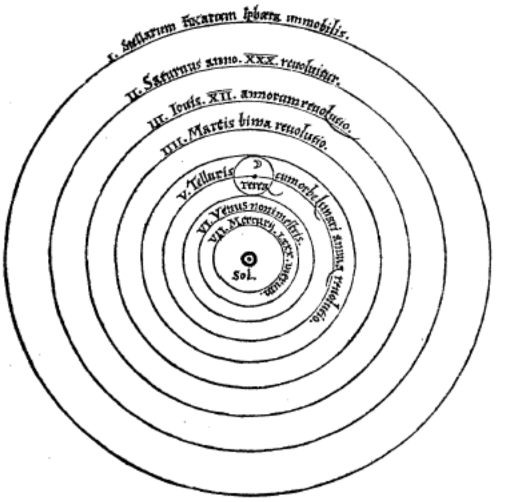
Université Pierre & Marie Curie - Paris VI

Licence 3 de Physique Fondamentale

HISTOIRE DE LA MÉCANIQUE

Travaux Dirigés



Documents établis par Florence Elias et Julien Mozziconacci

Préambule : mode d'emploi des exercices de travaux dirigés et articulation avec le mémoire

Les travaux dirigés visent à analyser dans le détail les textes présentés dans le fascicule de cours, à la lumière des connaissances actuelles en mécanique. Ils permettront de refaire tous les raisonnements originels qui ont conduit à la création et l'évolution de la Mécanique au cours de son histoire.

Dans le mémoire final, on demande de prendre de la hauteur pour retracer l'évolution des concepts et raisonnements.

Le fascicule de travaux dirigés est comporte deux parties distinctes :

La **première partie** contient des exercices d'application corrigés des notions développées dans les chapitres 1, 2 et 3 du fascicule de cours. Les corrigés de ces exercices sont donnés dans un fascicule séparé. Comme pour tous les exercices auto-correctifs, il est fortement recommandé de ne consulter la correction qu'après avoir cherché à répondre aux questions des exercices par vous-même.

La **deuxième partie** contient des exercices d'évaluation, très proches des textes donnés dans le fascicule de cours. La réponse à ces exercices doit être inclue dans le mémoire final. Leur correction a donc été volontairement omise du fascicule de corrigés.

Table des matières

Première partie

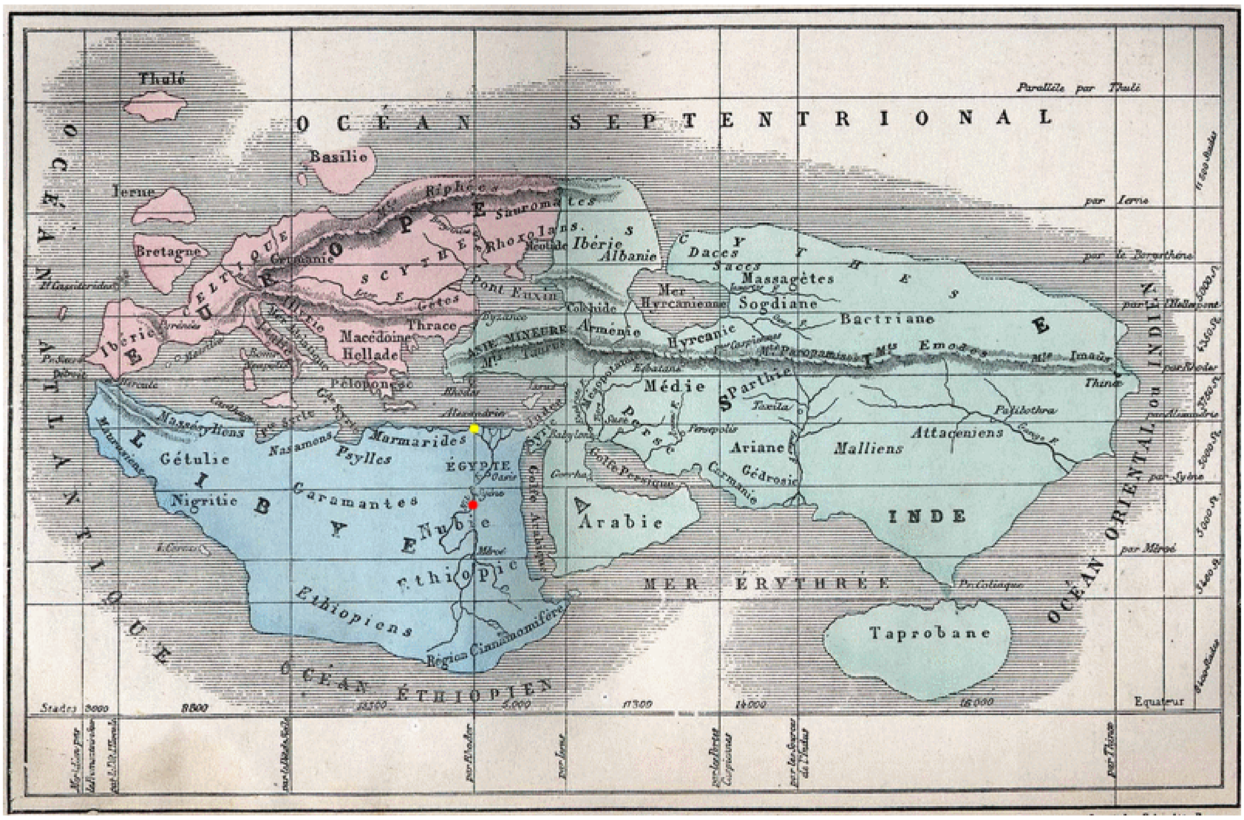
Exercices auto-correctifs

Chapitre 1

Eratosthène : Mesure du rayon de la Terre

Ératosthène était un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du IIIe siècle av. J. C. (276 av. J. C. – 194 av. J. C.). Il fut nommé à la tête de la bibliothèque d'Alexandrie vers -240 à la demande de Ptolémée III, pharaon d'Egypte. Astronome passionné, on dit de lui que, devenu aveugle, il se laissa mourir de faim, ne pouvant plus admirer les étoiles. (Source : Wikipedia).

FIGURE 1.1 – Le Monde connu selon Ératosthène



La première mesure du rayon de la terre a été faite a Alexandrie en 235 av. J.C. par Ératosthène. Il compara l'observation qu'il fit sur l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (indiqué en rouge sur la carte) et Alexandrie (indiqué en jaune sur la carte), le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil occupe la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, dans une précédente observation, Ératosthène avait remarqué qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène (ville située à peu prés sur le tropique du Cancer) ; ainsi, à ce moment précis, le Soleil était à la verticale et sa lumière éclairait directement le fond du puits. Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre ; le Soleil n'était donc plus à la verticale. Mesurant l'ombre portée, Ératosthène déduisit que l'angle entre les rayons solaires et la verticale était de 7,2 degrés. Il évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie en se basant sur le nombre de journées de marche entre les deux villes : la distance obtenue était de 5000 stades.

1. Faire un schéma expliquant comment à partir de ces mesures il est possible d'estimer la circonférence $\mathcal{C}$ et le rayon R de la Terre. Donner l'expression de $\mathcal{C}$ et de R, et leur valeur numérique en nombre de stades.

2. On cherche à exprimer les incertitudes de mesures liées au calcul d'Eratosthène.
   (a) A partir de la mesure de l'ombre portée d'un objet vertical, estimer l'incertitude relative sur la mesure de l'angle entre la verticale et les rayons du Soleil.
   (b) En réalité, Syène et Alexandrie ne sont pas tout à fait sur le même parallèle : la différence de longitude entre les deux villes est de 3,02 degrés. Calculer l'erreur relative sur la mesure de l'angle qu'implique l'hypothèse d'Eratosthène selon laquelle les deux villes sont sur le même méridien.
   (c) Calculer la parallaxe du Soleil sur la Terre, c'est-à-dire l'angle sous lequel les rayons du Soleil sont vus en deux points opposés sur la Terre. On prendra le rayon de la Terre égal à 6400 km, la distance Terre - Soleil égale à $1{,}5.10^8$ km et on supposera que le Soleil est ponctuel. En déduire une incertitude supplémentaire sur l'angle entre les rayons solaires et la verticale du lieu.
   (d) On considère que les marcheurs professionnels entraînés de l'époque (les bématistes) mesuraient des distances avec une précision de l'ordre de 1 %. En déduire l'incertitude relative et absolue sur la mesure de $\mathcal{C}$ et de R, (en nombre de stades)
3. La plus grande inconnue sur la mesure d'Eratosthène est qu'on ne sait pas de façon certaine à quelle définition mathématique du stade cette méthode fait référence. On effet on compte au moins 7 définitions possibles :
   (a) 1 « Stade d'Hérodote »= 600 pieds Grecs = 190,5 m,
   (b) 1 « Stade d'Eratosthène »= 300 coudées royales Egyptiennes = 600 unités Gugea = 158,7 m,
   (c) 1 « Stade Ptoléméen »= 400 coudées royales = 600 pieds Ptoléméens = 211,6 m,
   (d) 1 « Stade Italikon »= 600 pieds Cyrenaïques = 185,2 m,
   (e) 1 « Stade Olympique »= 600 pieds Romains = 177,8 m,
   (f) 1 « Stade Chaldéen »= 375 coudées royales = 750 unités Gugea = 198,4 m,
   (g) 1 « Stade Rhodien »= (5/6)*375 coudées royales = 165,3 m.

   Pour chacun de ces cas, calculer (erreur comprise) la valeur de la circonférence et du rayon terrestre en kilomètres. Comparer ces valeurs à la valeur connue actuellement :
   circonférence équatoriale $\mathcal{C}$ = 40 075 km ; rayon moyen volumétrique R = 6371 km.
   Conclure

Chapitre 2

Mouvement rétrograde de Mars

L'observation du mouvement rétrograde de Mars qui se produit, observé de la Terre, tous les 26 mois environ, a été à l'origine d'importants développements de l'Astronomie. Ptolémée a développé le modèle des épicycles pour rendre compte de ce mouvement en gardant la Terre au centre du monde ; Copernic a montré que le modèle héliocentrique permettait également mais plus aisément de reproduire le mouvement rétrograde de Mars. Enfin, Kepler, remarquant une différence systématique entre la position de Mars issue du calcul Copernicen et celle mesurée par des observations astronomiques très précises, a déduit que le mouvement des planètes autour du Soleil devait être elliptique.

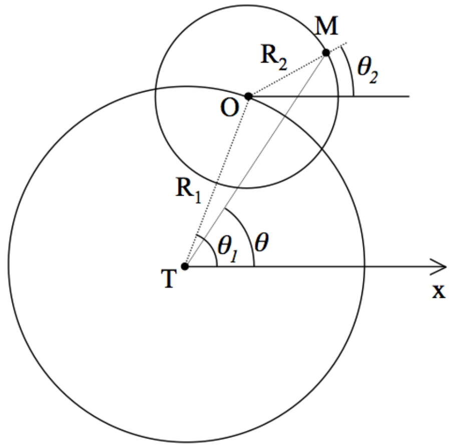
Nous cherchons ici à calculer le mouvement apparent de Mars observé de la Terre dans le modèle des épicycles et dans le modèle héliocentrique.

2.1 Modèle des épicycles

On considère un système géocentrique : la Terre T est le centre immobile du mouvement. La planète Mars M tourne autour du point O qui décrit lui-même un mouvement circulaire uniforme autour de T.

Le rayon du cercle déférent décrit par O autour de T est noté R_1 ; la position angulaire de O par rapport à un axe fixe Ox passant par T est notée θ_1. O tourne à la vitesse angulaire Ω_1 constante autour de T.

Le rayon du cercle décrit par M autour de O est noté R_2 ; la position angulaire de M par rapport à un axe parallèle à Ox passant par O est notée θ_2. M tourne à la vitesse angulaire Ω_2 constante autour de O.



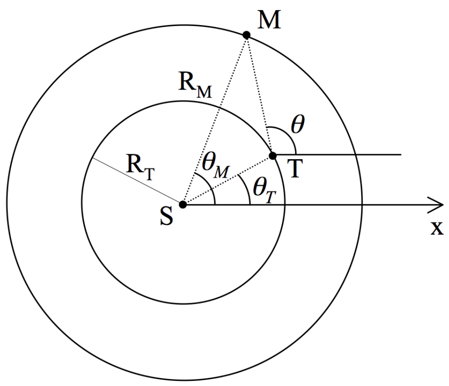
1. On note θ l'angle formé par la direction TM et l'axe Ox de référence. Pour décrire le mouvement apparent de Mars vu depuis la Terre, calculer l'angle $\theta(t)$ en fonction des données du problème.
2. On considère que les cercles sont parcourus dans le sens trigonométrique. Montrer qu'on n'observe un mouvement rétrograde de Mars que si le rapport des rayons et des fréquences angulaires de l'épicycle et du déférent respectent certaines conditions

3. Application numérique : on donne $R_1/R_2 = 1{,}5$, $T_1 = 1{,}88$ ans , $T_2 = 1$ an. Calculer $\theta(t)$. Montrer qu'un mouvement rétrograde se produit périodiquement ; calculer cette période.

2.2 Modèle héliocentrique

On considère maintenant que la Terre et Mars tournent autour du Soleil immobile. Pour simplifier les calculs on supposera que les mouvements des deux planètes sont circulaires uniformes et non elliptiques et qu'ils se produisent tous dans le même plan. On note θ l'angle entre un axe de référence (l'axe Sx) et la direction Terre - Mars. Pour décrire le mouvement apparent de Mars vu depuis la Terre, on cherche à calculer l'angle $\theta(t)$.

On note :
S, T et M les positions respectivement du Soleil, de la Terre et de Mars,
R_T et R_M les rayons respectifs des orbites de la Terre et de Mars,
θ_T et θ_M les coordonnées angulaires respectives de la Terre et de Mars par rapport à l'axe Sx.



1. Calculer $\theta(t)$ en fonction des données du problème.
2. A quelle condition observe-t-on un mouvement rétrograde de Mars ? Calculer la périodicité d'apparition de ce mouvement rétrograde.
   On donne $R_M = 2{,}3\ 10^{11}$ m, $R_T = 1{,}5\ 10^{11}$ m, et les périodes de révolution de Mars et de la Terre autour du Soleil : $T_M = 687$ jours et $T_T = 365$ jours.

Chapitre 3

Chute des Corps et Principe d'Inertie : Galileo Galilei

3.1 « La résistance du milieu »

Dans cette partie, on cherche à préciser, en utilisant les connaissances actuelles en mécaniques, quelles sont les grandeurs physiques sous-entendues par Galilée lorsqu'il parle de résistance du milieu.
On s'appuie sur les extraits des textes de Galilée présentés dans le recueil de cours.

1. Dans le premier extrait des *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Salviati considère la différence de flottabilité d'un corps dans des milieux de densités différentes. En utilisant vos connaissances actuelles, identifiez la force à laquelle Galilée fait référence.

2. Dans l'état des connaissances actuelles en mécanique moderne, on sait que le mouvement de chute d'un corps qui ne tombe pas dans le vide est freiné par le frottement visqueux du corps dans le milieu. Si l'objet est une boule de rayon R, la force de frottement visqueux s'exprime : $\vec{F_v} = 6\pi\eta R\vec{v}$, où η est la viscosité du milieu environnant et $\vec{v}$ est la vitesse de chute de la boule. La force de frottement visqueux, le poids du corps et la force exprimée à la question précédente sont donc les trois forces extérieures qui s'exercent sur l'objet considéré.
   (a) Faire un schéma des forces qui s'exercent sur le corps.
   (b) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, écrire l'équation différentielle reliant la vitesse $v(t)$ de la boule à ses dérivées temporelles.
   Calculer $v(t)$ en résolvant cette équation et en considérant que la boule tombe sans vitesse initiale.
   Montrer que la boule atteint une vitesse limite v_0 (à déterminer), et que la dynamique di mouvement est fixée par un temps caractéristique τ (à déterminer).
   (c) Application numérique : calculer v_0 et τ lorsque la boule est sphérique de la rayon $R = 1$ cm dans les trois cas suivants :
      i. la boule est faite de plomb et le milieu environnant est de l'eau,
      ii. la boule est faite de plomb et le milieu environnant est de l'air,
      iii. la boule est faite de liège et le milieu environnant est de l'air.
   On donne :
   - masse volumique du plomb : $\rho_p = 11$ kg/l,
   - masse volumique du liège : $\rho_l = 240$ kg.m^{-3},
   - masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1$ kg/l : viscosité de l'eau : $\eta_e = 10^{-3}$ Pa.s,
   - masse volumique de l'air : $\rho_a = 1{,}2$ kg.m^{-3} : viscosité de l'air : $\eta_a = 18.10^{-6}$ Pa.s.

3. Commenter « L'écart des vitesses augmente avec la densité du milieu ».

4. Calculer $v(t)$ lorsque la boule tombe dans le vide sans vitesse initiale.

3.2 Les dispositifs expérimentaux de Galilée

1. **La chute libre :** une boule, lâchée dans l'air sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 2$ m, atteint le sol après un temps T.
   (a) En vous aidant des résultats des questions précédentes, calculer le temps de chute T d'une d'un boule de plomb de rayon $R = 1$ cm et d'une boule de liège de même rayon [1].
   (b) Calculer T lorsque la boule tombe dans le vide sans vitesse initiale.

2. **Le plan incliné :**
   (a) En supposant que les frottements sont totalement supprimés, exprimer la vitesse de chute d'une boule lâchée sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
   (b) Calculer le temps de chute de la boule le long d'un plan incliné de hauteur $h = 2$ m et d'angle $\alpha = 10$ degrés.

3. **Le pendule :** on considère une boule de masse m accrochée à un pendule de longueur l.
   (a) On néglige toute source de frottement. En appliquant le théorème du moment cinétique au point d'attache, établir l'équation du pendule qui relie le déplacement angulaire θ à ses dérivées temporelles.
   En déduire $\theta(t)$ dans le cas $\theta \ll 1$
   (b) Si l'on considère que le pendule est également soumis à un frottement visqueux de coefficient k (le frottement de l'air), il faut ajouter une force de moment $-kld\theta/dt$ à l'équation précédente. Ré-écrire l'équation du pendule en tenant compte du frottement de l'air dans le cas des petites oscillations. Pour résoudre cette équation, on cherche une solution de la forme $\theta(t) = \theta_0 \exp(i\Omega t)$ où θ_0 est un nombre réel et $\Omega = \omega + i/\lambda$ est un nombre complexe de partie réelle ω et de partie imaginaire λ^{-1}. Déterminer ω et λ. Quelle est leur signification physique ?
   (c) Application numérique : calculer ω et λ dans le cas où d'une boule de plomb rayon $R = 1$ cm oscillant au bout d'une tige de longueur $l = 10$ cm, et dans le cas où la même boule est faite de liège. On donne $k = 3\ 10^{-8}$ kg.m.s^{-1}.

4. **Discussion sur les frottements :**
   (a) En vous appuyant sur vos connaissances de mécanique moderne, donner la nature des frottements dans les trois cas considérés par Galilée :
   – La chute libre,
   – La chute sur un plan incliné,
   – Le pendule.
   (b) De ces trois dispositifs expérimentaux, lequel vous paraît le mieux approprié pour mettre en évidence la loi de la chute des corps ?

1. Pour cela, on remarquera que $T/\tau \ll 1$ et on développera l'expression de $v(t)$ au premier ordre en t/τ.

Chapitre 4

René Descartes : ***Les Principes de la Philosophie*** (1644)

René Descartes (1596 - 1650) a écrit les *Principes de la Philosophie* en 1644, dont l'objectif est de « donner des fondements rigoureux à la philosophie ». La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique : la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement cinématique, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les *Principes de la Philosophie*, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des causes secondes appelées les lois de la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

Le sujet porte ici sur les articles 36 à 43 de la deuxième partie des *Principes de la Philosophie* (traduction française de l'abbé Picot) ci-joints.

4.1 Analyse du document

Article 36 : Quelles sont les grandeurs qui se conservent selon Descartes ? Comment ce principe de conservation est-il justifié ?

Article 37 : Résumer cette nouvelle loi de conservation. Comment Descartes justifie-t-il l'énoncé de cette loi ? Comment s'articule-t-elle avec l'article précédent ?

Article 38 :

1. Identifier, dans le cadre de vos connaissances en mécanique classique, la nature de la force de résistance dont parle Descartes dans cet article. Toujours dans le cadre de la mécanique classique, relier cette force à une grandeur physique caractéristique de l'air ou des autres corps liquides considérés.
2. En utilisant vos connaissances en mécanique classique, écrire l'équation du mouvement d'un corps se déplaçant dans un liquide et soumis à aucune autre force extérieure que cette résistance du liquide. Résoudre cette équation et montrer que la vitesse du corps diminue dans le temps.

Article 39 : Quel nom donneriez-vous à cette seconde loi de la nature ? Comment s'appelle la grandeur responsable du fait que lorsqu'elle tourne dans la sonde, la pierre « tire et fait tendre la corde pour s'éloigner directement de notre main » ?

Article 40 : Quel nom donneriez-vous à cette troisième loi de la nature ? Comment, dans le cadre de la mécanique classique, sont qualifiées ces "rencontres" avec un corps "dur" d'une part, et avec un corps "mou" d'autre part ?

Article 41 : Résumer la première partie de la règle dont il s'agit ici. Comment comprenez-vous la notion de "détermination" utilisée par Descartes, et celle de "mouvement" ?

Article 42 : Résumer la seconde partie de la règle dont il s'agit ici. Résumer cet article avec vos propres mots. Quelle est la nature de l'argumentation présentée par Descartes ?

Article 43 : Notion de “force" : repérer dans le texte les phrases dans les quelles Descartes utilise le mot “force". Que représente à votre avis cette notion dans le texte de Descartes ? Correspond-elle à la notion de force en mécanique classique actuelle ?

4.2 Questions de synthèse

1. Rappeler les grandes lignes du raisonnement qui a conduit Galilée à énoncer le principe d'inertie. Quelles différences voyez-vous entre l'approche de Galilée et celle de Descartes sur ce point ?
2. Donner une définition de la quantité de mouvement la plus proche de la notion de Descartes. Quelles sont les différences principales avec la définition actuelle ?
3. Notion de repos et de mouvement : quelle différence y a-t-il entre la conception de ces notions chez Descartes et chez Galilée ?
4. Comparer les trois lois de la nature dans le texte de Descartes et les trois lois du mouvement énoncées par Newton dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*

Extrait des *Principes de la Philosophie*, René Descartes, 1644,
traduction française de l'abbé Picot.

LES PRINCIPES
DE
LA PHILOSOPHIE.

SECONDE PARTIE.

DES PRINCIPES DES CHOSES MATÉRIELLES.

36. Que Dieu est la première cause du mouvement, et qu'il en conserve toujours une égale quantité en l'univers.

Après avoir examiné la nature du mouvement, il faut que nous en considérions la cause, et parcequ'elle peut être prise en deux façons, nous commencerons par la première et plus universelle, qui produit généralement tous les mouvements qui sont au monde; nous considérerons par après l'autre, qui fait que chaque partie de la

Deuxième partie

Exercices d'évaluation

Chapitre 5

Isaac Newton, *Principia*

On s'intéresse à la proposition I, Théorème I de la seconde section des *Principiæ* de Newton, retranscrite p. 44 du fascicule de cours. On cherche à refaire en détails la démonstration proposée par Newton. Newton utilise exclusivement des démonstrations géométriques.

Nous utilisons dans l'énoncé les notations de la figure tracée par Newton p. 44 du fascicule : S est la position du centre de la force centripète. A est la position initiale du corps considéré et B, C, D, E et F sont les positions successives occupées par le corps qui reçoit une impulsion de la force centripète à chaque fois qu'il passe en un de ces points. En-dehors de ces positions, le corps n'est soumis à aucune force extérieure.

5.1 « Donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS et cS, les aires ASB et BSc soient égales »

1. Pourquoi peut-on dire que la distance AB est égale à la distance Bc ?
2. En vous aidant d'une construction géométrique, démontrer que l'aire du triangle ASB est égale à l'aire du triangle BSc.

5.2 « ... le triangle SBC sera égal au triangle SBc... »

1. Pourquoi le corps se retrouve-t-il en C au lieu de c s'il subit une impulsion de la force centripète losqu'il est au point B ? Faire un schéma.
2. Exprimer l'aire des triangles SBC et SBc à partir de leur base commune SB ; montrer que ces aires sont égales.

5.3 « ... le corps sera en C [...] dans le même plan que le triangle ASB. »

Démontrer que les triangles SAB et SBC sont dans le même plan.

5.4 Conclusion

1. Montrer en quoi la Proposition I est une généralisation de la deuxième loi de Kepler.
2. Identifier, dans la démonstration de la Proposition I et dans ses corollaires, les prémices du calcul infinitésimal.
3. Comment Newton fait-il le lien entre une force centripète et la force de gravité ressentie sur Terre ?

<u>**Référence**</u> : « Le mouvement des planètes autour du Soleil », R. Feynman, D. Goodstein, J. Goodstein, Ed. Cassini, 2009.

Chapitre 6

Joseph Louis Lagrange : *Mécanique Analytique*

On cherche à retranscrire, dans le langage actuel de la mécanique, la démonstration de Lagrange présentée dans le recueil au deuxième extrait de *Mécanique Analytique*, qui conduit à la première loi de Kepler.

1. On considère le problème posé au début de l'extrait (paragraphe 17), où un corps de masse m en mouvement est soumis à une force radiale $R(r)$.
   (a) Écrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du corps en mouvement dans le sytème de coordonnées sphériques (r, ψ, ϕ).
   (b) Écrire les trois équations de Lagrange correspondant aux trois coordonnées sphériques ; en déduire les trois équations du mouvement.

2. Montrer que la trajectoire du corps se fait dans un plan.

3. Dans la suite, on considère que la trajectoire du corps a lieu dans le plan $\psi = 0$. On considère également que la force radiale $R(r) = mF/r^2$.
   (a) Ré-écrire les équations du mouvement dans ces conditions.
   (b) En déduire, à la façon de Lagrange, une équation reliant $\dot{\phi}$ et r, et une équation entre $\dot{r}$ et r.
   (c) Montrer que la trajectoire est une ellipse dont on précisera les caractéristiques.