

Écoulements granulaires sur plan incliné

L'étude des écoulements granulaires est un domaine de recherche en pleine expansion. Alors que les fluides classiques sont bien modélisés par des équations constitutives de type Navier-Stokes, aucune théorie complète n'est à ce jour disponible pour décrire le comportement des milieux granulaires. Il est d'autant plus important de mieux comprendre les mécanismes qui régissent les écoulements de particules qu'ils sont présents dans de nombreuses applications industrielles (agro-alimentaire, pharmaceutique, génie chimique) ou géophysiques (formation de dunes, avalanches, glissements de terrains, éruptions volcaniques). Nous montrons ici que, pour les écoulements granulaires sur des pentes, une description hydrodynamique est possible.

L'une des difficultés majeures pour décrire les milieux formés de grains provient de la variété des comportements observés selon le mode de sollicitation. Sous le poids d'un édifice par exemple, un sol granulaire va se déformer lentement et son comportement se rapproche des déformations plastiques d'un solide. Les forces entre particules se transmettent par contact et la friction entre les grains joue un rôle fondamental. Pour ce régime, des approches de mécanique des sols proposent des lois constitutives permettant de modéliser les déformations. L'origine de ces lois macroscopiques et leur relation avec la structure microscopique du milieu reste cependant encore une question ouverte. Si maintenant on secoue énergiquement une boîte partiellement remplie de sable, les grains sont très agités et entrent en collision les uns avec les autres. Le milieu peut alors être comparé à un gaz, la différence fondamentale étant l'inélasticité des collisions entre particules. Pour ce type d'écoulement rapide, une théorie inspirée de la théorie cinétique des gaz denses a été proposée et fournit des équations constitutives. Cependant, la plupart des écoulements observés dans la nature se

trouvent dans un régime intermédiaire. Au cours d'une avalanche de roches par exemple, les particules roulent tout en restant en contact avec leur voisines. Elles interagissent à la fois par collision et par friction. Comment décrire ces écoulements denses ? Une voie qui semble prometteuse est une description hydrodynamique par analogie avec un liquide. Mais la question se pose alors des lois d'écoulements du matériau.

C'est pour tenter de cerner les lois de comportements propres aux milieux granulaires que nous avons étudié à l'IUSTI les écoulements sur plan incliné (figure 1a). Cette configuration expérimentale présente l'avantage d'être bien contrôlée et préfigure une situation géophysique d'écoulement sur pente. Un silo, dont l'ouverture est une fente de hauteur ajustable, déverse le matériau sur une surface rugueuse inclinée à un angle θ . Les deux paramètres de contrôle de cette expérience sont l'épaisseur h de la couche qui coule et l'inclinaison θ de la pente. Le milieu granulaire utilisé est constitué de billes de verre de diamètre $d = 0,5$ mm. La rugosité est obtenue en collant une couche de billes sur le fond.

QUAND LES GRAINS COULENT-ILS ?

Contrairement à un fluide classique, un milieu granulaire ne s'écoule pas dès que l'inclinaison est non nulle. Depuis Coulomb (1773),

on sait qu'une avalanche sur un tas de sable se déclenche au-delà d'une pente critique, l'angle de démarrage du matériau. On sait aussi que lorsque l'avalanche s'arrête, le tas présente une pente légèrement inférieure de quelques degrés, appelée angle de repos. Dans le cas d'un écoulement sur plan incliné, la situation apparaît plus complexe.

Nous avons étudié les propriétés de démarrage en réalisant une couche d'épaisseur h uniforme. A partir d'un certain angle critique θ_{start} , la couche se met à couler. Pour stopper l'écoulement il faut alors diminuer l'angle à une valeur inférieure θ_{stop} . L'existence de ces deux angles rappelle l'hystérésis observée sur le tas de sable. Cependant, dans le cas d'un écoulement sur fond rugueux, les deux angles critiques dépendent de l'épaisseur h de la couche, comme le montre la figure 1b : plus la couche est fine, plus il faut incliner le plan pour faire couler le milieu. C'est seulement aux grandes épaisseurs que l'on retrouve le comportement du tas de sable, avec un angle de démarrage et d'arrêt ne dépendant plus de l'épaisseur. Ces propriétés de démarrage et d'arrêt qui montrent qu'une couche mince résiste mieux aux contraintes qu'une couche épaisse ne sont pas clairement interprétées. Il semble que la présence d'un fond rugueux rigide rende plus difficiles les mouvements collectifs de grains dans son voisinage, ce qui retarde l'écoulement.

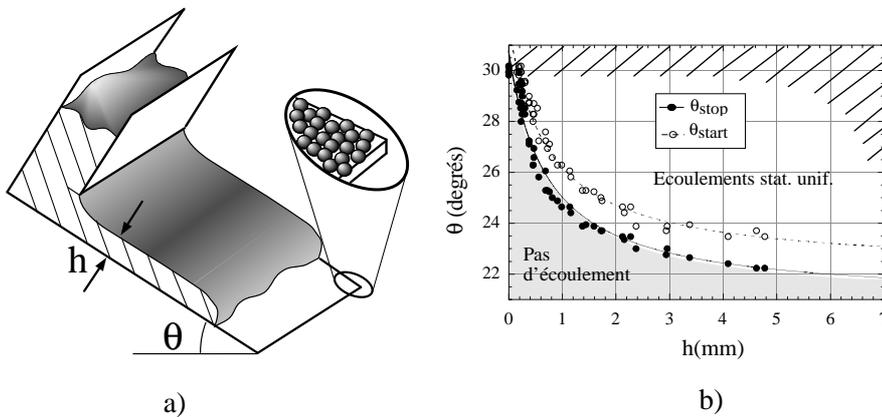


Figure 1 - a) Dispositif expérimental : des billes de verre ($d = 0,5 \text{ mm}$ de diamètre) coulent sur un fond rugueux formé d'une couche de billes collées. Les deux paramètres de contrôle sont l'épaisseur h de la couche et l'angle d'inclinaison θ . **b)** Angle de démarrage θ_{start} et d'arrêt θ_{stop} en fonction de l'épaisseur h : pour faire s'écouler une couche de grains d'épaisseur h , il faut incliner jusqu'à l'angle critique $\theta_{start}(h)$; pour faire s'arrêter la couche, il faut redescendre à un angle plus faible $\theta_{stop}(h)$. La zone grisée correspond à une zone des paramètres où aucun écoulement n'est observé. La zone hachurée n'a pas été étudiée systématiquement, car on n'y observe pas d'écoulements stationnaires uniformes.

En pratique, la mesure des propriétés d'arrêt $\theta_{stop}(h)$ est délicate. Il est beaucoup plus facile de mesurer la courbe inverse $h_{stop}(\theta)$, c'est-à-dire mesurer à angle fixé l'épaisseur critique en dessous de laquelle aucun écoulement n'est possible. On réalise pour cela un écoulement comme sur la figure 1a et l'on coupe soudainement l'alimentation. L'épaisseur diminue alors jusqu'à une épaisseur critique h_{stop} et l'écoulement s'arrête. Le dépôt observé est uniforme, son épaisseur h_{stop} est indépendante de l'histoire de l'écoulement et dépend uniquement de l'inclinaison θ . Nous verrons plus loin que cette fonction de

dépôt joue un rôle important dans la description de la dynamique de l'écoulement.

A QUELLE VITESSE COULENT LES GRAINS ?

Une fois le seuil de l'écoulement identifié, nous nous sommes intéressés aux propriétés de l'écoulement proprement dit. Dans une large gamme d'épaisseur h et d'angle d'inclinaison θ , on observe des écoulements stationnaires uniformes : peu après la sortie du silo, la couche atteint une épaisseur h et une vitesse moyenne u qui ne varient plus le long du plan. La première question

qui se pose est comment cette vitesse de chute varie en fonction des deux paramètres de contrôle de l'expérience, *i.e.* l'angle θ et l'épaisseur h . Nous avons effectué des mesures systématiques et avons trouvé le faisceau de courbes représenté sur la figure 2a : la vitesse augmente quand l'épaisseur de la couche augmente ou quand le plan est plus incliné. Pour un angle fixé, la vitesse suit approximativement une loi de puissance $h^{3/2}$. Le résultat surprenant est que la variation avec θ est entièrement corrélée avec la fonction de dépôt $h_{stop}(\theta)$, que nous avons définie plus haut. En effet, le faisceau de courbes se rassemble en une droite maîtresse si l'on utilise $h_{stop}(\theta)$ pour rendre les variables sans dimension. La relation entre la vitesse, l'épaisseur et l'angle s'exprime alors simplement : u/\sqrt{gh} , où g est la gravité, varie linéairement avec $h/h_{stop}(\theta)$ (figure 2b) :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)} \quad (1)$$

où β est une constante valant 0.136. Cette loi n'est bien sûr valable que pour des épaisseurs $h > h_{stop}$, aucun écoulement stationnaire uniforme n'étant observé pour des épaisseurs plus faibles.

L'influence de l'angle d'inclinaison sur les vitesses est ainsi entièrement contenue dans la fonction

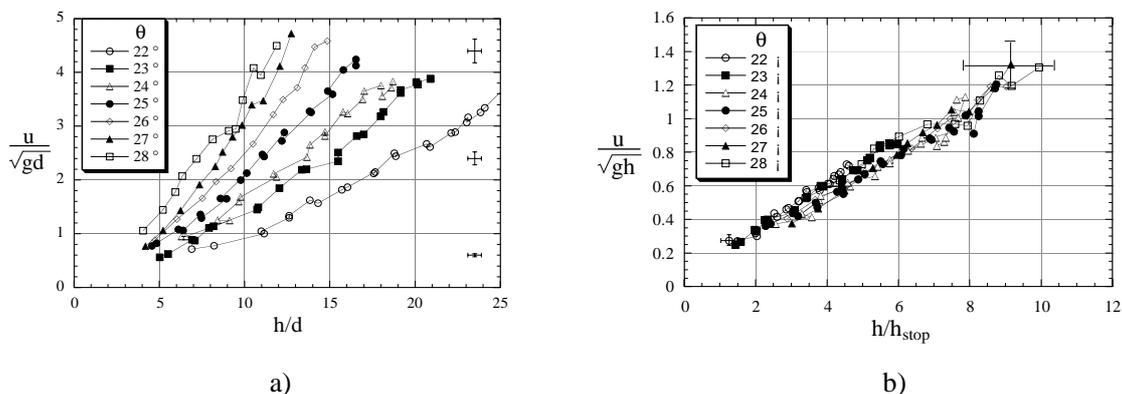


Figure 2 - a) Vitesse moyenne u de l'écoulement en fonction de l'épaisseur h pour différentes inclinaisons θ (g est la gravité, d le diamètre des grains). **b)** En traçant u/\sqrt{gh} fonction de $h/h_{stop}(\theta)$, les données se rassemblent sur une droite maîtresse.

Encadré 1

ÉQUATIONS MOYENNÉES DANS L'ÉPAISSEUR

Les équations hydrodynamiques moyennées dans l'épaisseur ont été introduites dans le contexte des écoulements granulaires par Savage et Hutter (1989). Pour les établir, on part des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un milieu continu et incompressible. L'hypothèse d'incompressibilité est raisonnable pour les écoulements granulaires denses pour lesquels les grains restent en contact les uns avec les autres dans un arrangement compact aléatoire.

On suppose ensuite que l'épaisseur de la couche en écoulement est petite devant les variations caractéristiques du système. Cette hypothèse permet de négliger certains termes et on trouve que la contrainte normale obéit simplement à la loi de l'hydrostatique. En intégrant les équations entre le fond fixe et la surface libre, on obtient finalement deux équations qui régissent l'évolution de l'épaisseur $h(x, t)$ et de la vitesse moyenne $u(x, t)$ de la couche en écoulement. Pour un écoulement bidimensionnel sur une pente d'inclinaison θ , elles s'écrivent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

$$\rho h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (\tan \theta - \mu - \frac{\partial h}{\partial x}) \rho g h \cos \theta$$

La première équation est simplement la version intégrale de la conservation de la masse. La seconde s'interprète comme un bilan de quantité de mouvement pour une tranche élémentaire de grain d'épaisseur h (figure). Le membre de gauche est l'accélération de cette tranche tandis que le membre de droite rassemble les forces extérieures. Une tranche de grain est soumise à trois forces : la gravité représentée par $\rho g h \sin \theta$; une force d'étalement d'expression $\frac{\partial h}{\partial x} \rho g h \cos \theta$, dont l'origine provient des forces de pression qui agissent de part et d'autre de la tranche ; enfin, la contrainte tangentielle au niveau du fond, $\mu \rho g h \cos \theta$, qui est ici exprimée comme un coefficient de friction multiplié par la contrainte normale.

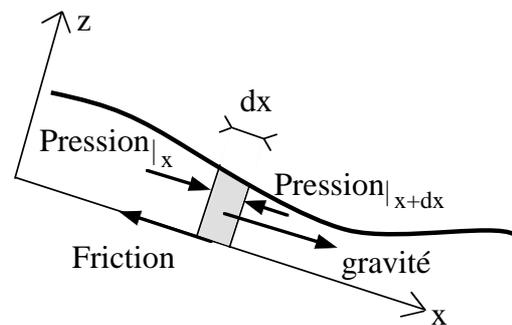


Figure - Les équations moyennées dans l'épaisseur reviennent à écrire la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour une tranche verticale de matériau.

Le grand avantage de ces équations moyennées dans l'épaisseur est qu'il n'est pas nécessaire de connaître en détail la structure interne de l'écoulement pour prédire l'évolution du profil de la couche. Tout le comportement du matériau se trouve en effet décrit par le terme de friction μ au niveau du fond. Cependant, alors que cette force est connue pour un liquide newtonien, on ne connaît pas son expression pour un milieu granulaire. L'étude des écoulements stationnaires uniformes nous permet de proposer une relation empirique pour cette friction. En effet, pour ces écoulements la gravité est exactement contrebalancée par la friction : $\mu = \tan \theta$. Si l'on sait comment la vitesse varie avec l'épaisseur et avec l'angle $u = u(h, \theta)$, on peut inverser la relation pour obtenir $\theta = \theta(u, h)$, ce qui nous donne directement la fonction $\mu(u, h)$. Connaissant de plus la valeur de la friction à vitesse nulle, qui est donnée par l'angle de démarrage, nous sommes en mesure de proposer une loi de friction $\mu(u, h)$ pour toute la gamme de vitesse et d'épaisseur (figure 3). Cette expression, une fois introduite dans les équations moyennées dans l'épaisseur, permet de prédire la dynamique de l'écoulement.

$h_{stop}(\theta)$. Il suffit de mesurer l'épaisseur des dépôts $h_{stop}(\theta)$ pour prédire les vitesses d'écoulements pour tous les angles et toutes les épaisseurs. La fonction $h_{stop}(\theta)$ renferme donc beaucoup d'informations sur les propriétés d'écoulement. Ce résultat, encore inexplicé, a été retrouvé par des simulations numériques réalisées au laboratoire central des Ponts et Chaussées, et reste valable avec d'autres matériaux comme le sable.

VERS UNE APPROCHE HYDRODYNAMIQUE DES ÉCOULEMENTS GRANULAIRES

La loi donnant la vitesse en fonction de l'épaisseur et de l'angle est valable pour les écoulements stationnaires uniformes. Or, la plupart des phénomènes géophysiques sont non stationnaires et non uniformes. Comment utiliser les résultats obtenus précédemment pour tenter de prédire des situations plus complexes ?

Une approche qui semble prometteuse est une description hydrodynamique en termes d'équations moyennées dans l'épaisseur de la couche ou équations de Saint Venant. Le milieu en écoulement est supposé incompressible et les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont intégrées dans l'épaisseur (encadré). Une telle approche n'est pertinente que lorsque la couche en écoulement est fine

par rapport aux longueurs caractéristiques de variation du système. Elle présente l'avantage de nous affranchir de la description précise de ce qui se passe au sein de la couche. En effet, moyenner dans l'épaisseur permet d'exprimer le comportement complexe du fluide par un seul terme, la contrainte qui s'exerce entre la couche en écoulement et le fond rugueux. Pour un fluide newtonien, cette contrainte est simplement la contrainte visqueuse. Qu'en est-il pour un milieu granulaire ?

Les premières utilisations de ces modèles décrivaient cette interaction par une friction solide définie par un coefficient de friction constant. Le milieu granulaire s'écoule en frottant sur le sol, la contrainte étant proportionnelle au poids de la colonne de grains au-dessus, indépendante de la vitesse. Cependant, cette approximation ne permet pas de prédire l'existence des écoulements stationnaires uniformes décrits plus haut, ni de prédire l'existence de dépôts. Si la friction est constante, une masse lâchée sur un plan incliné s'écoulera entièrement sans laisser de dépôt si l'inclinaison est plus grande que l'angle de friction.

Notre démarche a été de proposer une loi de friction empirique, plus réaliste qu'une friction constante, à partir de nos résultats sur les mesures de vitesses des écoulements stationnaires uniformes. Nous nous sommes basés sur la propriété essentielle des écoulements stationnaires uniformes, qui est l'équilibre entre la gravité et la friction (puisque l'accélération est nulle) : dans un écoulement stationnaire uniforme, le milieu ajuste sa vitesse pour que la contrainte au fond équilibre la gravité. La variation de la vitesse avec l'épaisseur et l'angle d'inclinaison permet alors de trouver l'expression de la contrainte au fond (encadré). La loi ainsi trouvée s'exprime comme un coefficient de friction $\mu(u, h)$ qui dépend de la vitesse et de l'épaisseur locales (figure 3). Comme la relation qui relie la vitesse à l'épaisseur et l'angle fait intervenir la fonction

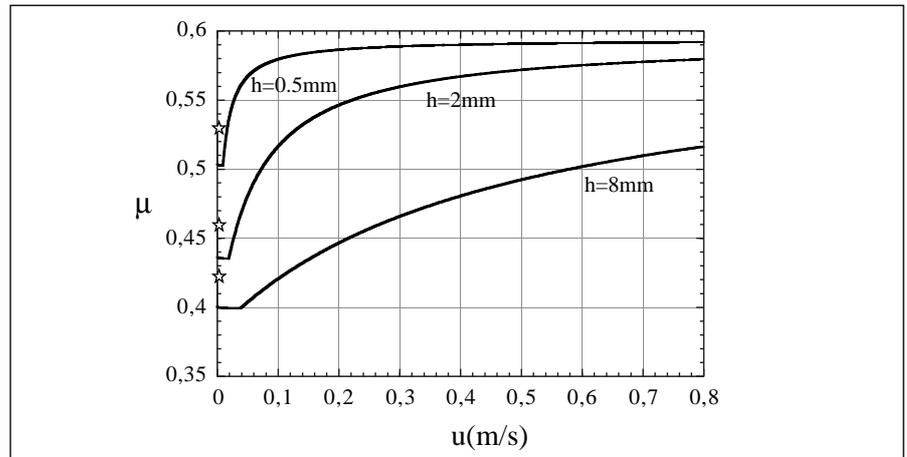


Figure 3 - Coefficient de friction μ en fonction de la vitesse u de la couche de grains pour différentes épaisseurs h . Les étoiles représentent les valeurs pour $u = 0$. Ces courbes sont entièrement déterminées dès que l'on connaît les angles de démarrage et d'arrêt $\theta_{start}(h)$ et $\theta_{stop}(h)$ (figure 1b).

$h_{stop}(\theta)$ (équation 1), le coefficient de friction s'exprime aussi à l'aide de $h_{stop}(\theta)$ ou de son inverse, la fonction $\theta_{stop}(h)$.

Cependant, la loi ainsi obtenue ne s'applique pas aux faibles vitesses (aucun écoulement stationnaire uniforme n'a pu être observé pour $h < h_{stop}$, c'est-à-dire pour $\frac{u}{\sqrt{gh}} < \beta$). Or, nous connaissons la valeur de la friction à vitesse nulle : elle est donnée par l'angle de démarrage $\theta_{start}(h)$. Un simple raccordement permet alors de connaître la loi de friction sur toute la gamme de vitesse (figure 3). Le choix du raccordement est arbitraire, mais nous avons vérifié que les prédictions du modèle ne dépendent pas de ce choix tant que le raccordement est assez brutal, comme sur la figure 3. L'intérêt de cette approche est que la loi de friction est déterminée quantitativement dès que les angles de démarrage et d'arrêt $\theta_{start}(h)$ et $\theta_{stop}(h)$ sont connus.

Cette loi de friction utilisée dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur permet-elle de prédire des écoulements non stationnaires et non uniformes ? Pour le savoir, nous avons réalisé l'expérience suivante : une masse de grains initialement contenue dans une calotte sphérique est libérée en haut

du plan incliné. La masse se met en mouvement, s'étale et s'arrête, laissant un dépôt en forme de larme (figure 4). L'étalement de la masse au cours du temps est mesuré par une technique de Moiré. Afin de comparer quantitativement l'étalement avec les prédictions théoriques, nous avons mesuré les angles $\theta_{stop}(h)$ et $\theta_{start}(h)$ qui nous permettent d'écrire la loi de friction. Nous avons ensuite incorporé cette loi dans les équations moyennées dans l'épaisseur et simulé numériquement l'évolution de la calotte sphérique. Les résultats sont satisfaisants, comme le montre la figure 4. Le modèle prédit correctement non seulement la forme du dépôt final, mais également les vitesses de propagation au cours du mouvement. Ce travail montre donc qu'il suffit de connaître les angles d'arrêt et de démarrage $\theta_{stop}(h)$ et $\theta_{start}(h)$ pour prédire correctement l'écoulement complexe que constitue l'étalement d'une masse de grains, du déclenchement jusqu'au dépôt.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons montré que le mouvement d'une masse granulaire sur un plan incliné rugueux peut être quantitativement prédit par un modèle hydrodynamique de couche mince. Le

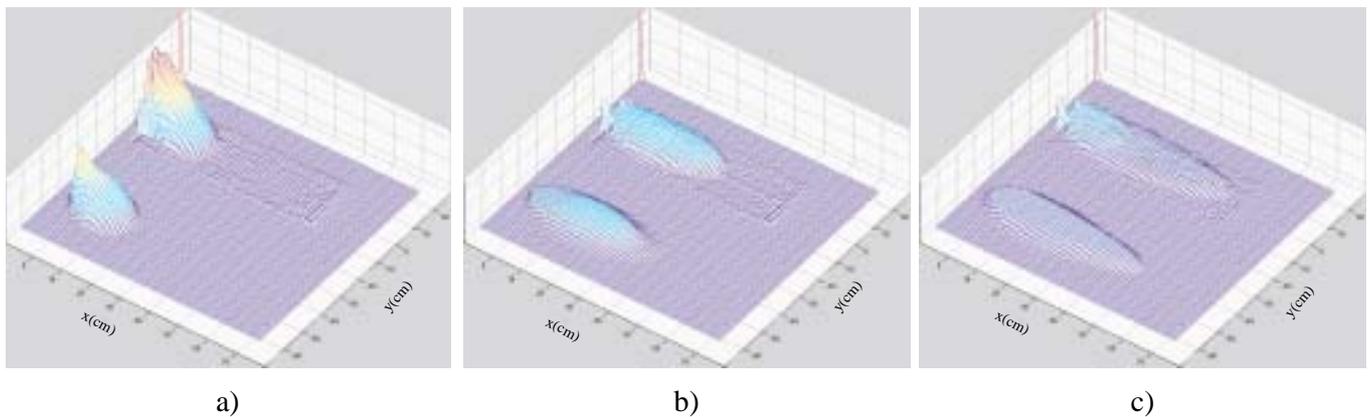


Figure 4 - Comparaison entre théorie (premier plan) et expérience (arrière plan) pour l'étalement d'une masse granulaire sur un plan incliné à $\theta = 23^\circ$. a) $t = 0,2$ s après le lâcher ; b) $t = 1,6$ s ; c) $t = 6,6$ s.

point intéressant est que la loi de friction introduite dans le modèle pour décrire l'interaction entre la couche granulaire et le fond rugueux est déterminée par la mesure des angles de démarrage et d'arrêt. Cependant, cette description reste limitée au cas où le fond rugueux est fixe et rigide. Dans le cas d'un écoulement de surface sur un tas de sable par exemple, il faudrait prendre en compte les échanges de matière entre les grains statiques et la couche en écoulement. De nombreuses recherches sont actuellement menées en ce sens. Un des objectifs majeurs serait d'obtenir des équations constitutives pour les écoulements granulaires denses, un équivalent des équations de Navier-Stokes pour le tas de sable.

Quelles implications nos expériences de laboratoire peuvent-elles avoir pour la prédiction et la description des écoulements géophysiques ? La première différence importante est la complexité du milieu en écoulement. Le matériau en jeu lors d'événements naturels est hétérogène, composé de particules de tailles très différentes, allant du

micron à la dizaine de mètres pour les plus gros blocs, souvent mélangées à un fluide interstitiel. Or, il est bien connu que dès que des particules de tailles différentes sont présentes dans un écoulement granulaire, le phénomène de ségrégation intervient, et les grosses particules se séparent des plus petites. Quelles incidences la ségrégation peut-elle avoir sur les propriétés d'écoulements ? Des expériences sur des matériaux polydisperses sont nécessaires pour étudier la pertinence ou non des résultats présentés plus haut.

Une autre complexité introduite par la nature est la topographie : le flanc des montagnes est rarement une pente constante ! Ce n'est cependant pas un réel problème, car la topographie peut facilement être prise en compte dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur par une pente locale qui varie. Des travaux sur des événements réels actuellement en cours au Laboratoire de détection et de géophysique du Commissariat à l'énergie atomique, à l'Institut de physique du globe de Paris, et au Cemagref à Grenoble ten-

dent à montrer la pertinence de ces approches moyennées dans l'épaisseur. Quant à savoir quelles lois de friction sont les plus pertinentes pour ces matériaux géophysiques, seule une confrontation précise entre expériences de laboratoire, mesures de terrain et prédictions des équations moyennées dans l'épaisseur pourra nous faire progresser.

POUR EN SAVOIR PLUS

Duran (J.), Sables, poudres et grains : introduction à la physique des milieux granulaires, *Eyrolles Sciences (Paris)*, 1997.

Jaeger (H.M.) et al., *Rev. Mod. Phys.*, 68, 1259, 1996.

Rajchenbach (J.), *Advances in Physics*, 49, 229, 2000.

Savage (S.B) et Hutter (K.), *J. Fluid. Mech.*, 199, 177, 1989.

Pouliquen (O.), *Phys. Fluids*, 11, 1956, 1999.

Article proposé par :

Olivier Pouliquen, tél. 04 91 10 68 97, olivier@iusti.univ-mrs.fr

Yoël Forterre, tél. 04 91 10 69 09.

