

L2 PRÉSERVATION DES BIENS CULTURELS

STATISTIQUES

Notes de cours

Florence ELIAS, Julien HIRSZOWSKI

Les mathématiques vues au premier semestre ne tiennent pas compte du hasard. Elles sont donc inadaptées pour interpréter des résultats expérimentaux où le hasard joue un rôle important, comme c'est le cas pour la datation par le radiocarbone. Il faut alors faire appel à des mathématiques d'un autre type : le calcul des probabilités, qui permet l'interprétation statistique des résultats obtenus.

Prenons l'exemple d'un milieu transparent qui absorbe 50 % de la lumière qu'il reçoit. On pourrait croire que ce milieu absorbe forcément un photon sur deux or il n'en est rien. En effet :

- considérons un photon pénétrant dans ce milieu : va-t-il être absorbé ? Il a une chance sur deux d'être absorbé. Autrement dit sa probabilité d'être absorbé est de $1/2$. Tout se passe comme si le sort du photon se jouait à pile ou face.
- Considérons maintenant deux photons pénétrant dans ce milieu. Il y a trois possibilités plus ou moins probables :
 1. Les deux photons seront transmis (une chance sur quatre),
 2. un photon sera transmis et l'autre sera absorbé (une chance sur deux),
 3. les deux photons seront absorbés (une chance sur quatre).

En réalité il y a un très grand nombre de photons, suffisamment grand pour que l'intensité lumineuse (transmise ou absorbée), qui est proportionnelle au nombre de photons, varie de façon continue à notre échelle. Le facteur de transmission T du milieu est donc tel que :

- la probabilité que les deux photons soient transmis = T^2 ,
- la probabilité qu'un photon soit transmis et l'autre absorbé = $2T(1 - T)$,
- la probabilité que les deux photons soient absorbés = $(1 - T)^2$.

Concrètement, la question posée dans ce cours est : à partir de données expérimentales présentant une variabilité non négligeable, due au hasard, que peut-on affirmer ? Avec quel degré de certitude ?

Table des matières

1	Statistique descriptive	5
1.1	Vocabulaire	5
1.2	Présentation des observations	7
1.3	Valeurs caractéristiques d'une distribution	8
2	Probabilités	13
2.1	Notion de probabilités	13
2.2	Calculs de probabilité	14
3	Statistique interprétative	19
3.1	Estimations	19
3.2	Tests d'hypothèses	20
4	Datation par le carbone 14	23
4.1	Principe de la datation	23
4.2	Aspect statistique	26
4.3	Hypothèse de Libby	26

Chapitre 1

Statistique descriptive

On considère un ensemble de données numériques (par exemple les résultats d'une série de n mesures). La statistique est une méthode scientifique qui consiste à réunir des données chiffrées sur des ensembles nombreux, puis à analyser, à commenter et à critiquer ces données.

La statistique descriptive s'occupe d'analyser ces données, en les présentant de façon aussi simple et pratique que possible sous forme de tableaux et graphiques, et en faisant ressortir leurs principales caractéristiques à l'aide d'un petit nombre de valeurs typiques.

1.1 Vocabulaire

Les premières statistiques ont été celles de recensements démographiques. Ainsi le vocabulaire statistique est essentiellement celui de la démographie.

La statistique descriptive peut se résumer par le schéma suivant :



1.1.1 Population et échantillon

- La **population** (ou "ensemble de référence") est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique. Par exemple : l'ensemble des résultats que pourrait donner une expérience.
- La population est composée d'**individus** (ou "unités statistiques"). Par exemple : un des résultats possibles.
- Un **échantillon** est un ensemble (pris dans la population) sur lequel on a des données. Un échantillon peut être ou non représentatif de la population (il l'est s'il comporte un nombre

suffisant d'individus pris au hasard dans la population).

- La **taille** est le nombre d'individus constituant un ensemble donné.

Notations : taille de la population = N , taille de l'échantillon = n .

1.1.2 Aspect étudié (ou "caractère")

Le **caractère** est la propriété étudiée. Le caractère peut être

qualitatif (= repérable; exemple : la couleur, la forme d'un objet), ou

quantitatif (= mesurable; exemple : taille d'un objet, nombre de globules blancs / ml de sang).

L'étude d'un caractère quantitatif (ou "variable statistique") aboutit à une série de **valeurs** numériques (ou "série statistique") de la variable statistique considérée. Les valeurs possibles sont notées x_i , où $i = 1, 2, \dots$

Par exemple : dans un système de notation de 0 à 20 au demi-point près, on a $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1,5$, ..., $x_{39} = 19$, $x_{40} = 19,5$, et $x_{41} = 20$.

Remarque : on peut également noter x_i les différentes valeurs possibles d'un caractère qualitatif (par exemple : $x_1 = \text{rond}$, $x_2 = \text{triangulaire}$, ...).

Autre remarque : on peut étudier simultanément plusieurs caractères sur chaque individu, par exemple sa taille et son poids. On parle d'étude statistique à plusieurs variable (thème non abordé dans ce cours).

1.1.3 Effectifs et fréquences

On considère un échantillon donné de taille n .

- L'**effectif** n_i correspondant à une valeur déterminée x_i est le nombre d'individus dont le caractère étudié présente la même valeur x_i .

Si k est le nombre de valeur différentes que peut prendre le caractère étudié, on a donc :

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i.$$

- La **fréquence** f_i d'une valeur est le nombre d'individus présentant cette valeur (i. e. l'effectif) divisé par le nombre total d'individus dans l'échantillon considéré : $f_i = n_i/n$.

On a donc : $\sum_{i=1}^k f_i = 1$.

- L'**effectif cumulé** est le nombre de valeurs obtenues inférieures à une valeur donnée :

$$\tilde{n}_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i = \sum_{p=1}^i n_p$$

- La **fréquence cumulée** est définie par $\tilde{f}_i = \sum_{p=1}^i f_p = \frac{\tilde{n}_i}{n}$.

Note : les fréquences cumulées sont intéressantes pour diviser un échantillon, par exemple en deux groupes égaux contenant les $n/2$ valeurs les plus petites, et les $n/2$ valeurs les plus grandes..

1.2 Présentation des observations

1.2.1 Tableaux statistiques

On ordonne les valeurs observées, de la plus petite à la plus grande.
On compte les effectifs correspondant aux différentes valeurs.
On reporte cela dans un tableau = le "tableau de distribution statistique".

Valeurs	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Remarque : On peut reporter les fréquences au lieu des effectifs; on peut également rajouter des lignes et reporter les effectifs cumulés et/ou les fréquences cumulées.

Dans le cas où la valeur considérée est continue, ou bien lorsqu'il y a beaucoup de valeurs différentes (i. e. trop de colonnes, en pratique plus de dix colonnes), on définit des **classes** regroupant plusieurs valeurs. Chaque classe est définie par ses bornes $[a; b[$. Cette notation (intervalle fermé à gauche de a , intervalle ouvert à droite de b) signifie que la borne inférieure a appartient à la classe et que la borne supérieure b n'appartient pas à la classe.

On peut également définir chaque classe par :

- son centre $\frac{a+b}{2}$,
- sa largeur $b - a$ ou sa demi-largeur $\frac{b-a}{2}$.

Exemple : dans un système de notation de 0 à 20 au demi-point près, on a 41 valeurs possibles. On peut les représenter en classes :

A : [18; 20[B : [16; 18[C : [14; 16[D : [12; 14[
E : [10; 12[F : [08; 10[F_x : [06; 08[I : [0; 06[

Le regroupement en classes donne un tableau plus simple (moins de colonnes).

1.2.2 Représentation graphique

Diagramme en bandes ou en secteurs (camemberts) : La surface de la bande ou du secteur est proportionnelle à la fréquence de la valeur associée. Généralement utilisé pour représenter des caractères qualitatifs.

Diagramme en bâtons : la hauteur des bâtons correspond à l'effectif n_i associé à chaque valeur x_i du caractère considéré. On l'utilise pour des variables prenant des valeurs entières.

Histogramme : juxtaposition de rectangles dont les bases sont centrées sur les x_i et dont les aires sont proportionnelles aux effectifs n_i associés. Les classes n'ont pas obligatoirement la même largeur. Si les classes ont la même largeur, on prend pour hauteur des rectangles les effectifs.

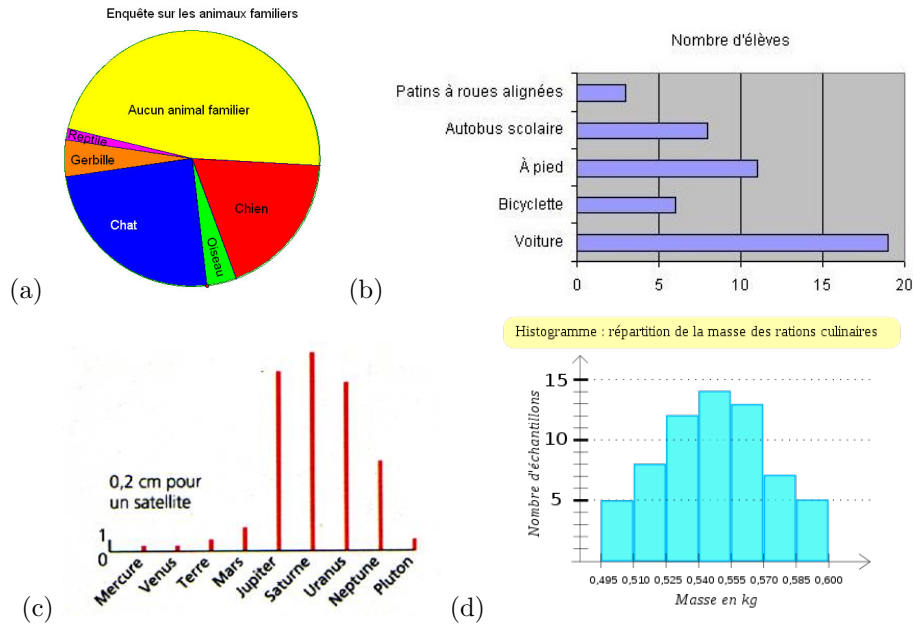


FIGURE 1.1 – Diagramme circulaire (a), en bandes (b), en bâtons (c) et histogramme.

1.3 Valeurs caractéristiques d'une distribution

Comment caractériser une distribution ? Qu'est-ce qui la distingue d'une autre distribution ?

Deux histogrammes sont différents

- lorsqu'ils sont situés à des endroits différents sur l'axe des x (i. e. les positions des centres des histogrammes ne coïncident pas),
- ou lorsque l'étalement des histogrammes laisse apparaître une différence entre la dispersion des valeurs de l'un et celles de l'autre.

Remarque : les histogrammes peuvent de surcroît différer par leur forme (dissymétrie, aplatissement), mais nous laisserons cet aspect de côté.

La position du centre d'un histogramme et son étalement sont caractérisés par deux types de valeurs : valeurs centrales, et valeurs de dispersion.

1.3.1 Valeurs centrales

a- La moyenne \bar{x}

Pour un échantillon de n individus :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.1)$$

A partir du tableau de distributions, comportant k valeurs différentes de x (k colonnes, $k \leq n$), on a de façon équivalente :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad (1.2)$$

La moyenne est la principale valeur centrale.

Remarque : si les valeurs de x ont été préalablement regroupées en classes, on calcule \bar{x} en prenant les valeurs des centres des classes comme si toutes les valeurs d'une même classe étaient égales au centre de la classe. On peut obtenir un résultat légèrement différent de celui obtenu avant le regroupement en classes.

b- Autres valeurs de position

La médiane m_e : c'est une valeur (pas nécessairement l'une des valeurs observées) telle que le nombre de valeurs observées supérieures à m_e est égal au nombre de valeurs observées inférieures à m_e .

Pour obtenir m_e , on ordonne les n valeurs de la plus petite à la plus grande et on prend :

- si n est pair : la $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{ieme}$ valeur,

- si n est impair : la moyenne entre la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ieme}$ valeur et la $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{ieme}$ valeur.

Exemple : si $n = 50$, m_e est la 26^{ieme} valeur du tableau statistique ; si $n = 51$, m_e est la moyenne entre la 25^{ieme} et la 26^{ieme} valeur du tableau statistique.

La médiane partage donc la série des valeurs observées en deux groupes de même effectif.

Si $n = 50$, m_e sépare deux groupes contenant chacun 25 valeurs ; si $n = 51$, m_e sépare deux groupes contenant chacun 25 valeurs.

Remarque : si la distribution est symétrique, la moyenne et la médiane sont égales.

Le mode m_o : c'est la valeur la plus fréquente (celle dont l'effectif est le plus grand).

Si cette valeur est unique, la distribution est dite unimodale ; s'il y en a deux, elle est dite bimodale. Si plusieurs colonnes successives du tableau de distribution statistique présentent le même effectif maximum, on parle d'intervalle modal.

Remarque : pour une distribution symétrique unimodale : $\bar{x} = m_e = m_o$.

1.3.2 Valeurs de dispersion

Les valeurs de dispersion permettent de mesurer la largeur d'une distribution autour de la moyenne.

Une valeur simple est l'étendue de la distribution = $x_{max} - x_{min}$.

La valeur de dispersion utilisée habituellement est l'écart-type de la distribution.

a- Ecart-type s

Par rapport à la moyenne, les valeurs observées présentent des écarts :

$$e_1 = x_1 - \bar{x},$$

$$e_2 = x_2 - \bar{x},$$

...

$$e_n = x_n - \bar{x}.$$

La moyenne des écarts pourrait donner un écart typique d'une distribution donnée, mais ce n'est pas si simple car :

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} n \bar{x} \\
&= \bar{x} - \bar{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les écarts positifs compensent les écarts négatifs.

Pour éviter cet inconvénient, on calcule la moyenne des carrés des écarts et on prend la racine carrée de cette moyenne :

la **variance** est la moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.3)$$

L'**écart-type** s est :

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (1.4)$$

Grâce à la racine carrée, l'unité de l'écart-type est la même que celle de la variable x et de la moyenne \bar{x} .

Remarque : le calcul de l'écart-type est grandement simplifié si on connaît la somme des carrées des valeurs observées. En effet, d'après la formule de König, on a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 :$$

la variance est égale à la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne.

Dans le cas de données regroupées en k classes d'effectif n_i , on a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i^2) - \bar{x}^2.$$

Intérêt de l'écart-type : la plupart des valeurs observées sont comprises entre $\bar{x} - s$ et $\bar{x} + s$.

Remarque : l'écart-type est une valeur de dispersion absolue. Pour comparer deux distributions statistiques, il peut être intéressant de calculer une valeur de dispersion relative $v = S/\bar{x}$. Etant sans unité, ce coefficient permet de comparer la dispersion de deux séries statistiques même

si les valeurs sont de types différents (exemple : mesures des tailles et des poids de n objets ; la variable ayant la plus grande dispersion est celle dont le coefficient de dispersion v est le plus grand).

b- Autres valeurs de dispersion

On peut utiliser des valeurs de dispersion autres que la variance :

L'écart arithmétique moyen $e_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$: c'est la moyenne des écarts absolus.

L'écart médian e_a (ou "écart probable") : c'est la médiane des écarts absolus.

Les quartiles Q_1 , Q_2 et Q_3 : ce sont trois valeurs telles que

25 % des valeurs observées sont inférieures à Q_1 ,

25 % des valeurs observées sont comprises entre Q_1 et Q_2 ,

25 % des valeurs observées sont comprises entre Q_2 et Q_3 ,

25 % des valeurs observées sont supérieures à Q_3 .

On voit que Q_2 est la médiane m_e .

Intérêt : 50 % des valeurs sont comprises entre Q_1 et Q_3 .

De la même façon on définit les 9 déciles : D_1, D_2, \dots, D_9 , et les 99 centiles C_1, C_2, \dots, C_{99} ("percentiles" en anglais). Ces valeurs sont utilisées lorsqu'on s'intéresse plus à la répartition des différentes valeurs qu'aux valeurs elles-mêmes (exemple en échographie prénatale : le fœtus est-il parmi les plus petits en taille ? S'il est parmi les 5 % les plus petits on dit qu'il est dans le 5^{ème} percentile).

Remarque : \bar{x} et s sont calculés sur les n valeurs d'un échantillon donné. L'échantillon sera représentatif de la population de laquelle il provient si ces valeurs sont proches de la moyenne μ et de l'écart-type σ de la population.

Chapitre 2

Probabilités

La statistique descriptive analyse un échantillon donné pris dans une certaine population, sans tirer de conclusion sur cette population. Cet échantillon n'est que l'un des nombreux échantillons qu'il est possible d'obtenir à partir de la population, et son obtention est en partie due au hasard. Le rôle joué par le hasard fait que certains échantillons ont plus de chances d'être obtenus que d'autres : lorsqu'on peut mathématiser ce rôle du hasard, on arrive à calculer les probabilités d'obtenir les différents échantillons possibles. A partir de là, il devient possible de remonter des propriétés d'un échantillon donné à celles de la population : c'est le but de la statistique interprétative (cf chapitre suivant).

2.1 Notion de probabilités

2.1.1 probabilité subjective

Considérons une pièce de monnaie jetée en l'air. Pourquoi peut-on affirmer qu'elle a une chance sur deux de retomber du côté "pile" et une chance sur deux de tomber du côté "face" ? Parce qu'il y a deux possibilités, et qu'a priori l'une n'a pas plus de chances de se produire que l'autre : les deux possibilités sont a priori équiprobables.

De même, en lançant un dé à 6 faces, on considère qu'il y a une chance sur six d'obtenir l'une quelconque des 6 faces du dé car les 6 possibilités sont a priori équiprobables.

En d'autres termes on dit que la probabilité d'obtenir "pile" est égale à $p = 1/2 = 0,5 = 50\%$, ou que celle d'obtenir l'as est égale à $p = 1/6 = 0,17 = 17\%$. p est la probabilité subjective.

2.1.2 probabilité objective (= intrinsèque = vraie)

- **Expérience :**

Lançons un dé n fois de suite et notons après chaque lancer la fréquence de sortie de l'as.

Après le 1^{er} lancer $\rightarrow f_1$ ($f_1 =$ soit 0, soit 1)

Après le 2^{eme} lancer $\rightarrow f_2$ ($f_2 =$ soit 0, soit 1/2, soit 1)

Après le 3^{eme} lancer $\rightarrow f_3$ ($f_3 =$ soit 0, soit 1/3, soit 2/3, soit 1)

...

Après le n ^{eme} lancer $\rightarrow f_n$ ($f_n =$ soit 0, soit $1/n$, soit $2/n$, ..., soit 1 ; $f_n = \frac{\text{nombre de fois où l'as est sorti}}{n}$)

On obtient une succession aléatoire de valeurs de fréquences et il se trouve que la différence entre deux valeurs successives tend à devenir de plus en plus petite.

Ainsi, plus n est grand, plus f devient proche d'une certaine valeur inconnue, qui est la probabilité d'obtenir l'as.

Si f tend vers 0,17 le dé est régulier; sinon le dé est pipé et les 6 possibilités ne sont pas équiprobables.

• **Interprétation en termes d'échantillon et de population :**

L'expérience revient à sortir au hasard n numéros (qui peuvent être des 1, des 2, ... ou des 6) d'une urne dans laquelle

- la proportion de 1 est égale à p ,
- Le nombre total N de numéros est tellement grand que la proportion de 1 dans l'urne ne change pratiquement pas si l'on prélève n numéros ($N \gg n$).

⇒ les n numéros sont un échantillon issu de la population constituée par les N numéros que contient l'urne.

$f_n(1)$ est la fréquence relative de 1 observée dans l'échantillon,

$p(1)$ est la fréquence relative de 1 dans la population.

$p(1)$ est inconnue mais plus l'échantillon est grand, plus $f_n(1)$ est proche de $p(1)$.

La **probabilité objective** est la fréquence relative du résultat considéré dans la population des résultats possibles. Elle est obtenue expérimentalement en réalisant la mesure (par exemple en lançant un dé) un très grand nombre de fois.

2.2 Calculs de probabilité

Il existe des lois permettant de déduire la loi de probabilité d'un événement donné. Nous en détaillons quelques-unes ici.

2.2.1 Distribution binomiale

• **Problème :** Connaissant la probabilité p d'avoir un garçon à la naissance (a priori on pourrait penser $p = 0,50$; en réalité on a $p = 0,53$) quelles sont les probabilités, si on veut 5 enfants, d'avoir :

5 filles,

1 garçon et 4 filles,

2 garçons et 3 filles,

...

5 garçons ?

• **Calcul ab initio :**

p = probabilité d'avoir un garçon à la naissance → $1 - p$ = probabilité d'avoir une fille.

Probabilité d'avoir 5 filles :

$$P(FFFFF) = (1 - p)(1 - p)(1 - p)(1 - p)(1 - p) = (1 - p)^5$$

Probabilité d'avoir 4 filles et 1 garçon :

$$\begin{aligned}
 P(4F \text{ et } 1G) &= [P(GFFFF) \text{ ou } P(FGFFF) \text{ ou } P(FFGFF) \text{ ou } P(FFFGF) \text{ ou } P(FFFFG)] \\
 &= p(1-p)(1-p)(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p)(1-p)(1-p) \\
 &\quad + (1-p)(1-p)p(1-p)(1-p) + (1-p)(1-p)(1-p)p(1-p) \\
 &\quad + (1-p)(1-p)(1-p)(1-p)p \\
 &= 5p(1-p)^4.
 \end{aligned}$$

Probabilité d'avoir 3 filles et 2 garçons :

$$\begin{aligned}
 P(3F \text{ et } 2G) &= [P(GGFFF) \text{ ou } P(GFGFF) \text{ ou } P(GFFGF) \text{ ou } P(GFFFG) \text{ ou } P(FGGFF) \\
 &\quad \text{ou } P(FGFGF) \text{ ou } P(FGFFG) \text{ ou } P(FFGGF) \text{ ou } P(FFGFG) \text{ ou } P(FFFGG)] \\
 &= pp(1-p)(1-p)(1-p) + p(1-p)p(1-p)(1-p) + p(1-p)(1-p)p(1-p) \\
 &\quad + p(1-p)(1-p)(1-p)p + (1-p)pp(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p)p(1-p) \\
 &\quad + (1-p)p(1-p)(1-p)p + (1-p)(1-p)pp(1-p) + (1-p)(1-p)p(1-p)p \\
 &\quad + (1-p)(1-p)(1-p)pp \\
 &= 10p^2(1-p)^3.
 \end{aligned}$$

Probabilité d'avoir 2 filles et 3 garçons : $P(2F \text{ et } 3G) = \dots = 10p^3(1-p)^2$.

Probabilité d'avoir 1 filles et 4 garçons : $P(1F \text{ et } 4G) = \dots = 5p^4(1-p)$.

Probabilité d'avoir 5 garçons : $P(5G) = p^5$.

• **Expression générale :**

Pour ce type de problème, on considère une expérience aléatoire à deux issues possibles : quelle est la probabilité qu'en renouvelant n fois une expérience, un événement ayant à chaque fois la probabilité p de se produire de produire k fois ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) ?

La réponse est donnée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.1)$$

où

- * X est la variable aléatoire "nombre de réalisations de l'événement",
- * $(1-p)$ est la probabilité que l'événement ne se réalise pas à l'issue de l'expérience,
- * $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de façons différentes d'obtenir les k réalisations en faisant n expériences.
- * $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1 =$ "n factoriel" (avec $0! = 1$ et $1! = 1$).

La valeur moyenne de la distribution est :

$$\mu = \sum_{k=1}^n kP(k) = np.$$

L'écart-type de la distribution est :

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

• **Application :**

Pour ce problème où $n = 5$ et $p = 0,53$ on a

$$P(X = 0) = \frac{5!}{0!5!}(0,53)^0(0,47)^5 = (0,47)^5 \simeq 0,02 = 2\%$$

$$P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!}(0,53)^1(0,47)^4 = 5 \times (0,53) \times (0,47)^4 \simeq 0,13 = 13\%$$

$$P(X = 2) = \frac{5!}{2!3!}(0,53)^2(0,47)^3 = 10 \times (0,53)^2 \times (0,47)^3 \simeq 0,29 = 29\%$$

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3!2!}(0,53)^3(0,47)^2 = 10 \times (0,53)^3 \times (0,47)^2 \simeq 0,33 = 33\%$$

$$P(X = 4) = \frac{5!}{4!1!}(0,53)^4(0,47)^1 = 5 \times (0,53)^4 \times (0,47) \simeq 0,19 = 19\%$$

$$P(X = 5) = \frac{5!}{5!0!}(0,53)^5(0,47)^0 = (0,53)^5 \simeq 0,04 = 4\%$$

ce qui donne le tableau de probabilité

k	0	1	2	3	4	5
P(k)	0,02	0,13	0,29	0,33	0,19	0,04

à partir duquel on peut calculer la moyenne μ dans la population :
 $\mu \simeq 0 \times 0,02 + 1 \times 0,13 + 2 \times 0,29 + 3 \times 0,33 + 4 \times 0,19 + 5 \times 0,04 = 2,66$.

Note : en réalité on a $\mu = np = 2,65$, et $\sigma = \sqrt{p(1-p)} = 0,50$.

A partir de ces probabilités on peut calculer par exemple

– la probabilité d'avoir entre 1 et 3 garçons dans une famille de 5 enfants :

$$P(1G \text{ ou } 2G \text{ ou } 3G) = P(1G) + P(2G) + P(3G) = 0,13 + 0,29 + 0,33 = 0,75 = 75 \% \text{ de chances.}$$

– la probabilité d'avoir plus de 3 garçons :

$$P(3G \text{ ou } 4G \text{ ou } 5G) = P(3G) + P(4G) + P(5G) = 0,33 + 0,19 + 0,04 = 0,56 = 56 \% \text{ de chances.}$$

2.2.2 Distribution hypergéométrique

Problème : un jeu consiste à cocher 6 numéros parmi 49 avant qu'un tirage au hasard ne désigne 6 numéros gagnants et donc 43 numéros perdants. Quelle est la probabilité de cocher

3 numéros gagnants (et donc 3 perdants) ?

4 numéros gagnants (et donc 2 perdants) ?

5 numéros gagnants (et donc 1 perdant) ?

6 numéros gagnants (et donc 0 perdant) ?

La réponse est donnée par la loi hypergéométrique :

$$P(X = k) = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6} \quad (2.2)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{20 \times 12341}{13\,983\,816} \simeq 0,02 = 2\% (2 \text{ chances sur } 100) \\ P(X = 4) &= \frac{15 \times 903}{13\,983\,816} \simeq 0,001 = 0,1\% (1 \text{ chance sur } 1000) \\ P(X = 5) &= \frac{6 \times 43}{13\,983\,816} \simeq 210^{-5} = 0,002\% (2 \text{ chances sur } 100\,000) \\ P(X = 6) &= \frac{1 \times 1}{13\,983\,816} \simeq 1 \text{ chance sur } 14 \text{ millions} \end{aligned}$$

2.2.3 Distribution normale (ou de Laplace-Gauss)

Pour dater un objet contenant du carbone 14 (un isotope radioactif qui se désintègre peu à peu) une méthode consiste à compter les désintégrations pendant 1 minute. Le nombre de désintégrations est une variable aléatoire x pouvant prendre toutes sortes de valeurs plus ou moins probables, dont la moyenne est μ et l'écart-type σ . Une formule donne l'âge de l'objet en fonction de μ .

Dans la pratique on effectue n mesures et on prend la moyenne des n valeurs obtenues. Cette moyenne est une variable aléatoire \bar{x} pouvant prendre toutes sortes de valeurs plus ou moins probables. Si n est suffisamment grand ($n > 30$) il se trouve que :

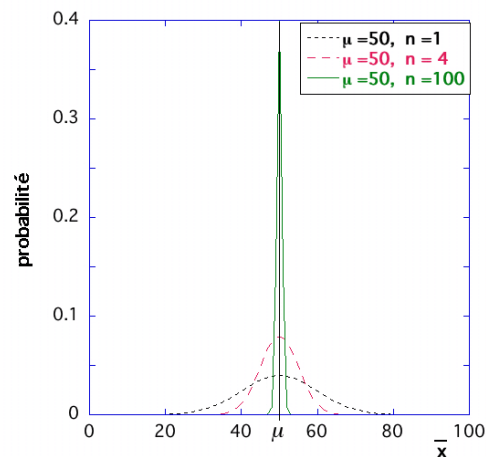
- la distribution des probabilités des valeurs de \bar{x} suit pratiquement une loi normale,
- la moyenne de cette distribution normale est égale à μ et son écart-type est égal à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Nous admettrons que cette distribution normale $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ représentée ci-contre possède les propriétés suivantes.

Il y a une probabilité α d'obtenir expérimentalement une valeur autour de la moyenne plus grande que $\mu + u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ telle que :

α	u
5 %	1,65
2,5 %	1,96
1 %	2,33
0,5 %	2,58

Symétriquement, il y a une probabilité α d'obtenir une valeur \bar{x} plus petite que $\mu - u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



Il y a donc une probabilité 2α d'obtenir une valeur de la moyenne en dehors de l'intervalle $\left[\mu - u \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + u \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Autrement dit :

il y a 2,5 % de chances pour que $\bar{x} > \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, et

il y a 2,5 % de chances pour que $\bar{x} < \mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

→ il y a 5 % de chances pour que \bar{x} se trouve en dehors de l'intervalle $\left[\mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

On remarque donc qu'il y a 95 % de chances pour que \bar{x} soit dans l'intervalle $\mu \pm 1,96 \frac{\sigma}{10}$ lorsqu'on fait 100 mesures ($n = 100$), dans l'intervalle $\mu \pm 1,96\sigma$ lorsqu'on fait 1 mesure ($n = 1$).

→ le premier intervalle est 10 fois plus étroit que le second.

→ en faisant 100 mesures, le résultat est plus proche de μ qu'en faisant une seule mesure.

Ainsi, plus l'échantillon est grand, plus la moyenne trouvée \bar{x} est proche de la valeur μ cherchée.

Chapitre 3

Statistique interprétative

Nous avons vu comment, si on connaît la moyenne μ et l'écart-type σ d'une population, le calcul des probabilités permet d'en déduire les chances d'obtenir certaines valeurs de la moyenne \bar{x} d'un échantillon de taille n extrait de cette population.

Dans la pratique c'est l'inverse : on connaît la moyenne \bar{x} et l'écart-type s d'un échantillon de taille n et on cherche à en déduire, à partir de ces données, des valeurs probables pour μ et σ c'est-à-dire des estimations de μ et σ .

On peut alors se prononcer sans grand risque de se tromper sur la plausibilité de diverses hypothèses relatives à la population (tests d'hypothèses).

3.1 Estimations

3.1.1 Estimations ponctuelles

a. Estimation de μ :

En l'absence de données autres que celles de l'échantillon, la valeur la plus vraisemblable que l'on peut attribuer à μ est :

$$\hat{\mu} = \bar{x} \tag{3.1}$$

où $\hat{\mu}$ est l'estimation ponctuelle de μ , et $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x$.

Comme on le sait, cette valeur \bar{x} est d'autant plus proche de μ que n est grand (statistiquement, les valeurs de x "trop grandes" se compensent mieux avec les valeurs de x "trop petites"). Mais une estimation ponctuelle ne nous renseigne pas sur son degré de précision.

b. Estimation de σ :

Contrairement à la moyenne, l'écart-type s sur l'échantillon n'est pas une bonne estimation de σ . L'estimation de σ sort du programme de ce cours; nous supposerons ici que σ est connu.

3.1.2 Estimations par intervalle de confiance (I. C.) d'une moyenne

Pour faire apparaître la précision de l'estimation, on la présente sous la forme d'une "fourchette" de valeurs de μ quasiment certaines (à 95 %, voire à 99 %).

On a vu que pour des échantillons suffisamment grands ($n > 30$) il y a pratiquement :

95 % de chances pour que $\mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

99 % de chances pour que $\mu - 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \rightarrow \mu \leq \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \leq \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu$$

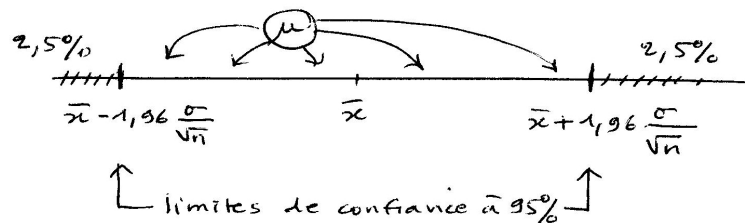
d'où :

$$\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pour 95 % des échantillons possibles.

L'intervalle $\bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est l'intervalle de confiance de la moyenne μ , au niveau de confiance 95 % (ou au risque 5 %, 5 % étant le risque que μ ne se trouve pas à l'intérieur de l'I. C.).

Schématiquement :



95 % des échantillons possibles sont tels que l'I. C. contient μ ,

5 % des échantillons possibles sont tels que l'I. C. ne contient pas μ .

On peut faire le même raisonnement avec l'I. C. à 99 % (1 % de risque).

3.2 Tests d'hypothèses

Etant donné un échantillon pris dans une certaine population et une hypothèse portant sur cette population, l'objet d'un test statistique est de déterminer sur la base de cet échantillon si cette hypothèse est plausible ou non. Un test statistique peut donc nous conduire à décider d'accepter ou de rejeter des hypothèses. Comme pour les tests médicaux, il y a toujours un risque que le résultat du test ne corresponde pas à la réalité.

Il existe différentes sortes de tests, en fonction du type d'hypothèse.

Tests de conformité : lorsque l'hypothèse est du type : la moyenne μ de la population est égale à une valeur spécifiée μ_0 (hypothèse simple), ou bien : la moyenne μ de la population est comprise entre deux valeurs spécifiées μ_1 et μ_2 (hypothèse multiple).

Tests d'ajustement : lorsque l'hypothèse porte sur la loi de probabilité que suit la population (par exemple une loi normale).

Tests d'homogénéité : lorsque l'hypothèse porte sur une comparaison entre deux populations distinctes (par exemple : les moyennes, ou les variances de deux populations distinctes sont égales entre elles).

Dans ce qui suit nous nous limitons à des tests de conformité d'une moyenne.

3.2.1 Hypothèse : la moyenne μ est égale à μ_0

Cette hypothèse de référence est notée H_0 .

Principe du test : Nous cherchons à déterminer si nous pouvons rejeter cette hypothèse avec un risque d'erreur négligeable (l'erreur étant de déclarer fausse une hypothèse qui serait vraie).

Définition : On appelle "risque" la probabilité α de rejeter l'hypothèse H_0 lorsqu'elle est vraie.

Traditionnellement, on considère que ce risque est négligeable si $\alpha = 0,05 = 5\% = 1$ chance sur 20. On peut cependant choisir à sa guise la valeur de α (par exemple prendre $\alpha = 0,01 = 1\% = 1$ chance sur 100, ou même moins suivant le risque d'erreur qu'on juge acceptable, si rejeter H_0 à tort a des conséquences financières ou sur la santé par exemple).

Méthode : Nous utilisons les intervalles de confiance, déjà vus dans le cas où μ est la moyenne d'une loi d'écart-type connu σ .

On sait alors que pour un échantillon de taille $n > 30$, il y a 95 % de chances pour que μ soit dans l'intervalle $\bar{x} \pm 1,96 \sigma/\sqrt{n}$ et 5 % de chances pour que μ se trouve à l'extérieur de cet intervalle. Par conséquent :

- si l'I. C. à 95 % contient μ_0 , l'hypothèse H_0 sera déclarée plausible,

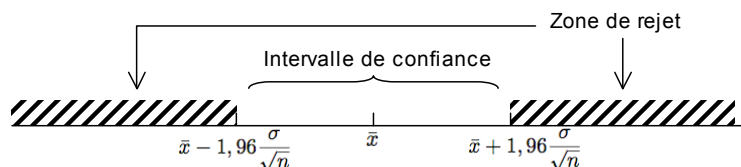
- si l'I. C. à 95 % ne contient pas μ_0 , on rejettera H_0 .

Dans ce dernier cas il y a 5 % de risque de rejeter une hypothèse vraie.

On peut réduire le risque à 1 % en prenant l'I. C. à 99 % : $\bar{x} \pm 2,58 \sigma/\sqrt{n}$.

Remarque : dans ce qui précède, les deux possibilités sont : soit $\mu = \mu_0$ (hypothèse H_0), soit $\mu \neq \mu_0$ (hypothèse alternative H_1). Dans d'autres cas, l'hypothèse alternative peut être $\mu > \mu_0$ (ou $\mu < \mu_0$) : alors le risque de rejeter à tort H_0 est de 2,5 % si on utilise l'I. C. à 95 % et de 0,5 % si on utilise l'I. C. à 99 %. Le test est dit alors "unilatéral", alors qu'il était bilatéral lorsque l'hypothèse alternative H_1 était : $\mu \neq \mu_0$.

En résumé :



- Si μ_0 tombe dans la zone de rejet, on rejette H_0 avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$,
- si μ_0 est dans l'intervalle de confiance, H_0 est déclarée plausible.

3.2.2 Hypothèse : la moyenne μ est comprise entre μ_1 et μ_2

Par exemple : un objet est réputé avoir été fabriqué entre la date d_1 et la date d_2 : son âge au moment où on effectue la datation au carbone 14 est donc censé être compris entre t_1 et t_2 , ce qui donne une hypothèse sur le nombre moyen de dpm/g, qui devrait être compris entre μ_1 et μ_2 . Par ailleurs, les mesures ont donné un nombre moyen \bar{x} de dpm/g, avec une certaine valeur de σ/\sqrt{n} . Ces mesures permettent de tester l'hypothèse sur la date de fabrication de l'objet.

Règle : nous adopterons le critère suivant, utilisant l'I. C. :

- si tous les points de l'intervalle hypothétique $[\mu_1, \mu_2]$ tombent dans la zone de rejet, on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur α ,
- sinon, on déclare H_0 plausible.

Chapitre 4

Datation par le carbone 14

La méthode de datation par le carbone 14 a été mise au point dans les années 1950 par Willard Frank Libby et lui a valu le prix Nobel en 1960. Elle permet de dater jusqu'à 35000 ans (paléolithique supérieur : homo sapiens sapiens) les matériaux d'origine organique qui contiennent du carbone 14. Elle est couramment employée (labos à Gif sur Yvette, Lyon, Zurich, Oxford, Tucson, San Diego, Philadelphie, etc.).

4.1 Principe de la datation

4.1.1 Notions de radioactivité

Les atomes sont formés d'un noyau et d'électrons qui gravitent autour du noyau. Le noyau contient des nucléons, qui sont soit des neutrons, soit des protons. Les électrons portent une charge électrique négative, les protons sont chargés positivement et les neutrons ne portent pas de charge électrique.

Le nombre d'électron caractérise le degré d'ionisation de l'atome (s'il y a autant d'électrons que de protons l'atome est électriquement neutre ; s'il y a plus d'électrons que de protons il s'agit d'un ion chargé négativement ; s'il y a moins d'électrons que de protons c'est un ion chargé positivement).

Le nombre de protons dans le noyau est caractéristique de l'élément (par exemple : le noyau du carbone contient 6 protons, le noyau de l'azote contient 7 protons).

Un élément atomique est noté ${}^A_Z X$, où :

Z est le nombre de protons dans le noyau, appelé numéro atomique,

A est le nombre de nucléons (protons + neutrons) dans le noyau.

Il y a donc $A - Z$ neutrons dans le noyau de l'élément X .

Un même élément peut avoir plusieurs isotopes, c'est-à-dire qu'il peut exister plusieurs valeurs de A différentes pour une même valeur de Z . Le nombre de protons est en général égal au nombre de neutrons, mais il peut être différent. Plus la différence entre le nombre de protons et le nombre de neutrons dans le noyau est grande, plus le noyau est instable.

Un noyau instable peut se désintégrer (par réaction nucléaire, i. e. réaction qui se produit à l'intérieur du noyau). Cette désintégration s'accompagne d'émission d'énergie.

La radioactivité est la transformation spontanée d'un isotope instable d'un élément chimique en un isotope d'un autre élément, accompagnée de l'émission de certaines particules : noyau d'Hélium (radioactivité α), électrons ou positrons¹ (radioactivité β^- ou β^+) ou photons γ (radioactivité γ).

On appelle activité μ d'un corps radioactif le nombre théorique de désintégrations par unité de temps. L'unité S. I. est le Becquerel : 1 Bq = 1 désintégration par seconde. Avant 1982 on utilisait le Curie : 1 Ci = $3,7 \cdot 10^{10}$ désintégrations par seconde (= activité d'1 gramme de radium). Pour le ^{14}C on utilise le dpm = 1 désintégration par minute².

On a :

$$\mu = \lambda N \quad (4.1)$$

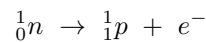
où N est le nombre d'atomes de l'élément radioactif et λ est une constante caractéristique de l'élément radioactif, appelée constante de désintégration.

4.1.2 Isotopes du carbone ; ^{14}C radioactif

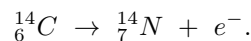
Il existe 3 isotopes du carbone :

- le carbone 12 ($^{12}_6\text{C}$) : représente environ 98,9 % du carbone naturel,
- le carbone 13 ($^{13}_6\text{C}$) : $\simeq 1,1 \%$ = $1,1 \cdot 10^{-2}$ du carbone naturel,
- le carbone 14 ($^{14}_6\text{C}$) : proportion $\sim 10^{-12}$ du carbone naturel.

Le noyau du carbone 14 est instable (il renferme trop de neutrons par rapport au nombre de protons) et finit par se désintégrer spontanément au bout d'un certain temps en émettant un électron (radioactivité β^-) et en se transformant en un noyau d'azote : un neutron du carbone 14, en disparaissant, a donné naissance à un proton (dans le noyau) et un électron (éjecté).



ou encore :



Tout corps contenant du carbone 14 est donc radioactif et émet des électrons qui peuvent être comptés. Avec le temps, le nombre N d'atomes de ^{14}C diminue. Selon l'équation (4.1), l'activité, qui est en théorie proportionnelle à N , diminue également.

La constante de désintégration du carbone 14 est $\lambda = 2,30 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}$.

4.1.3 Activité et âge

a- Loi de Rutherford Soddy (1902) :

Loi de Rutherford Soddy : " N diminue exponentiellement en fonction du temps".

1. Un positron est l'antiparticule de l'électron. Créé dans certaines conditions (comme dans le cas de la désintégration d'un noyau par radioactivité β^+), il est stable dans le vide. Cependant dans la matière il interagit avec les électrons : la paire électron-positron s'annihile en émettant un photon γ .

2. Il existe aussi des grandeurs subjectives pour mesurer la radioactivité. Par exemple le Sievert (Sv) est défini en pondérant l'activité des rayonnements par un coefficient qui tient compte de leur nocivité respective ; le Sievert est utilisé pour définir les doses d'expositions maximales autorisées par exemple près d'une centrale nucléaire.

Autrement dit : si N_0 est le nombre d'atomes de ^{14}C à un moment donné et N le nombre d'atomes de ^{14}C après qu'il se soit écoulé un temps t on a :

$$N = N_0 \times e^{-\lambda t}, \quad (4.2)$$

où $e^x = \exp(x)$ est la fonction exponentielle de x . On peut écrire l'équation (4.2) sous une autre forme en posant $\lambda = \ln(2) / T$:

$$\begin{aligned} N &= N_0 \times e^{-\frac{\ln(2)}{T}t} \\ &= N_0 \times \left(e^{-\ln(2)}\right)^{\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

d'où :

$$N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}. \quad (4.3)$$

T est une constante caractéristique de l'élément radioactif, appelée période ou encore demi-vie : c'est le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés (en effet si $t = T$ alors $N = N_0/2$: le nombre d'atomes restant est égal au nombre d'atomes initialement présents divisé par 2).

b- Âge t :

D'après (4.3) on a :

$$\begin{aligned} (2)^{\frac{t}{T}} &= \frac{N_0}{N} \\ \log \left[(2)^{\frac{t}{T}} \right] &= \log \left(\frac{N_0}{N} \right) \\ \frac{t}{T} \times \log 2 &= \log \left(\frac{N_0}{N} \right) \\ t &= \frac{T}{\log 2} \times \log \left(\frac{N_0}{N} \right). \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{N_0}{N} = \frac{\lambda N_0}{\lambda N} = \frac{\mu_0}{\mu}$$

où μ_0 est l'activité à un moment donné (initial) et μ est l'activité après un laps de temps t . Donc :

$$t = \frac{T}{\log 2} \times \log \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right).$$

La période du carbone 14 est $T = 5730$ ans (± 40 ans)³. D'autre part on prend $\mu_0 = 13,6$ dpm.g⁻¹. On a donc :

3. Dans les publications on trouve la valeur 5568 ans, qui était utilisée par Libby : "valeur conventionnelle de T ".

$$t = \frac{5730}{\log 2} \times \log \left(\frac{13,6}{\mu} \right) \quad (4.4)$$

où t est donné en années et μ en dpm.g^{-1} .

Estimer t par datation par le carbone 14 consiste donc à estimer μ , l'activité présente de l'objet (en dpm.g^{-1}), à partir des résultats donnés par des comptages.

Remarque : la décroissance de l'activité du ^{14}C fournit une horloge indéréglable car aucune transformation chimique ou changement d'état n'a d'influence sur la désintégration du noyau.

4.2 Aspect statistique

4.2.1 Désintégration : phénomène probabiliste

Le moment où un atome de ^{14}C se désintégrera est impossible à prévoir. On peut seulement chiffrer la probabilité p que cet atome se désintègre sur un intervalle de temps donné. Sur un intervalle d'une minute on trouve $p = 2,30 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}$.

Pour N atomes (par gramme) on devrait donc avoir en théorie une moyenne de μ désintégrations par minute (et par gramme), avec

$$\mu = pN \quad (4.5)$$

car μ est la moyenne de la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$

4.2.2 Echantillon et estimation ponctuelle de μ

En effectuant des comptages pendant n secondes on observe une moyenne expérimentale \bar{x} , les comptages constituant un échantillon de n mesures d'une seconde.

On a vu au chapitre précédent qu'on peut prendre \bar{x} comme estimation ponctuelle de μ . D'où on tire une estimation ponctuelle de t par la relation (4.4).

4.2.3 Précision de la datation

En calculant un I. C. sur μ on peut obtenir un intervalle contenant probablement μ (habituellement : avec 95 % de chances ; éventuellement : avec 99 % de chances, ou même plus), d'où on déduit par la relation (4.4) une fourchette d'âges contenant probablement t .

4.2.4 Tests d'hypothèses sur l'âge

En raisonnant sur les I. C. (voir chapitre précédent) on peut tester des hypothèses portant sur l'âge de l'objet.

4.3 Hypothèse de Libby

4.3.1 Hypothèse

Libby suppose que l'activité du carbone 14 est maximale dans les organismes vivants (végétaux et animaux) et ce quelle que soit l'époque, et il estime sa valeur à $13,6 \text{ dpm.g}^{-1}$.

A la mort de l'organisme, l'activité du ^{14}C que celui-ci abrite se met à décroître exponentiellement en suivant la loi de Rutherford - Sobby :

$$\mu = \mu_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

au temps t , avec $T = 5730$ ans et $\mu_0 = 13,6$ dpm.g $^{-1}$, d'où le temps t écoulé depuis la mort de l'organisme (quelle que soit la date de la mort)

$$t = \frac{5730}{\log 2} \times \log \left(\frac{13,6}{\mu}\right).$$

Ceci permet de dater des tissus, charbons ou statues de bois, os etc.

4.3.2 Discussion

Les organismes vivants incorporent du carbone à partir du CO_2 de l'air : les plantes par la photosynthèse, les animaux en mangeant des plantes ou en mangeant des herbivores (ou des carnivores). Ainsi la teneur en carbone 14 dans les organismes vivants est la même que dans le CO_2 de l'air.

Libby supposait que la teneur en ^{14}C dans l'atmosphère ait toujours été la même. En réalité il y a eu des fluctuations, mais grâce à la dendrochronologie (on date les cernes annuels des troncs d'arbre) on peut rectifier les âges ^{14}C année par année, jusqu'à environ 7000 ans B. P. (Before Present : par rapport à l'année 1950). Cependant nous ne tenons pas compte de ces corrections dans le cadre des exercices liés à ce cours.