conditions aux limites sur ψ à $z = 0, 1$ sont

$$0 = \partial_z u = -\partial_{zz}^2 \psi \quad (2.18a)$$

$$0 = w = \partial_x \psi \implies \begin{cases} \psi = \psi_1 \text{ à } z = 1 \\ \psi = \psi_0 \text{ à } z = 0 \end{cases} \quad (2.18b)$$

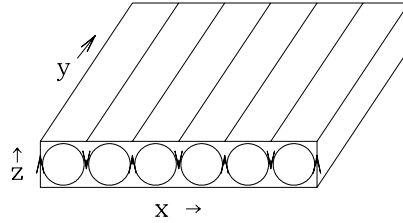
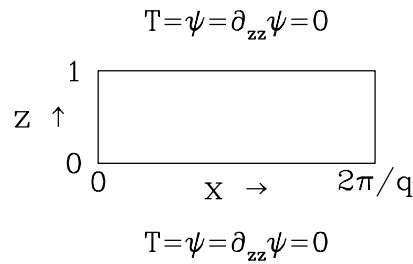


FIG. 2.2 – Rouleaux de convection bidimensionnels.

FIG. 2.3 – Conditions aux limites sur T et ψ en imposant la périodicité horizontale et des contraintes tangentielles nulles (surfaces libres) sur les parois verticales.

(Remarquons que la condition réaliste $u = 0$ aux bords aurait mené à $\partial_z \psi = 0$ au lieu de (2.18a).)

Puisque ψ n'est défini qu'à une constante additive près, nous pouvons poser $\psi_0 = 0$. La valeur de ψ_1 est liée au flux horizontal :

$$\int_{z=0}^1 dz u(x, z) = - \int_{z=0}^1 dz \partial_z \psi(x, z) = - \psi(x, z) \Big|_{z=0}^1 = \psi_0 - \psi_1 \quad (2.19)$$

En supposant que le flux horizontal soit nul, on obtient alors $\psi_1 = 0$.

Pour utiliser la fonction de courant, nous calculons

$$U \cdot \nabla T = u \partial_x T + w \partial_z T = -\partial_z \psi \partial_x T + \partial_x \psi \partial_z T \equiv J[\psi, T] \quad (2.20)$$

où J s'appelle crochet de Poisson, ce qui donne, pour l'équation gérant la température

$$\partial_t T + J[\psi, T] = Ra \partial_x \psi + \Delta T \quad (2.21a)$$

Pour transformer l'équation du mouvement pour utiliser ψ , il faut agir dessus avec $\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times$. Calculons

alors les termes requis :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times U &= \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \nabla \times \psi \mathbf{e}_y = -\Delta \psi \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \Delta U &= \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \Delta \nabla \times \psi \mathbf{e}_y = -\Delta^2 \psi \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times T \mathbf{e}_z &= -\partial_x T \\
\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times (U \cdot \nabla) U &= \partial_z (U \cdot \nabla) u - \partial_x (U \cdot \nabla) w \\
&= \partial_z (u \partial_x u + w \partial_z u) - \partial_x (u \partial_x w + w \partial_z w) \\
&= \partial_z u \partial_x u + \partial_z w \partial_z u - \partial_x u \partial_x w - \partial_x w \partial_z w + u \partial_{xz} u + w \partial_{zz} u - u \partial_{xx} w - w \partial_{xz} w \\
&= \partial_z u (\partial_x u + \partial_z w) - \partial_x w (\partial_x u + \partial_z w) + u \partial_x (\partial_z u - \partial_x w) + w \partial_z (\partial_z u - \partial_x w) \\
&= (-\partial_z \psi) \partial_x (-\partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi) + (\partial_x \psi) \partial_z (-\partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi) \\
&= (\partial_z \psi) \partial_x (\Delta \psi) - (\partial_x \psi) \partial_z (\Delta \psi) \\
&= -J[\psi, \Delta \psi]
\end{aligned}$$

Rassemblant ces termes, nous obtenons :

$$\partial_t \Delta \psi + J[\psi, \Delta \psi] = Pr[\partial_x T + \Delta^2 \psi] \quad (2.21b)$$

2.1.6 Analyse de stabilité linéaire

Les perturbations bidimensionnelles d'une couche de fluide stationnaire avec gradient uniforme de température (la solution de base (2.3)) évoluent selon les équations (2.21a) et (2.21b). Pour effectuer l'analyse de stabilité linéaire de l'état de base, nous négligeons les termes d'ordre plus haut dans (2.21a) et (2.21b), écrivant :

$$\partial_t \Delta \psi = Pr[\partial_x T + \Delta^2 \psi] \quad (2.22a)$$

$$\partial_t T = Ra \partial_x \psi + \Delta T \quad (2.22b)$$

Les solutions de (2.22) ont la forme :

$$\psi(x, z, t) = \psi \sin qx \sin k\pi z e^{\lambda t} \quad q \in \mathcal{R}, k \in \mathcal{Z}^+, \lambda \in \mathcal{C} \quad (2.23a)$$

$$T(x, z, t) = T \cos qx \sin k\pi z e^{\lambda t} \quad (2.23b)$$

(Par un abus de notation, dans le membre de gauche de (2.23), ψ, T font référence à des fonctions de (x, z, t) , tandis que dans le membre droite, ψ, T font référence à des coefficients scalaires.) Une dépendance trigonométrique ou exponentielle des variables x, z, t dérive d'un principe très général : les équations sont linéaires et homogènes (pas de dépendance explicite et donc pas de valeurs distinguées) dans ces trois variables. La forme plus particulière en x, z de (2.23) se justifie par

a périodicité en x avec $\psi \sim \partial_x T$ et $T \sim \partial_x \psi$

les conditions aux limites $T = \psi = \partial_{zz} \psi = 0$ à $z = 0, 1$

Utilisant (2.23) et définissant $\gamma^2 \equiv q^2 + (k\pi)^2$, les équations à dérivées partielles (2.22) se transforment en équations algébriques :

$$-\lambda \gamma^2 \psi = Pr[-qT + \gamma^4 \psi] \quad (2.24a)$$

$$\lambda T = Ra q \psi - \gamma^2 T \quad (2.24b)$$

ou encore

$$\lambda \begin{bmatrix} \psi \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Pr \gamma^2 & Pr q/\gamma^2 \\ Ra q & -\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ T \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Cherchons une bifurcation *stationnaire*, c'est à dire une solution non triviale de (2.25) ayant valeur propre $\lambda = 0$. Il faut alors que

$$Pr\gamma^4 - Pr Ra \frac{q^2}{\gamma^2} = 0 \quad (2.26)$$

et donc que

$$Ra = \frac{\gamma^6}{q^2} = \frac{(q^2 + (k\pi)^2)^3}{q^2} \equiv Ra_c(q, k) \quad (2.27)$$

L'état de base stationnaire devient instable aux perturbations de la forme (2.23) pour $Ra > Ra_c(q, k)$. Pour que cet état soit stable, il faut que

$$Ra < \min_{\substack{q \in \mathcal{R} \\ k \in \mathcal{Z}^+}} Ra_c(q, k) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial Ra_c(q, k)}{\partial q} = \frac{q^2 3(q^2 + (k\pi)^2)^2 2q - 2q(q^2 + (k\pi)^2)^3}{q^4} \\ &= \frac{2(q^2 + (k\pi)^2)^2}{q^3} (3q^2 - (q^2 + (k\pi)^2)) \\ \implies q^2 &= \frac{(k\pi)^2}{2} \\ Ra_c \left(q = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, k \right) &= \frac{(k\pi)^2/2 + (k\pi)^2)^3}{(k\pi)^2/2} = \frac{27}{4} (k\pi)^4 \end{aligned}$$

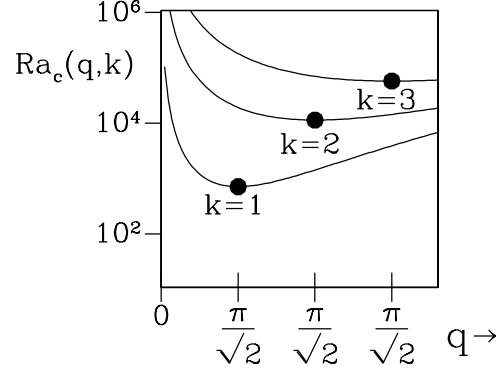
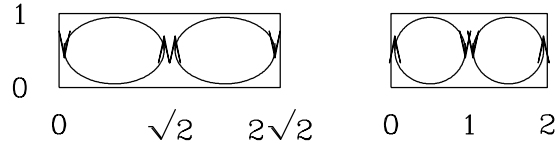
Le seuil d'instabilité est alors réalisé à

$$Ra_c = Ra_c \left(q = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, k = 1 \right) = \frac{27}{4} (\pi)^4 = 657.5 \quad (2.29)$$

Ce calcul a été simplifié par l'hypothèse de surfaces libres (contrainte tangentielle nulle). Le calcul utilisant les conditions réalistes de parois rigides suit le même principe, mais est plus compliqué. Le seuil Ra_c obtenu est plus élevé, car des parois rigides contribuent à l'amortissement des perturbations. Le nombre d'onde critique q_c diminue, de sorte que les rouleaux deviennent presque circulaires (la largeur ℓ d'un rouleau est π/q).

	Ra_c	q_c	ℓ_c
surfaces libres	$\frac{27}{4} \pi^4 = 657.5$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	1.4
parois rigides	≈ 1700	$\approx \pi$	≈ 1

(2.30)

FIG. 2.4 – Seuil critique $Ra_c(q, k)$ pour $k = 1, 2, 3$.FIG. 2.5 – Largeur critique l_c des rouleaux pour conditions aux limites de contraintes nulles ($l_c = \sqrt{2}$, gauche) et parois rigides ($l_c \approx 1$, droite).

2.2 Modèle de Lorenz

2.2.1 Inclusion d'interactions nonlinéaires

Nous essayerons maintenant de réintroduire les termes non linéaires manquant de (2.22). Insérons les formes (2.23) dans les crochets de Poisson :

$$J[\psi, \Delta\psi] = J[\psi, -\gamma^2\psi] = \partial_x\psi \partial_z(-\gamma^2\psi) - \partial_x(-\gamma^2\psi)\partial_z\psi = 0 \quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned} J[\psi, T] &= \psi T [\partial_x(\sin qx \sin \pi z)\partial_z(\cos qx \sin \pi z) - \partial_x(\cos qx \sin \pi z)\partial_z(\sin qx \sin \pi z)] \\ &= \psi T q \pi [\cos qx \sin \pi z \cos qx \cos \pi z + \sin qx \sin \pi z \sin qx \cos \pi z] \\ &= \psi T q \pi (\cos^2 qx + \sin^2 qx) \sin \pi z \cos \pi z \\ &= \psi T \frac{q\pi}{2} \sin 2\pi z \end{aligned} \quad (2.31b)$$

(Comme précédemment, dans les membres de gauche de (2.31), ψ, T font référence à des fonctions de (x, z, t) , tandis que dans les membres de droite, ψ, T font référence à des coefficients scalaires.)

Nous voyons alors que l'introduction du terme non linéaire $J[\psi, \Delta\psi]$ n'a pas d'effet, mais que l'utilisation des formes fonctionnelles (2.23) n'est pas cohérent avec le terme non linéaire $J[\psi, T]$.

Généralisons les formes fonctionnelles (2.23) à

$$\psi(x, z, t) = \psi(t) \sin qx \sin \pi z \quad (2.32a)$$

$$T(x, z, t) = T_1(t) \cos qx \sin \pi z + T_2(t) \sin 2\pi z \quad (2.32b)$$

Nous avons déjà calculé l'interaction non linéaire entre ψ et T_1 . Faisant pareil pour ψ et T_2 :

$$\begin{aligned} J[\psi, T_2] &= \psi T_2 [\partial_x(\sin qx \sin \pi z) \partial_z(\sin 2\pi z) - \partial_x(\sin 2\pi z) \partial_z(\sin qx \sin \pi z)] \\ &= \psi T_2 q 2\pi \cos qx \sin \pi z \cos 2\pi z \\ &= \psi T_2 q \pi \cos qx (\sin \pi z + \sin 3\pi z) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Le terme $(\cos qx \sin \pi z)$ est déjà inclus dans (2.32b), mais $(\cos qx \sin 3\pi z)$ ne l'est pas. D'introduire un terme T_3 dans (2.32b) menerait à encore de nouveaux termes, à l'infini. Ceci s'appelle le *problème de fermeture* des équations de Navier-Stokes, ou des équations non linéaires en général. En 1963, Lorenz proposa de s'arrêter à l'inclusion du terme T_2 , gardant celui-ci comme terme non linéaire minimal et négligeant la production du terme $(\cos qx \sin 3\pi z)$. Utilisant (2.25), (2.31), (2.33), les équations (2.21) deviennent alors :

$$\partial_t \psi = Pr(qT/\gamma^2 - \gamma^2 \psi) \quad \sin qx \sin \pi z \quad (2.34)$$

$$\partial_t T_1 + q\pi \psi T_2 = Ra q \psi - \gamma^2 T_1 \quad \cos qx \sin \pi z \quad (2.35)$$

$$\partial_t T_2 + \frac{q\pi}{2} \psi T_1 = -(2\pi)^2 T_2 \quad \sin 2\pi z \quad (2.36)$$

Définissant

$$X \equiv \frac{\pi q}{\sqrt{2}\gamma^2} \psi, \quad Y \equiv \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}\gamma^6}, \quad Z \equiv \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}\gamma^6}, \quad (2.37)$$

$$\tau \equiv \gamma^2 t, \quad r \equiv \frac{q^2}{\gamma^6} Ra, \quad b \equiv \frac{4\pi^2}{\gamma^2} = \frac{8}{3}, \quad \sigma \equiv Pr \quad (2.38)$$

donne le célèbre modèle de Lorenz :

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) \quad (2.39a)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (2.39b)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (2.39c)$$

On peut encore trouver les origines hydrodynamiques dans ces équations. Le paramètre σ est souvent mis à 10, qui est le nombre de Prandtl de l'eau. Le paramètre r est le nombre de Rayleigh divisé par le seuil de convection que nous avons calculé précédemment, de sorte que le seuil de r est 1. L'amortissement visqueux ou thermique se voit dans les derniers termes négatifs de chacune des équations (2.39). Les termes non linéaires proviennent de l'advection.

2.2.2 Recherche de bifurcations

Les états stationnaires de (2.39) satisfont à :

$$0 = \sigma(Y - X) \implies X = Y \quad (2.40a)$$

$$0 = -XZ + rX - Y \implies X = 0 \text{ ou } Z = r - 1 \quad (2.40b)$$

$$0 = XY - bZ \implies Z = 0 \text{ ou } X = Y = \pm \sqrt{b(r - 1)} \quad (2.40c)$$



FIG. 2.6 – Rouleaux de convection. Les deux configurations sont dynamiquement équivalents et correspondent à la transformation $(\psi, T_1) \rightarrow (-\psi, -T_1)$.

Les états stationnaires sont donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

Le Jacobien de (2.39) est

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Pour l'état stationnaire $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, cette matrice devient

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

La matrice (2.43) étant diagonale par blocs, ses valeurs propres sont telles que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = Tr = -\sigma - 1 < 0 \quad (2.44a)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = Det = \sigma(1 - r) \quad (2.44b)$$

$$\lambda_3 = -b < 0 \quad (2.44c)$$

L'état stationnaire sera alors d'abord un noeud stable (pour $0 < r < 1$), puis ensuite un col (pour $r > 1$). Une bifurcation de fourche a lieu à $r = 1$ qui crée les deux nouveaux points fixes $X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $Z = r - 1$. L'existence d'une bifurcation de fourche est liée à la symétrie entre (X, Y, Z) et $(-X, -Y, Z)$: si l'un est solution de (2.39), alors l'autre l'est aussi. Cette symétrie est, à son tour, une conséquence de la symétrie géométrique et physique rendant équivalents les deux écoulements de la figure 2.6.

Pour les états $X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $Z = r - 1$, le Jacobien devient

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)}X \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

dont les valeurs propres sont solutions de l'équation cubique :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0 \quad (2.46)$$

Plutôt que calculer les solutions de (2.46), utilisons le fait qu'il est connu que la prochaine bifurcation est une bifurcation de Hopf. Nous substituons alors $\lambda = i\omega$, ce qui donne

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + i(r + \sigma)b\omega + 2b\sigma(r - 1) = 0 \quad (2.47)$$

Séparant les parties réelle et imaginaire mène à

$$-(\sigma + b + 1)\omega^2 + 2b\sigma(r - 1) = 0 \quad (2.48a)$$

$$-\omega^3 + (r + \sigma)b\omega = 0 \quad (2.48b)$$

ce qui donne

$$\frac{2b\sigma(r - 1)}{\sigma + b + 1} = \omega^2 = (r + \sigma)b \quad (2.49)$$

$$2b\sigma(r - 1) = (r + \sigma)b(\sigma + b + 1) \quad (2.50)$$

$$2b\sigma r - 2b\sigma = rb(\sigma + b + 1) + \sigma b(\sigma + b + 1) \quad (2.51)$$

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} = 24.74 \text{ pour } \sigma = 10, b = 8/3 \quad (2.52)$$

Donc, à $r = 24.74$, les deux états stationnaires subissent chacun une bifurcation de Hopf. Des recherches ont montré que cette bifurcation est souscritique, créant des cycles limites instables qui existent pour $r < 24.74$.

2.3 Exercices

2.3.1 Convection entre parois rigides

Adaptez l'analyse de stabilité linéaire des équations de Boussinesq au cas où les parois à $z = 0, 1$ sont *rigides* pour trouver le seuil de la convection.

- a) Quelles sont les conditions aux limites à $z = 0, 1$ auxquelles ψ doit satisfaire ?
 b) Ecrivez

$$\psi(x, z, t) = \psi \sin qx f(z) e^{\lambda t} \quad (2.53)$$

$$T(x, z, t) = T \cos qx f(z) e^{\lambda t} \quad (2.54)$$

Déduire l'équation différentielle auquel f doit satisfaire au *seuil* de la convection, supposant que la bifurcation est *stationnaire* (pas oscillatoire).

- c) Ecrire la solution générale pour f (sans prendre en compte les conditions aux limites).
 (Plus difficile)
 d) Appliquez les conditions aux limites. En déduire une équation transcendente qui ne peut être résolue que numériquement.
 e) La minimisation de Ra_c sur q donne (numériquement) $q_c = 3.117$ et $Ra_c = 1707$. Comparez ces valeurs à celles venant de l'analyse des parois libres, $q_c = \pi/\sqrt{2} = 2.22$ et $Ra_c = 27\pi^4/4 = 657.5$ et discutez des raisons possibles pour ces différences.

2.3.2 Convection thermosolutale

La convection de Rayleigh-Bénard est due à un gradient de densité venant d'un gradient de température. Dans un fluide contenant deux composantes (de l'eau et de l'alcool, par exemple, ou de l'eau salée), un gradient de densité peut aussi être engendré par un gradient de concentration. Quand les deux effets (température et concentration) sont présents, la convection est appelée *thermosolutale*. Nous introduisons un nouveau champ C et des nouveaux paramètres dimensionnels tels que

- $\rho(T, C) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)]$
- C diffuse avec diffusivité κ_C
- $C = C_0$ à $z = 0$ et $C = C_1$ à $z = 1$

- a) Ecrire l'équation pour C , analogue à celle pour T , prenant compte de l'advection de C par U et de la diffusion de C .
 b) Ecrire et soustraire la solution de base C^* pour C .
 c) Ecrire des paramètres adimensionnels supplémentaires qui sont un nombre de Rayleigh Ra_S lié à la concentration et un rapport de diffusivités, et écrire un champ C adimensionnel.
 d) Ecrire les équations adimensionnelles pour la convection thermosolutale.
 e) Gardons les mêmes hypothèses géométriques simples :
 - parois à $z = 0, 1$ libres, T et C imposés sur parois
 - écoulement et champs bidimensionnels en x, z
 - écoulement et champs périodiques en x

Les champs étudiés dans l'analyse de stabilité linéaire sont

$$\psi(x, z, t) = \psi \sin qx \sin \pi z e^{\lambda t} \quad (2.55)$$

$$T(x, z, t) = T \cos qx \sin \pi z e^{\lambda t} \quad (2.56)$$

$$C(x, z, t) = C \cos qx \sin \pi z e^{\lambda t} \quad (2.57)$$

Utilisez les équations linéarisées et les formes fonctionnelles ci-dessus pour écrire le problème en terme des valeurs propres λ et vecteurs propres (ψ, T, C) d'une matrice 3×3 .

f) Simplifiez en prenant le nombre de Prandtl Pr égal à l'infini. L'équation concernant ψ devient alors une relation entre ψ , T et C n'impliquant pas λ , qui peut être utilisée pour éliminer ψ . Ecrivez le problème simplifié en termes de valeurs propres λ et vecteurs propres (T, C) d'une matrice 2×2

g) Pour quelles valeurs de Ra , Ra_S les valeurs propres peuvent-elles devenir complexes et mener à une bifurcation de Hopf?