revue française de sociologie

Gérard TOULOUSE et Julien BOK

Principe de moindre difficulté et structures hiérarchiques

Revue française de sociologie

publiée avec le concours du

CENTRE D'ÉTUDES SOCIOLOGIQUES
(CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE)

Direction, Rédaction : CENTRE D'ETUDES SOCIOLOGIQUES
82, rue Cardinet, 75017 Paris — Tél. : 267-07-60

Administration, abonnements : EDITIONS DU C.N.R.S.

15, quai Anatole-France, 75700 Paris — Tél. : 555-92-25

Tarif 1978 : L'abonnement (4 numéros) .... 96 F

Le numéro .... 30 F

L'abonnement part du 1er janvier de chaque année

C.C.P. Paris 9131-53 Editions du Centre National de la Recherche Scientifique

R. franç. sociol., *XIX*, 1978, 391-406.

Gérard TOULOUSE et Julien BOK

Principe de moindre difficulté et structures hiérarchiques

Cette étude a été faite à la suite de la lecture des mémoires de Stanislas Ulam. Dans cet ouvrage, intitulé *Adventures of a mathematician* (1), on trouve les lignes suivantes :

"He (John Von Neumann) was broadly educated and well-versed in history, especially of the Roman Empire — its power and organization fascinated him. Perhaps part of his interest stemmed from a mathematician's appreciation of the difference between variables involving individual points, or persons, and groups of such, or classes of things" (p. 80).

"Mathematicians are also prone to disputes, and personal animosities between them are not unknown. Many years later, when I became chairman of the mathematics department at the University of Colorado, I noticed that the difficulties of administering N people was not really proportional to N but to N^2. This became my first 'administrative theorem' " (p. 91).

"At meetings (in Los Alamos), theoretical talks were interesting enough to the audience, but whenever an organizational chart was displayed, I could feel the whole audience come to life with pleasure at seeing something concrete and definite" (p. 156).

Le plan de cet article est le suivant. Après avoir présenté le principe de moindre difficulté en section 1, on traite en quelque détail un cas légèrement simplifié (approximation des grands nombres) en section 2. Les résultats du cas général sont décrits en section 3. Le lecteur peu enclin aux calculs (sans mystère pourtant) des sections 2 et 3 peut se contenter de la lecture des figures correspondantes (2). Dans la section 4, on présente une étude assez détaillée sur la "puissance" d'une organisation hiérarchisée, qui permet de montrer comment le même principe est susceptible d'application à des problèmes divers. Certaines analogies avec diverses théories physiques sont soulignées dans la section 5. Enfin dans la section 6, on tente de situer l'intérêt d'un tel modèle et de voir

(1) Ulam (S.M.), *Adventures of a mathematician.* New York, Charles Scribner's Sons, 1976.

(2) L'ensemble des *figures* se trouve en fin d'article.

comment certaines idées apparues dans l'exposé pourraient être éventuellement utilisées dans des études réalistes des sociétés animales ou humaines.

1. — *Le principe de moindre difficulté*

Le « théorème » d'Ulam remarquant que la difficulté dans un groupe de N personnes croît comme N^2, suggère que cette difficulté provient des interactions des personnes 2 à 2. En toute rigueur, le nombre de contacts binaires est $\frac{1}{2}$ N(N — 1), pour les grands nombres la variation sera approximativement en N^2. Cette difficulté limite à notre avis la taille des groupes sociaux, provoque des divisions en cellules plus petites et la constitution de structures hiérarchiques. Les biologistes ont remarqué que la forte densité d'individus de la même espèce dans un milieu donné crée une grande intensité des relations et détermine une excitation des activités et une taille maximum des colonies indépendamment des ressources alimentaires disponibles.

De même, la corrélation entre la densité de la population et les formes de la propriété a été notée par les sociologues. H. Janne (3) cite un cas exemplaire, celui de l'occupation de l'ouest américain par les blancs :

« En 1860 une caravane bloquée par les neiges dans le Nebraska libère chevaux et troupeaux : on retrouvera, quelques mois après, ces bêtes en excellente condition et bien multipliées. Dès lors commence le *long drive.* Le but est l'élevage : la prairie est à tous (*free grass*). C'est la phase de nomadisme *cow boy* : on fait paître d'énormes troupeaux dont chaque bête est marquée au fer. Mais à mesure que les « exploitants » se multiplient, les frictions deviennent plus fréquentes. Certains alors s'installent, occupent le sol, d'autant plus que 1870 voit l'introduction du fil barbelé. La propriété devient un fait, des agriculteurs viennent créer à leur tour des exploitations. C'est une période de conflits brutaux entre les « nomades » entravés et les « sédentaires » essayant d'étendre des propriétés dont les limites sont fixées par le contrôle que l'on peut exercer effectivement ou par des bornages conventionnels entre voisins. En 1885, une loi règle l'établissement de la propriété ». Dans ce cas précis, il semble bien que ce soit la difficulté rapidement croissante avec la population qui ait provoqué la transformation de la disposition collective de la terre en propriété privée.

La « difficulté » définie comme proportionnelle au nombre d'interactions possibles diminuera évidemment si on scinde la population en groupes, les individus n'interagissant qu'à l'intérieur des groupes et les groupes entre eux comme entités globales.

On peut ainsi définir une fonction difficulté D pour une structure hiérarchique quelconque. Nous posons alors en principe que l'état d'équi-

(3) Janne (H), « *Le système social* ». Bruxelles, Editions de l'Institut de Sociologie de l'Université Libre de Bruxelles, 1968, p. 271.

libre est obtenu en minimisant la difficulté D. Cette démarche est inspirée des théories physiques et plus particulièrement de la thermodynamique qui repose sur des principes variationnels. L'état d'équilibre d'un système d'atomes ou de molécules est obtenu en cherchant les minima ou les maxima de certaines fonctions thermodynamiques comme l'énergie libre, l'entropie, etc.

Pour illustrer ce principe, considérons d'abord un ensemble de N sujets. Quand le nombre N augmente, il se divise en N_1 groupes contenant chacun N_0 individus ($N = N_0 N_1$). La difficulté totale sera alors la somme de deux termes, provenant d'une part des heurts intragroupes et d'autre part des heurts intergroupes. En supposant, pour simplifier, que ces deux types de heurts créent la même difficulté, on obtient (en appliquant la loi approchée en N^2) :

$$D = N_0^2 \times N_1 + N_1^2 = N_0^2 \frac{N}{N_0} + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2$$

En minimisant, par rapport à la taille des groupes N_0,

$$\frac{\partial D}{\partial N_0} = N - 2\frac{N^2}{N_0^3} = 0,$$

on obtient comme valeurs à l'équilibre :

$$N_0 = (2N)^{1/3} = 1{,}26\, N^{1/3}$$

$$\text{et} \quad D = 1{,}9\, N^{4/3}.$$

On voit que l'introduction d'un échelon hiérarchique fournit la possibilité de réduire la difficulté totale D qui varie en $N^{4/3}$ au lieu de N^2.

Si nous considérons, par exemple, un laboratoire de 45 chercheurs, on constate qu'il se divise en équipes plus petites. Les formules précédentes donnent l'état d'équilibre correspondant à la difficulté minimum : une dizaine d'équipes comprenant en moyenne 4,5 individus. Une telle structure existe (4).

Nous montrons, dans la suite de cet article, que nous pouvons calculer la difficulté D pour une population N et un nombre d'échelons hiérarchiques p quelconque. En minimisant D, nous trouvons une très grande richesse de structures hiérarchiques. Ce modèle mathématique repose évidemment sur des hypothèses très simples mais très générales; son application à des systèmes sociaux réels pose donc quelques problèmes. Il s'agit d'un modèle théorique, et seuls les chercheurs en sciences sociales, s'ils s'y intéressent, peuvent vérifier s'il s'applique à des réalités sociales moyennant les simplifications nécessaires.

(4) Voir, par exemple, le rapport d'activité pour l'année 1974-75 du Laboratoire de spectroscopie hertzienne de l'Ecole normale supérieure, 24, rue Lhomond, Paris.

2. — *Le cas simplifié* *
(approximation des grands nombres)

On considère un système social ou une organisation comportant p échelons et N individus. On définit les nombres N_p, N_{p-1}, $\ldots N_1$, N_0, conformément aux indications de la *figure 1*. N_0 est la taille de la cellule de base; $q_1 = \frac{N_1}{N_0}$ cellules forment une équipe de taille N_1; $\ldots$; $q_p = \frac{N_p}{N_{p-1}}$ groupes de tailles N_{p-1} forment l'assemblée totale de taille $N_p = N$.

$q_r = \frac{N_r}{N_{r-1}}$ est le nombre de groupes de taille N_{r-1} ($q_0 = N_0$) et l'on a

$$N_r = q_0\, q_1 \cdot \ldots \cdot q_r.$$

Nous introduisons une variable supplémentaire dans le modèle qui est un coefficient d'ampleur de la difficulté à l'échelon r, λ_r, qui n'est plus considérée comme constante. La difficulté entre les q_r groupes de l'échelon r est alors :

$$\Delta_r = \lambda_r\, q_r^2. \qquad [1]$$

Nous prenons l'expression approchée de la difficulté, valable pour les grands nombres, qui consiste à remplacer $q_r(q_r - 1)$ par q_r^2. Le cas général, défini par le strict respect de la loi en $N(N-1)$, est traité plus loin.

La difficulté totale est alors obtenue à partir de [1], en ajoutant les difficultés à tous les niveaux. On a :

$$D_p = \sum_{r=o}^{r=p} \lambda_r\, q_r^2 \times \frac{N_p}{N_r}. \qquad [2]$$

Il est commode d'écrire la difficulté par sujet $d = \frac{D}{N}$ qui s'écrit :

$$d = \frac{D}{N} = \frac{D_p}{N_p} = \sum_{r=o}^{p} \lambda_r\, q_r^2\, \frac{1}{N_r}$$

$$= \sum_{r=o}^{r=p} \lambda_r \frac{N_r}{N_{r-1}^2}. \qquad [3]$$

En minimisant d par rapport aux N_r, $\frac{\partial d}{\partial N_r} = 0$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$q_r = \frac{q_{r-1}^2}{2\rho_r} \text{ avec } \rho_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}. \qquad [4]$$

* Les figures se trouvent en fin d'article, pp. 403-406.

L'existence d'une telle relation de récurrence locale, donnant les propriétés à l'échelon r à partir de propriétés à l'échelon $r-1$ joue un rôle fondamental dans la théorie. Elle est susceptible d'une vérification expérimentale directe. Nous avons introduit un paramètre supplémentaire dans la théorie λ_r, qui permet de mieux tenir compte de la réalité des interactions aux différents niveaux. Dans la réalité sociale, il nous semble que λ_r est une fonction croissante de r, les rivalités augmentent avec l'échelon hiérarchique et la discipline se relâche.

Pour poursuivre les calculs, nous traiterons un cas particulier où

$$\rho_r = \rho = \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$\lambda_r = \rho^r, \text{ avec } \lambda_0 = 1 \text{ et } \rho \geqslant 1.$$

La relation de récurrence devient alors :

$$q_r = \frac{q_{r-1}^2}{2\rho}. \qquad [5]$$

Pour calculer la difficulté par sujet d_p, il est commode de prendre la taille de la cellule de base N_0 comme variable intermédiaire.

On trouve :

$$d_p = N_0 \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^p \right]. \qquad [6]$$

Ce résultat ne dépend pas de ρ.

Le nombre total de sujets est donné par la formule :

$$N_p = (2\rho)^{p+1} \left(\frac{N_0}{2\rho}\right)^{[2^{p+1}-1]}. \qquad [7]$$

Une autre grandeur intéressante est la difficulté marginale $\mu = \dfrac{\partial D}{\partial N}$, qui donne l'accroissement de difficulté due à l'introduction d'un sujet supplémentaire dans l'assemblée. Le calcul donne

$$\mu = 2N_0. \qquad [8]$$

Ce qui exprime simplement qu'un sujet supplémentaire n'interagit qu'avec les autres sujets de sa cellule de base. L'existence d'une relation directe entre μ et N_0 est un résultat général important. A partir de N_0 et de la relation de récurrence, on obtient ainsi, de manière naturelle, N et d comme fonctions de μ et de p.

Examinons, à titre d'exemple, les cas $\rho = 1$ et $\rho = 2$.

a) $\rho = 1$. La relation de récurrence s'écrit :

$$q_r = \frac{1}{2}\, q_{r-1}^2, \; r \geqslant 1. \qquad [9]$$

Le graphe de la relation ci-dessus est représenté sur la *figure 2 a*. On voit qu'il existe deux points fixes, le point fixe trivial à l'origine qui est stable et un autre point fixe $q = 2$ qui est instable. Si la taille de la cellule de base $q_0 = N_0$ est supérieure à la valeur du point fixe $N_0^* = 2$, l'itération se fait vers la droite sur la figure 2 a, et on a une hiérarchie « évasée » où q_r, nombre de groupes en interaction à l'échelon r, croît avec r.

Si, au contraire, on a $N_0 < N_0^*$, l'itération se fait vers la gauche et on a une hiérarchie « cintrée ».

Si, enfin, on a $N_0 = N_0^*$, on a une hiérarchie « invariante d'échelle » où q_r est indépendante de r.

Cette distinction entre hiérarchies évasées, cintrées ou invariantes d'échelle a une valeur générale.

La *figure 3* est un diagramme N_p fonction de p sur lequel on a indiqué quelques lignes correspondant à différentes valeurs de N_0 ou μ. Le nombre placé à côté d'un point du diagramme indique la difficulté par sujet pour la hiérarchie correspondant à ce point.

b) Pour ρ quelconque, on obtient un point fixe instable à $q = 2\rho$. Sur la *figure 2 b*, on a représenté la relation de récurrence pour $\rho = 2$. La *figure 4* est un diagramme (N, p) qui diffère par le choix $\rho = 2$ au lieu de $\rho = 1$. Alors que, pour $\rho = 1$ (fig. 3), le minimum de difficulté à N donné est obtenu pour la hiérarchie invariante d'échelle, dans le cas où $\rho = 2$ (fig. 4), le minimum est obtenu pour une hiérarchie cintrée. C'est un changement qualitatif important.

3. — *Le cas général*

Le cas général est ici défini par le strict respect de la loi en $N(N-1)$ pour le nombre d'interactions entre N sujets, par opposition au cas simplifié précédent où l'on faisait l'approximation des grands nombres, qui n'était pas toujours justifiée à tous les échelons.

Comme on va le voir, le gain en rigueur est payé par la perte de certaines formules compactes.

Introduisant, dès le début, des coefficients d'ampleur λ_r, la relation de récurrence, pour la difficulté par sujet d, s'écrit :

$$d_p = d_{p-1} + \lambda_p \cdot \frac{N_p - N_{p-1}}{(N_{p-1})^2}.$$

En itérant et en minimisant par rapport à N_{r-1}, on obtient la loi de récurrence entre q_r et q_{r-1} :

$$q_r = \frac{(q_{r-1})^2}{2\rho_r} + \frac{1}{2}, \text{ avec } \rho_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}. \qquad [10]$$

Faisant l'hypothèse que $\rho_r = \rho$, indépendant de r, la position des points fixes est maintenant donnée par :

$$q = \rho \pm \sqrt{\rho(\rho - 1)}.$$

Les cas $\rho = 1$ (heurts créant même difficulté à tout échelon) et $\rho = 2$ sont illustrés par les *figures 2 c* et *2 d*.

Le calcul montre que, de manière générale, la difficulté marginale $\mu = \frac{\partial N}{\partial D}$ est donnée par :

$$\mu = 2\,N_0 - 1,$$

comme on pouvait s'y attendre à partir de l'argument exposé dans la section précédente.

Les *figures* 5 et 6 sont des diagrammes (N, p) sur lesquels sont tracées quelques lignes correspondant à différentes valeurs de $\mu = 2\,N_0 - 1$. La comparaison entre, d'une part, les figures 3 et 4 et, d'autre part, respectivement les figures 5 et 6, permet d'apprécier l'influence de l'approximation des grands nombres.

4. — « *Puissance* » *d'une organisation hiérarchisée*

La plupart des organisations ou systèmes sociaux grossissent, car ils pensent ainsi accroître leur puissance. Si a est l'activité d'un individu, l'activité de l'ensemble devrait être Na. Malheureusement la difficulté due aux heurts croît également avec N. La puissance effective de l'organisation peut alors s'évaluer par la formule : $P = Na - \frac{1}{\delta} D$, où $\frac{1}{\delta}$ est un facteur traduisant l'influence des heurts sur le travail des individus. δ peut être appelé « discipline » de la structure. On peut également imaginer que la discipline varie avec l'échelon hiérarchique. Si on fait l'hypothèse que la discipline se relâche lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie, on peut écrire :

$$\delta_p = \delta_0 \left(\frac{1}{\rho}\right)^p, \text{ avec } p > 1. \qquad [11]$$

Ce facteur ρ peut être inclus dans le calcul de D, comme nous l'avons fait en section 2. On pose $\lambda_r = \frac{1}{\delta_0} \rho^r$. La puissance est alors :

$$P = Na - \frac{1}{\delta_0} D. \qquad [12]$$

Si on fait l'hypothèse que a, puissance de travail d'un individu, et δ_0, discipline dans la cellule de base, sont fixées, on cherche à rendre $\Omega = Na\delta_0 - D$ maximum. La fonction Ω est l'analogue, au signe près, de la fonction « grand potentiel » $(F - N\mu)$ en mécanique statistique.

Cherchons maintenant à optimiser P.

— *A N et p fixés*

La puissance maximum est obtenue lorsque D est minimum. Les résultats obtenus en section 2 (cas des grands nombres) permettant de calculer P :

$$P(N,p) = N\left[a - \frac{N_0}{\delta_0}\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)\right], \qquad [13]$$

où N_0 est donné par l'équation :

$$\left(\frac{N_0}{2\rho}\right)^{2^{p+1}-1} = N.\left(\frac{1}{2\rho}\right)^{p+1} .$$

— *A p donné*

On peut faire varier N. Ceci correspond à une organisation dont la structure est fixée, mais dont le nombre de membres varie.

La puissance optimum est alors obtenue pour

$$\frac{\partial P}{\partial N} = 0,$$

ce qui entraîne $\frac{\partial D}{\partial N} = \mu = a\delta_0$.

Le nombre N_0 d'individus dans la cellule de base est

$$\widetilde{N}_0 = \frac{a\delta_0}{2} .$$

L'analogie avec l'ensemble grand canonique est parfaite (le nombre de particules dans un système thermodynamique à l'équilibre s'ajuste de façon que $\frac{\partial F}{\partial N} = \mu$, potentiel chimique imposé par le réservoir).

La puissance optimum est alors donnée par

$$\widetilde{p} = \widetilde{N}\, a \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} , \qquad [14]$$

avec

$$\widetilde{N} = (2\rho)^{p+1} \left(\frac{a\delta_0}{4\rho}\right)^{2^{p+1}-1}$$

La fonction P(N,p), à p fixé, est représentée pour différentes valeurs de p et ρ sur les *figures 7, 8, 9*.

On remarque que P(N) croît d'abord avec N, passe par un maximum $\widetilde{P}$, puis décroît et s'annule pour un nombre critique $N_c(p)$ tel que :

$$N_c = \widetilde{N}(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}$$

où

$$1/\varepsilon = 2^{p+1} - 1.$$

Lorsque ε est petit, on a approximativement :

$$N_c \simeq 2{,}7\, \widetilde{N}. \qquad [15]$$

L'examen des figures 7, 8, 9 permet de faire plusieurs remarques.

1) Si une organisation croît en conservant sa structure hiérarchique, sa puissance, après être passée par un maximum, décroît rapidement. Pour

une taille critique N_c, les querelle internes réduisent l'organisation à l'impuissance totale.

2) Pour une organisation bénéficiant d'une structure idéale, on a :

$$\frac{\widetilde{P}}{\widetilde{N}} = a \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} .$$

Chaque échelon supplémentaire dans la hiérarchie divise par deux l'activité par individu.

3) Malgré l'effet précédent, on doit construire une organisation comprenant plusieurs échelons hiérarchiques, si on se fixe un objectif de puissance P_0. Cherchons à étudier la variation de $\widetilde{P}(p)$ avec p.

$$\widetilde{P}(p) = a(\rho)^{p+1} \left(\frac{a\delta_0}{2\rho}\right)^{2^{p+1}-1}$$

La puissance totale $\widetilde{P}(p)$ peut croître ou diminuer selon le cas. Si on a $\rho = 1$ et une hiérarchie évasée, $\widetilde{P}(p)$ croît rapidement avec p.

Si la hiérarchie est très cintrée, $\widetilde{P}(p)$ peut décroître avec p, au-delà d'un certain échelon (voir *figure 9*).

4) Pour ρ et a fixés, on remarque que $\widetilde{P}(p)$ croît comme $(\delta_0)^{2^{p+1}-1}$

Cette formule illustre quantitativement le vieil adage : « la discipline fait la force principale des armées ».

5) Ce modèle conduit naturellement à prédire des effets non réversibles (hystérésis), liés au caractère discret du nombre d'échelons hiérarchiques p, lorsque le nombre total d'individus N varie : la structure d'une organisation dépend de son histoire.

5. — *Analogie avec certaines théories physiques*

Du point de vue d'un physicien, il est intéressant de souligner certaines analogies. Poser en point de départ de la théorie un principe variationnel rappelle différentes théories physiques et, en particulier, la thermodynamique et la physique statistique. La difficulté totale D et la difficulté marginale μ jouent des rôles analogues à l'énergie libre et au potentiel chimique. L'analogie entre la quantité appelée « puissance » d'une organisation et le grand potentiel de l'ensemble canonique a été notée en section 4. Par ailleurs, la cascade hiérarchique rappelle la cascade des tourbillons en turbulence. L'existence de points fixes et de lois de puissance avec exposants rappelle la théorie du groupe de renormalisation.

L'analogie avec la morphologie des êtres vivants est aussi intéressante. De même qu'un éléphant n'est pas une grosse puce, car les proportions respectives des différents organes se modifient lorsque varie la masse totale, de même une hiérarchie à p échelons non invariante d'échelle, ce qui est le cas commun, doit se modifier à tous les niveaux, lorsque le nombre total de sujets N augmente, pour continuer à satisfaire le principe de moindre difficulté.

De nombreuses questions n'ont pas été abordées : déploiement dans l'espace de la hiérarchie, existence éventuelle de solutions désordonnées (les groupes de même échelon hiérarchique r ayant des tailles différentes à l'équilibre) etc., car cela paraissait prématuré. De même, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'état d'équilibre et non à la dynamique d'évolution du système vers l'équilibre. Mais on voit déjà comment ces questions pourraient être abordées par analogie avec la physique statistique.

Afin de préparer la discussion de la section suivante, nous allons développer l'analogie qui existe entre le modèle présenté dans cet article et la théorie des gaz parfaits en mécanique statistique. Dans cette dernière théorie, on pose en principe une hypothèse violemment réductrice au départ, à savoir qu'on néglige les interactions entre atomes du gaz. Cette hypothèse, on sait qu'elle est toujours fausse strictement parlant : en effet, deux atomes quelconques ont, de manière générale, une interaction qui est attractive à grande distance et répulsive à courte distance. Cependant, cette hypothèse simplificatrice a le mérite de permettre des calculs très simples de nombreuses quantités, expérimentalement mesurables sur les gaz réels. Si l'on compare les prédictions de la théorie des gaz parfaits aux résultats expérimentaux, on constate que pour de nombreux gaz et dans de grandes gammes de conditions (température, densité,...) l'accord est très bon, y compris pour des quantités au comportement hautement non trivial (viscosité, conductivité thermique,...). Dans d'autres conditions expérimentales, l'accord est moins bon, voire qualitativement mauvais, mais là encore la connaissance des résultats de la théorie des gaz parfaits est utile pour mettre en évidence le rôle des interactions négligées.

Autrement dit, un physicien utilise la théorie des gaz parfaits comme une première étape très utile (et même quelquefois il est inutile d'aller plus loin), tout en sachant que les interactions, dans la réalité, ne sont jamais nulles (mais quelquefois négligeables).

Pour terminer cette section, on voudrait souligner que ce modèle, tout en présentant de fortes analogies avec diverses théories physiques, n'est pas non plus un démarquage pur et simple d'une théorie dans une autre Diverses particularités, tenant par exemple à la nature de la limite pour un grand nombre N de sujets ou au caractère entier du nombre d'échelons hiérarchiques, ou encore au fait que la symétrie spontanément brisée est une symétrie de permutation, donnent un caractère original à ce modèle. Cette circonstance nous paraît de bon augure, conformément à la remarque de Whitehead : « it is the large generalization, limited by a happy particularity, which is the fruitful conception » (5).

(5) WHITEHEAD, (A. N.), *Science and the modern world,* London, Mac Millan, 1925.

6. — *Discussion générale*

Ce modèle peut être considéré comme un modèle purement abstrait, étude des conséquences découlant d'un axiome, dans lequel on aurait utilisé certains termes anthropomorphiques pour aider l'intuition (pratique courante en mathématiques). De ce point de vue, nous l'avons dit, ce modèle présente un certain intérêt en raison de diverses particularités. Cependant nous souhaitons maintenant aller au-delà et entamer, dans cette section, une discussion sur l'utilité éventuelle de ce modèle pour l'étude des sociétés réelles, animales ou humaines. En vérité, la réponse à cette question ne peut venir que de sociologues (ou de zoologues) compétents et la publication de cet article dans une revue de sociologie vise précisément à faciliter le relais. Voici en attendant quelques réflexions.

D'abord, il convient de noter que ce modèle a le mérite de ne pas être une théorie complètement élastique susceptible d'expliquer n'importe quoi. Pour illustrer cela, nous allons présenter ici deux problèmes très simples.

Premier problème : nous avons déja donné, en section 1, l'exemple du laboratoire de 45 chercheurs, avec une hiérarchie à un échelon.

Si on suppose que les heurts à la base et entre groupes créent même difficulté, un coup d'œil sur la *figure 5* donne alors la structure à l'équilibre : une dizaine de groupes de taille moyenne 4,5.

Deuxième problème : Soit une nation de 50 millions de citoyens, où l'échelon politique le plus élevé est constitué par un parlement de 500 députés, quel est le nombre optimal d'échelons intermédiaires entre le député et le citoyen de base ?

Avec la même supposition que ci-dessus, on obtient environ 8 échelons. Ainsi ce modèle conduit-il a des prédictions qui peuvent être testées.

On peut ensuite s'interroger sur la plausibilité du principe de moindre difficulté. Chacun peut juger si sa propre expérience confirme le « théorème administratif » d'Ulam, à savoir que les difficultés augmentent en N^2 plutôt qu'en N. Une critique naturelle consiste à dire que les interactions entre individus peuvent être « positives » et non seulement « négatives », c'est-à-dire sources de difficultés. A cela on peut d'abord répondre que mon meilleur ami ou mon meilleur collaborateur est néanmoins cause de souci (je ne dois pas le vexer par mégarde, etc.). Mais, plus profondément, une bonne réponse consiste à revenir à l'analogie avec la théorie des gaz parfaits discutée en section 5. Dans certains cas et pour certains problèmes, il est vraisemblable que la nature précise des interactions entre individus est importante; on a même le droit de considérer que ce sont ces cas-là et ces problèmes-là qui seront vraiment « intéressants »; cependant, même si on adopte ce point de vue, il est utile de connaître les prédictions de la théorie réductrice pour apprécier sur quel fond se détachent les phénomènes jugés « intéressants ».

Enfin, on peut s'interroger sur la plausibilité de certains résultats dérivés ci-dessus à partir du principe de moindre difficulté. A cet égard, l'évolution vers un équilibre minimisant la difficulté peut expliquer l'évolution du régime de propriété du sol en fonction de la densité de population, exemple que nous avons cité au début de l'article. H. Janne donne également des lois (6) « tendancielles » relatives aux effets de la croissance des groupes qui peuvent s'interpréter dans le cadre du principe de moindre difficulté.

L'analyse faite en section 4 peut s'appliquer à l'optimisation de la structure d'une entreprise en vue d'une production maximum. J. Woodward (7) a noté l'importance de la technologie (représenté dans notre analyse par les paramètres N_0 et a) sur la structure des entreprises. Mais D.S. Pugh *et al.* (8) ont noté que la taille et le nombre d'employés avaient également une grande importance. Nous suggérons de faire une analyse de ces phénomènes dans le cadre de notre modèle.

Mais ceci est bien vague et nous souhaitons que cet article incite certains sociologues et économistes à tenter une confrontation détaillée entre ce modèle, avec sa typologie et ses prédictions quantitatives, et des structures sociales hiérarchisées réelles. Notre espoir est que l'accord sera bon dans certains cas, malgré le caractère extrêmement réductionniste de nos hypothèses. Enfin nous pensons que les désaccords qui apparaîtront, permettront de tenir compte de nouveaux paramètres et d'affiner le modèle.

Gérard Toulouse Julien Bok
Laboratoire de physique
Ecole normale supérieure

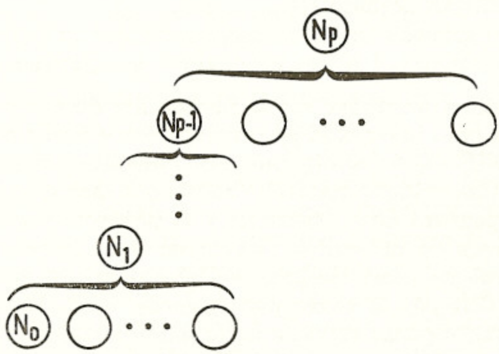

Fig. 1. — ***Schéma destiné à illustrer la définition des nombres N_r, $0 \leqslant r \leqslant p$, dans une hiérarchie à p échelons.***

(6) H. Janne, *op. cit.*, pages 186-187.
(7) Woodward (J.), *Industrial organization. Theory and practice.* Oxford, Oxford University Press, 1965.
(8) Pugh (D.S.). Hickson (J.D.), Hinings (C.R.), and Turner (C.) « Dimensions of organization structure », *Administrative Science Quarterly 14*, 1969, pp. 91-144.

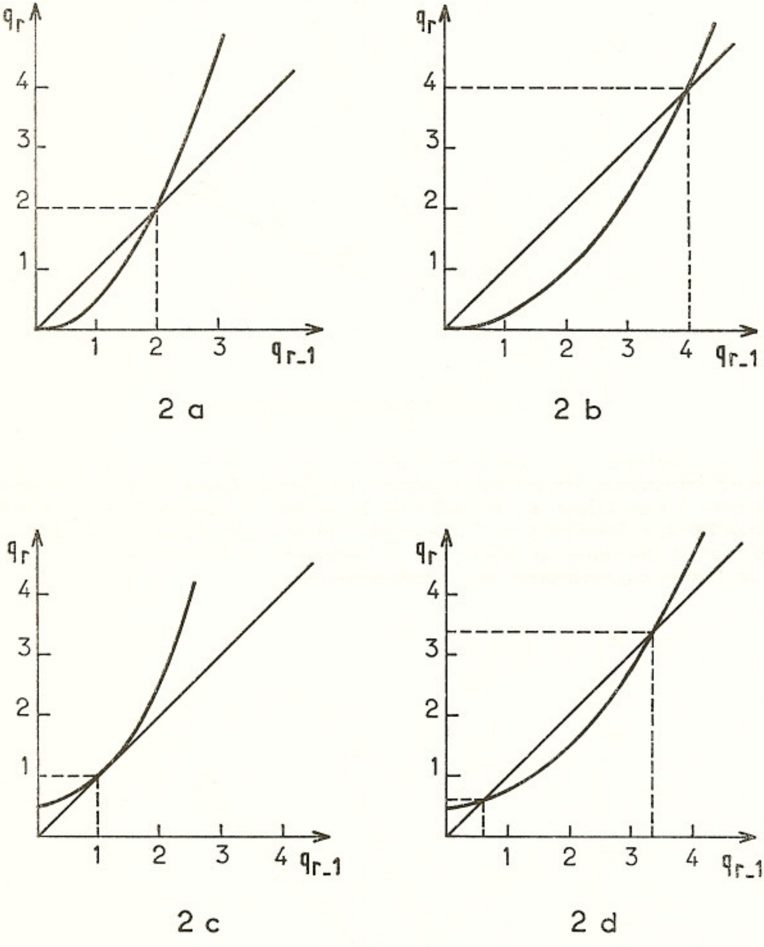

FIG. 2. — *Diagrammes illustrant la loi de récurrence donnant q_r, nombre de groupes à l'échelon r, en fonction de q_{r-1}, nombre de sous-groupes à l'échelon r-1. Noter en particulier la position des points fixes. La* FIG. 2-a *correspond au cas* $\rho = 1$, *avec approximation des grands nombres; la* FIG. 2-b *au cas* $\rho = 2$, *avec même approximation; les* FIG. 2-c *et* 2-d *correspondent à* $\rho = 1$, et $\rho = 2$, *respectivement, sans approximation des grands nombres.*

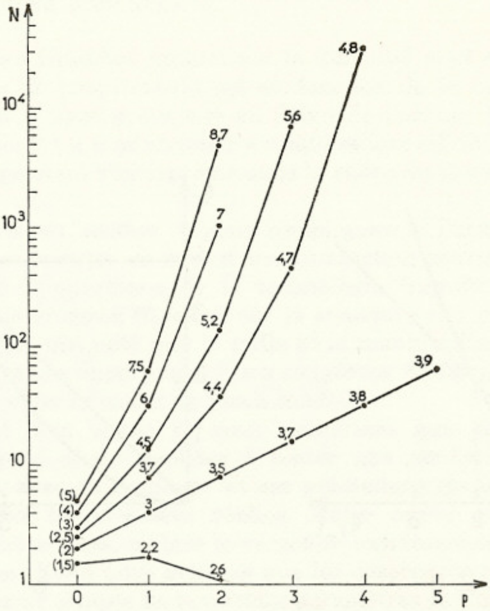

Fig. 3. — ***Diagramme (N,p) où N est le nombre total de sujets et p le nombre d'échelons hiérarchiques.*** **On a tracé un certain nombre de lignes brisées correspondant chacune à une valeur de N_0, taille de la cellule de base (chiffres placés entre parenthèses, à l'abscisse p = 0). Le nombre placé à côté d'un point du diagramme indique la difficulté par sujet pour la hiérarchie correspondant à ce point. Cas p = 1, avec approximation des grands nombres.**

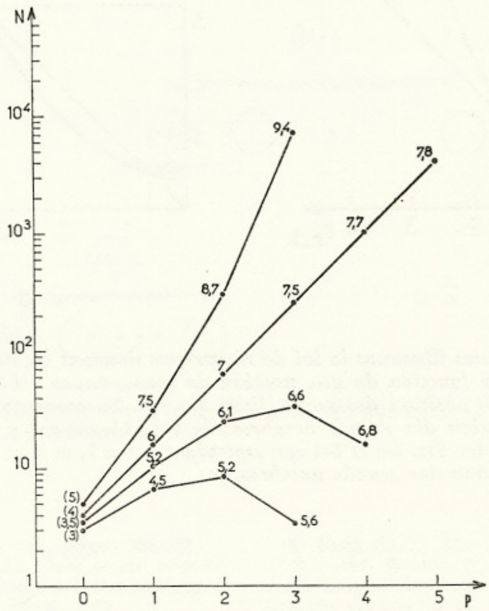

Fig. 4. — ***Mêmes définitions que pour la figure 3.*** **Cas $\rho = 2$, avec approximation des grands nombres.**

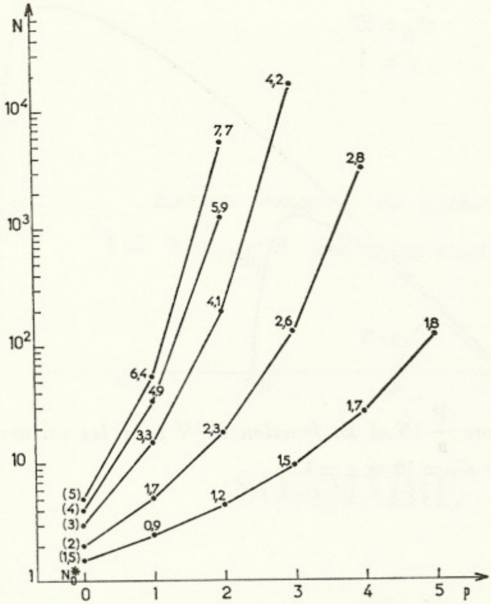

Fig. 5. — *Mêmes définitions que pour la figure 3.* **Cas $\rho = 1$, sans approximation des grands nombres.**

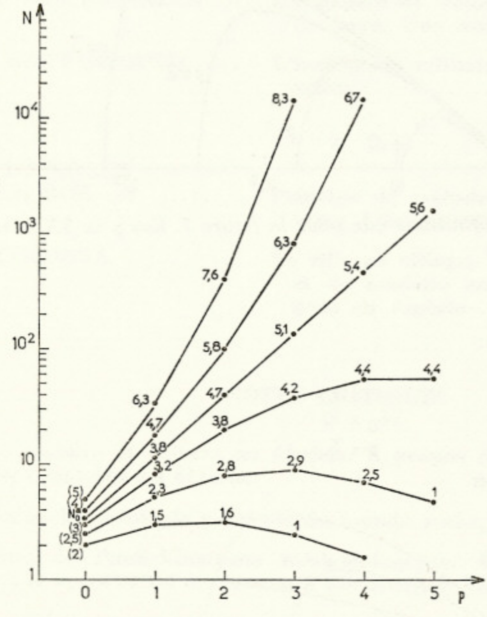

Fig. 6. — *Mêmes définitions que pour la figure 3.* **Cas $\rho = 2$, sans approximation des grands nombres.**

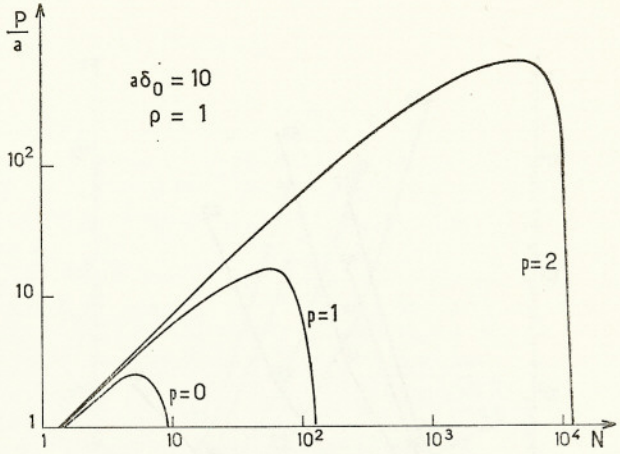

Fig. 7. — *Diagramme* $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{a}}$ *(N,p) en fonction de N pour les valeurs* $p=0$, $p=1$ *et* $p=2$. *On a pris* $a\delta_0 = 10$ et $\rho = 1$.

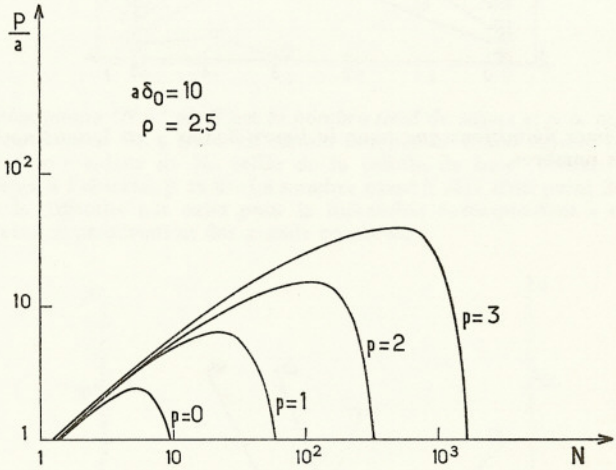

Fig. 8. — *Mêmes définitions que pour la figure* 7. Cas $\rho = 2{,}5$, invariance d'échelle.

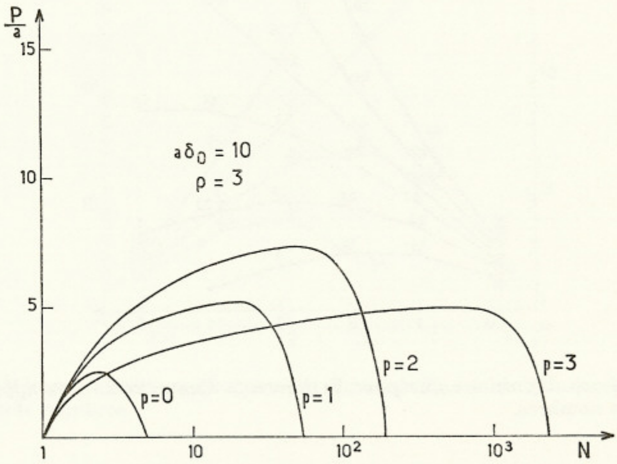

Fig. 9. — *Mêmes définitions que pour la figure* 7. Cas $\rho = 3$, hiérarchie cintrée.

Revue française de sociologie
Vol. XIX, nº 3, juillet-septembre 1978

SOMMAIRE

NOTES CRITIQUES