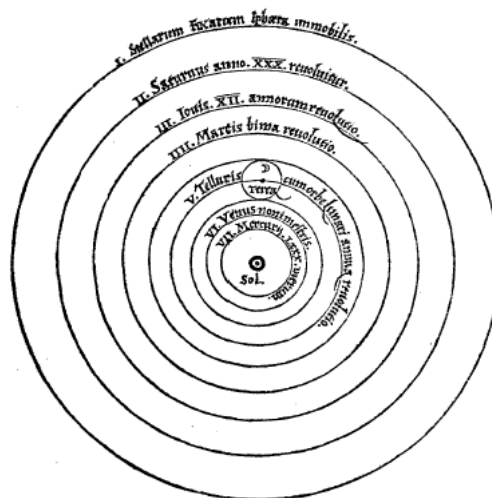


UNIVERSITÉ PIERRE & MARIE CURIE - PARIS VI

LICENCE 3 DE PHYSIQUE FONDAMENTALE

# HISTOIRE DE LA MÉCANIQUE

Corrigés des Exercices de la première partie  
du mémoire de travaux dirigés

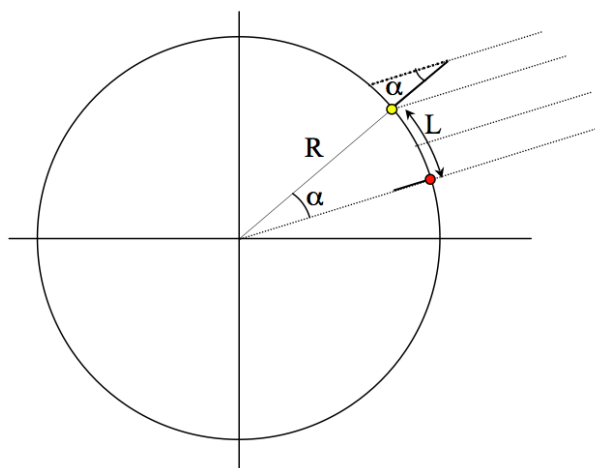




# Chapitre 1

## Eratosthène : Mesure du rayon de la Terre

1. Comme aucune ombre n'est observée dans un puits à Syène (point rouge sur le schéma), c'est que l'axe du puits est parallèle aux rayons lumineux venant du Soleil. Or l'axe du puits est dirigé selon la verticale, donc une droite parallèle aux rayons du Soleil et passant par Syène passe aussi par le centre de la Terre.



À Alexandrie (point jaune sur le schéma), la mesure de la longueur de l'ombre d'un obélisque permet de mesurer l'angle  $\alpha$  entre la verticale du lieu et les rayons du Soleil.

Comme les rayons du Soleil sont supposés parallèles entre eux, alors  $\alpha$  est aussi l'angle entre la verticale de Syène et la verticale d'Alexandrie.

$L$  étant la distance entre Syène et Alexandrie et  $R$  le rayon de la Terre, on a donc :

$$C = \frac{360}{\alpha(\text{en degrés})} \times L \quad (1.1)$$

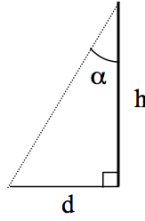
Application numérique :

$$C = \frac{360}{7.2} \times 5000 = 250\,000 \text{ stades.}$$

Rayon de la Terre :

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{250\,000}{2\pi} = 39\,800 \text{ stades.} \quad (1.2)$$

2. (a) Soit  $h$  la hauteur de l'obélisque et  $d$  la longueur de son ombre projetée sur le sol : on a  $\tan \alpha = d/h$ .



La hauteur des obélisques connus varie de 10 à 30 m, donc prenons  $h \sim 20$  m. Une incertitude de mesure réaliste de  $\delta h = 1$  cm donne  $\delta h/h = 0,05$  %.

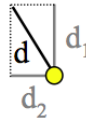
Si le résultat de la mesure a donné  $\alpha = 7,2$  degrés c'est que  $l = h \tan \alpha \sim 2,5$  m. Une erreur de mesure de  $\delta d = 2$  mm donne  $\delta d/d = 0,08$  %.

$\tan \alpha = l/h \sim \alpha$  d'où :

$$\frac{\delta \alpha_a}{\alpha} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta d}{d} = 0,13\%. \quad (1.3)$$

- (b) La différence de longitude entre Syène et Alexandrie incline vers l'Ouest l'ombre de l'obélisque. Soit  $d_1$  la longueur de l'ombre causée par la différence de latitude de  $\alpha = 7,2^\circ$ , et  $d_2$  la longueur de l'ombre causée par la différence de longitude  $\beta = 3,02^\circ$ . La longueur totale de l'ombre est

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{h^2 \tan^2 \alpha + h^2 \tan^2 \beta} = d_1 \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta}}.$$

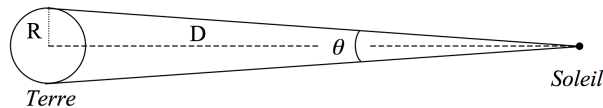


Donc

$$\frac{\delta \alpha_b}{\alpha} = \frac{\delta d}{d} \simeq \frac{\delta d}{d_1} = \frac{d - d_1}{d_1} = \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\tan^2 3,02}{\tan^2 7,0}} - 1 = 0,084 = 8,4\%. \quad (1.4)$$

- (c) La parallaxe est  $\theta \simeq 2 \tan(\theta/2) = 2R/D$ , ce qui conduit à une incertitude supplémentaire :

$$\frac{\delta \alpha_c}{\alpha} = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{2R}{D\alpha} = \frac{2 \times 6400 \times 180}{1,5 \cdot 10^8 \times 7,2 \times \pi \alpha} = 0,07\%. \quad (1.5)$$



- (d) On a  $\frac{\delta L}{L} = 1$  %. D'après les équations (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) :

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \alpha_a}{\alpha} + \frac{\delta \alpha_b}{\alpha} + \frac{\delta \alpha_c}{\alpha} + \frac{\delta L}{L} = 9,6 \simeq 10\% \quad (1.6)$$

Donc la mesure d'Eratosthène donne :

$$C = (250\,000 \pm 25\,000) \text{ stades, et} \quad (1.7)$$

$$R = (39\,800 \pm 3\,980) \text{ stades.} \quad (1.8)$$

3. (a)  $C = (47\,600 \pm 4\,700)$  km et  $R = (7\,580 \pm 760)$  km.  
(b)  $C = (40\,000 \pm 4\,000)$  km et  $R = (6\,320 \pm 630)$  km.  
(c)  $C = (52\,900 \pm 5\,300)$  km et  $R = (8\,420 \pm 840)$  km.  
(d)  $C = (46\,300 \pm 4\,600)$  km et  $R = (7\,370 \pm 740)$  km.  
(e)  $C = (44\,500 \pm 4\,500)$  km et  $R = (7\,080 \pm 710)$  km.  
(f)  $C = (49\,600 \pm 5\,000)$  km et  $R = (7\,900 \pm 790)$  km.  
(g)  $C = (41\,300 \pm 4\,100)$  km et  $R = (6\,580 \pm 660)$  km.

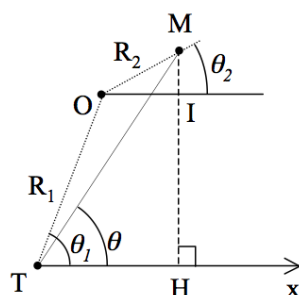
Conclusion : les valeurs actuelles de  $C$  et de  $R$  sont compatibles avec les cas (b), (e) et (g), mais pas avec les cas (a), (c), (d) et (f), bien que l'ordre de grandeur soit correct dans tous les cas.



## Chapitre 2

# Mouvement rétrograde de Mars

### 2.1 Modèle des épicycles



1. Soit  $H$  la projection du point  $M$  sur l'axe  $Ox$  et  $I$  la projection du point  $O$  sur le segment  $MH$ . On a  $MH = TM \sin \theta$ . Or

$$\begin{aligned} MH &= MI + IH \\ &= OM \sin \theta_2 + TO \sin \theta_1 \\ &= R_2 \sin \theta_2 + R_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Donc  $TM \sin \theta = R_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin \theta_2$ .

De même :  $TM \cos \theta = R_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos \theta_2$ . D'où

$$\tan \theta = \frac{TM \sin \theta}{TM \cos \theta} = \frac{R_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos \theta_2}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{R_1 \sin \theta_1 + R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 + R_2 \cos \theta_2} \right) \quad (2.1)$$

2. Dans le temps, l'angle  $\theta(t)$  augmente. Le mouvement rétrograde de Mars correspond à une diminution de  $\theta(t)$  pendant un cours laps de temps. Pour que ce mouvement rétrograde ait lieu il faut donc que la dérivée  $\theta'(t)$  de l'angle  $\theta$  s'annule. On a d'après (2.1) :

$$\theta(t) = \arctan[f(t)] \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{R_1 \sin(\Omega_1 t) + R_2 \sin(\Omega_2 t)}{R_1 \cos(\Omega_1 t) + R_2 \cos(\Omega_2 t)}.$$

Donc :

$$\theta'(t) = \frac{f'(t)}{1 + f^2(t)}.$$

$\theta'(t) = 0$  si  $f'(t) = 0$  c'est à dire, après calculs, si

$$\cos [(\Omega_1 - \Omega_2)t] = -\frac{1 + \beta\alpha^2}{\alpha(1 + \beta)} \quad (2.2)$$

où on a posé  $\alpha = R_1/R_2$  et  $\beta = \Omega_1/\Omega_2$ . Cette dernière égalité est possible uniquement si :

$$-1 < -\frac{1 + \beta\alpha^2}{\alpha(1 + \beta)} < 1.$$

3. On a  $\alpha = 1,5$  et  $\beta = T_2/T_1 = 1/1,88$ , donc  $-\frac{1+\beta\alpha^2}{\alpha(1+\beta)} = -0,956$ . On est bien dans les conditions dans lesquelles on peut observer un mouvement rétrograde de Mars. D'après l'équation (2.2), ce mouvement rétrograde s'observe au temps

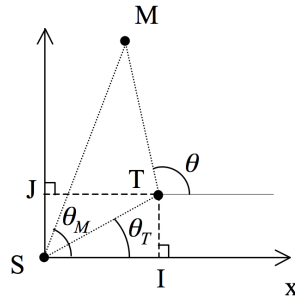
$$t = \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_2} \arccos \left[ -\frac{1 + \beta\alpha^2}{\alpha(1 + \beta)} \right]$$

avec une périodicité de

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_1 - \Omega_2}.$$

Application numérique :  $T = 2,14$  ans = 26 mois = 780 jours.

## 2.2 Modèle héliocentrique



1. Soit  $I$  la projection du point  $T$  sur l'axe  $Ox$  et  $J$  la projection de  $T$  sur l'axe perpendiculaire à  $Sx$ . On a :

$$\begin{aligned} SM \cos \theta_M &= ST \cos \theta_T + TM \cos \theta \\ SM \sin \theta_M &= ST \sin \theta_T + TM \sin \theta, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} TM \cos \theta &= R_M \cos \theta_M - R_T \cos \theta_T \\ TM \sin \theta &= R_M \sin \theta_M - R_T \sin \theta_T, \end{aligned}$$

d'où



$$\tan \theta = \frac{R_M \sin \theta_M - R_T \sin \theta_T}{R_M \cos \theta_M - R_T \cos \theta_T}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{R_M \sin \theta_M - R_T \sin \theta_T}{R_M \cos \theta_M - R_T \cos \theta_T} \right) \quad (2.3)$$

2. Le mouvement rétrograde de Mars correspond à une inversion du sens de variation de  $\theta(t)$ , c'est-à-dire à une annulation de la dérivée  $\theta'(t)$  de l'angle  $\theta$ . On a d'après (2.3) :

$$\theta(t) = \arctan[g(t)] \text{ avec } g(t) = \frac{R_M \sin(\Omega_M t) - R_T \sin(\Omega_T t)}{R_M \cos(\Omega_M t) + R_T \cos(\Omega_T t)}$$

où  $\Omega_M$  et  $\Omega_T$  sont les fréquences angulaires de Mars et de la Terre respectivement autour du Soleil. Donc :

$$\theta'(t) = \frac{g'(t)}{1 + g^2(t)}.$$

$\theta'(t) = 0$  si  $g'(t) = 0$  c'est à dire, après calculs, si

$$\cos[(\Omega_T - \Omega_M)t] = \frac{\Omega_M R_M^2 + \Omega_T R_T^2}{R_M R_T (\Omega_M + \Omega_T)}. \quad (2.4)$$

Le mouvement rétrograde de Mars s'observe donc au temps

$$t = \frac{1}{\Omega_T - \Omega_M} \arccos \left[ \frac{\Omega_M R_M^2 + \Omega_T R_T^2}{R_M R_T (\Omega_M + \Omega_T)} \right]$$

avec une périodicité de

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_T - \Omega_M} = \frac{1}{\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M}} = \frac{T_T T_M}{T_M - T_T}$$

Apptication numérique :  $T = 779$  jours.



## Chapitre 3

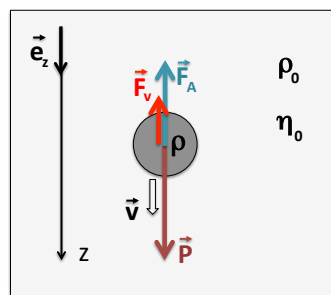
# Chute des Corps et Principe d'Inertie : Galileo Galilei

### 3.1 « La résistance du milieu »

- Galilée fait référence à la force responsable de la chute vers le bas d'un corps de masse volumique plus grande que celle du milieu environnant, ou bien à l'ascension verticale d'un corps de masse volumique plus faible que celle du milieu : il s'agit de la force de **poussée d'Archimède**, verticale et dirigée vers le haut, qui est égale et opposée au poids du fluide (liquide ou gaz) déplacé par le corps immergé.

- (a) Notations :

$\vec{P}$  : poids du corps,  
 $\vec{F}_A$  : force de poussée d'Archimède,  
 $\vec{F}_v$  : force de frottement visqueux,  
 $\vec{v}$  : vitesse du corps,  
 $\rho$  : masse volumique du corps,  
 $\rho_0$  : masse volumique du milieu,  
 $\eta_0$  : viscosité du milieu,  
 $z$  : axe vertical dirigé vers le bas, de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .



Note : on a supposé que  $\rho > \rho_0$  :  $\vec{v}$  est donc dirigée vers le bas et  $\vec{F}_v$  vers le haut.

- (b) Bilan des forces :

Poids de la boule :  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g \vec{e}_z$   
 Poussée d'Archimède :  $\vec{F}_A = -\rho_0 V \vec{g} = -\rho_0 V g \vec{e}_z$   
 Frottement visqueux :  $\vec{F}_v = -6\pi\eta_0 R \vec{v} = -6\pi\eta_0 R \dot{z} \vec{e}_z$   
 où on a supposé  $\rho > \rho_0$ .

Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_v = m\vec{a}.$$

où  $m$  est la masse de la boule et  $\vec{a}$  son accélération. Projétons cette équation sur l'axe  $z$  :

$$\begin{aligned} \rho V g - \rho_0 V g - 6\pi\eta_0 R \dot{z} &= m \ddot{z} \\ \rho V \ddot{z} + 6\pi\eta_0 R \dot{z} &= (\rho - \rho_0) V g \\ \ddot{z} + 6\pi \frac{\eta_0 R}{\rho V} \dot{z} &= \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \end{aligned}$$

d'où, en utilisant  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  :

$$\ddot{z} + \frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} \dot{z} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g$$

ou encore :

$$\dot{v}(t) + \frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} v = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \quad (3.1)$$

Calcul de  $v(t)$  :

L'équation (3.1) admet une solution de la forme :

$$v(t) = Ae^{Bt} + C$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes à déterminer. On a :

$$\dot{v} = AB e^{Bt}$$

donc d'après (3.1) :

$$AB e^{Bt} + \frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} (Ae^{Bt} + C) = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g$$

qui doit être vérifié pour tout  $t$ , donc :

$$\begin{cases} AB + \frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} A = 0 \\ \frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} C = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} B = -\frac{9}{2} \frac{\eta_0}{\rho R^2} \\ C = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g \frac{2\rho R^2}{9\eta_0} \end{cases}$$

La condition initiale s'exprime :  $v(t=0) = 0$ , d'où :

$$A + C = 0$$

$$A = -C$$

On obtient donc :

$$v(t) = v_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (3.2)$$

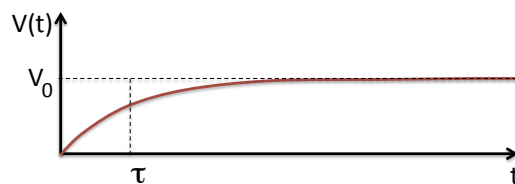
Avec :

$$\tau = \frac{2\rho R^2}{9\eta_0} \quad (3.3)$$

et

$$v_0 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g\tau \quad (3.4)$$

L'allure de  $v(t)$  est représentée ci-dessous.



– On a  $v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  :  $v_0$  est la vitesse limite de la boule.

- On a  $v(\tau)/v_0 = 1 - 1/e = 0,63$  : le temps  $\tau$  est le temps au bout duquel la boule a atteint 63 % de sa vitesse limite.

(c) Application numérique :

- i. la boule est faite de plomb et le milieu environnant est de l'eau :

$$\tau = \frac{2 \times 11.10^3 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-3}} = 244 \text{ s} = 4 \text{ minutes}$$

$$v_0 = \left(1 - \frac{1}{11}\right) 9,81 \times 244 = 2180 \text{ m.s}^{-1}.$$

- ii. la boule est faite de plomb et le milieu environnant est de l'air :

$$\tau = \frac{2 \times 11.10^3 \times 10^{-4}}{9 \times 18.10^{-6}} = 13,6.10^3 \text{ s} = 226 \text{ minutes} = 3 \text{ heures } 46 \text{ minutes}$$

$$v_0 = \left(1 - \frac{1,2}{11.10^3}\right) 9,81 \times 13,6.10^3 = 133.10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

- iii. la boule est faite de liège et le milieu environnant est de l'air :

$$\tau = \frac{2 \times 240 \times 10^{-4}}{9 \times 18.10^{-6}} = 296 \text{ s} = 4 \text{ minutes } 56 \text{ s}$$

$$v_0 = \left(1 - \frac{1,2}{240}\right) 9,81 \times 296 = 2890 \text{ m.s}^{-1}.$$

3. La citation complète est : « l'écart des vitesses entre mobiles de poids spécifiques différents augmente avec la densité des milieux ».

Soit  $\rho_1$  la masse volumique du corps 1 et  $\rho_2$  la masse volumique du corps 2. Supposons que les deux mobiles sont des boules de même rayon  $R$ .

- Lorsque  $t \rightarrow \infty$  les vitesses des deux mobiles sont respectivement  $v_{01}$  et  $v_{02}$ , données par les équations (3.4) et (3.3). L'écart entre les vitesses limites est :

$$v_{01} - v_{02} = (\rho_1 - \rho_2) \frac{2gR^2}{9\eta_0}.$$

Cet écart est indépendant de la masse volumique du milieu  $\rho_0$ .

- Considérons plutôt le cas  $t \ll \tau_1$  et  $t \ll \tau_2$  où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les temps caractéristiques donnés par l'équation (3.3) correspondant respectivement au mobile 1 et au mobile 2. On peut alors développer l'équation (3.2) au premier ordre en  $t/\tau$  en posant :

$$e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}.$$

On obtient :

$$v(t) \simeq v_0 \frac{t}{\tau} \simeq \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) gt. \quad (3.5)$$

Au temps  $t$ , l'écart des vitesses entre les deux mobiles est donc :

$$v_1(t) - v_2(t) \simeq \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \rho_0 gt.$$

Cet écart augmente (en valeur absolue) lorsque la masse volumique du milieu  $\rho_0$  augmente. La situation  $t \ll \tau_1$  et  $t \ll \tau_2$  est donc celle envisagée par Galilée dans ce texte. Etant donnée les valeurs numérique de  $\tau$  trouvées à la question précédente, il est raisonnable de supposer que Galilée mentionnait des cas dans lesquelles la vitesse limite n'est pas encore atteinte.

4. Dans le vide,  $\rho_0 = 0$  et  $\eta_0 = 0$  : on ne peut pas utiliser les équations (3.2), (3.3) et (3.4) car  $\tau \rightarrow \infty$ . Il faut reprendre le calcul au point de départ : bilan des forces et relation fondamentale de la dynamique.

Dans le vide, la poussée d'Archimède et la force de frottement visqueux sont nulles. La seule force extérieure qui s'exerce sur le mobile de masse  $m$  est son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . D'après la relation fondamentale de la dynamique on a donc :

$$m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Projetée sur l'axe  $z$ , cette relation s'écrit :

$$\dot{v} = g$$

soit, après intégration :

$$v(t) = gt + \alpha$$

où  $\alpha$  est une constante.

La condition initiale  $v(t=0) = 0$  permet de calculer la constante :  $\alpha = 0$ . D'où la vitesse de chute d'un corps dans le vide :

$$\boxed{v(t) = gt}. \quad (3.6)$$

Notons qu'on peut obtenir ce résultat en posant  $\rho_0 = 0$  dans l'équation (3.5). Remarquons surtout que ce résultat, connu sous le nom de loi de chute des corps, montre que la vitesse de chute du mobile ne dépend ni de sa taille ni de sa masse volumique, pourvu que la chute se fasse dans le vide.

## 3.2 Les dispositifs expérimentaux de Galilée

1. **La chute libre** : On place l'origine de l'axe  $z$  de façon à ce que le sol soit situé en  $z = 0$ . Comme l'axe  $z$  est orienté vers le bas, la condition initiale est donc :  $z(t=0) = -h$ .

- (a) On utilise l'équation (3.5) qui donne l'expression de  $v(t)$  développée au premier ordre en  $t/\tau$ .  
On a :

$$v = \dot{z} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)gt$$

d'où, après intégration :

$$z(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)gt^2 + \beta$$

où  $\beta$  est une constante. On détermine  $\beta$  en utilisant la condition initiale  $z(t=0) = -h$  : on obtient  $\beta = -h$ , d'où

$$z(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)gt^2 - h.$$

Le corps atteint le sol au temps  $T$  tel que

$$z(T) = 0$$

soit :

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)gT^2 - h = 0$$

d'où :

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2h}{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)g}}} \quad (3.7)$$

Application numérique :

Boule de plomb :

$$T_p = \sqrt{\frac{2 \times 2}{\left(1 - \frac{1,2}{11 \cdot 10^3}\right) \times 9,81g}} = 0,639 \text{ s}$$

Boule de liège :

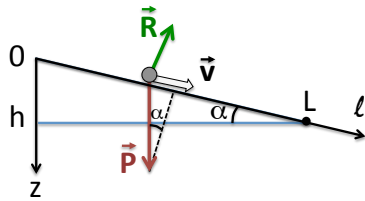
$$T_l = \sqrt{\frac{2 \times 2}{\left(1 - \frac{1,2}{240}\right) \times 9,81g}} = 0,640 \text{ s}$$

(b) Dans le vide :  $\rho_0 = 0$  :

$$T_v = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9,81}} = 0,639 \text{ s}$$

## 2. Le plan incliné :

(a) .



Bilan des forces qui s'exercent sur la boule :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} \text{ poids de la boule,} \\ \vec{R} \text{ réaction du support.} \end{cases}$$

Projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe  $Ol$  :

$$mg \sin \alpha = m\dot{v}$$

$$\dot{v} = g \sin \alpha.$$

Après intégration :

$$v(t) = gt \sin \alpha + A$$

Or  $v(t=0) = 0$  donc  $A = 0$  d'où :

$$\boxed{v(t) = gt \sin \alpha} \quad (3.8)$$

(b) En intégrant l'équation (3.8) on obtient la position de la boule sur l'axe  $Ol$  en fonction du temps :

$$l(t) = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + l_0.$$

L'origine de l'axe  $Ol$  est choisie de sorte que  $l(t=0) = 0 \rightarrow l_0 = 0$  donc

$$l(t) = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

La position verticale de la boule  $z = l \sin \alpha$  est donc :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha.$$

Le temps de chute de la boule est le temps  $T$  au bout duquel  $z(T) = h$  soit :

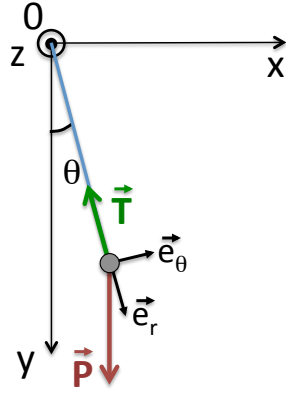
$$\frac{1}{2}gT^2 \sin^2 \alpha = h$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (3.9)$$

Application numérique :  $T = 3,7$  s.

## 3. Le pendule :

(a) .



Bilan des moments de forces au point  $O$  :

- La tension  $\vec{T}$  du fil étant parallèle au fil, son moment au point  $O$  est nul.
- Le poids  $\vec{P}$  de la boule exerce en  $O$  un moment

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r} \wedge \vec{P} = -mgl \sin \theta \vec{e}_z,$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position.

Soit  $\vec{p} = m\vec{v}$  la quantité de mouvement de la boule. Le moment cinétique au point  $O$  est :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_O &= \vec{r} \wedge \vec{p} \\ &= m\vec{r} \wedge \vec{v} \\ &= m(l\vec{e}_r) \wedge \left( l \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ &= ml^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \end{aligned}$$

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$$

$$\rightarrow ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta \quad (3.10)$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0} \quad (3.11)$$

Si  $\theta \ll 1$ , on peut développer  $\sin \theta$  à l'ordre 1 en  $\theta$  :  $\sin \theta \simeq \theta$ . L'équation (3.11) devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

On cherche une solution de la forme :

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

On choisit  $t = 0$  tel que  $\theta$  est maximum à  $t = 0 \Rightarrow B = 0$ .

$$\rightarrow \boxed{\theta(t) = A \cos(\omega_0 t)} \quad (3.12)$$

(b) En considérant le frottement de l'air, l'équation (3.10) devient :

$$ml^2 \ddot{\theta} = -kl\dot{\theta} - mgl \sin \theta$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + kl\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

Dans l'hypothèse des petites oscillations ( $\theta \ll 1$ ) :

$$ml^2 \ddot{\theta} + kl\dot{\theta} + mgl\theta = 0$$



ou encore :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{ml}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}. \quad (3.13)$$

On cherche une solution de la forme

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \exp(i\Omega t) \\ \rightarrow \dot{\theta} &= i\Omega\theta \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = -\Omega^2\theta \end{aligned}$$

En insérant cette solution dans l'équation (3.13) on obtient :

$$\begin{aligned} -\Omega^2\theta + i\Omega\frac{k}{ml}\theta + \omega_0^2\theta &= 0 \\ -\Omega^2 + i\Omega\frac{k}{ml} + \omega_0^2 &= 0. \\ -(\omega + i/\lambda)^2 + i(\omega + i/\lambda)\frac{k}{ml} + \omega_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

d'où un système de deux équations (correspondant à une équation pour la partie réelle et une équation pour la partie imaginaire) :

$$\begin{cases} -\omega^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{k}{\lambda ml} + \omega_0^2 = 0 \\ 2\frac{\omega}{\lambda} - \omega\frac{k}{ml} = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda = \frac{2ml}{k} \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\lambda^2}} \end{cases}} \quad (3.14)$$

On a donc

$$\theta(t) = \theta_0 \exp[i(\omega + i/\lambda)t] = \theta_0 e^{(-t/\lambda)} \exp(i\omega t)$$

d'où la partie réelle

$$\text{Re}[\theta(t)] = \theta_0 e^{(-t/\lambda)} \cos(\omega t).$$

Le pendule oscille à la fréquence  $\omega$ , mais son amplitude est amortie : elle diminue exponentiellement.  $\lambda$  est le temps caractéristique d'amortissement du pendule.

(c) Application numérique :

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} = \sqrt{9,81/0,1} = 9,9 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Boule de plomb :

$$\lambda = \frac{2ml}{k} = \frac{8\pi R^3 \rho l p}{3k} = \frac{8\pi \times 10^{-6} \times 11 \cdot 10^3 \times 0,1}{3 \times 3 \cdot 10^{-8}} = 3,07 \cdot 10^5 \text{ s} = 3 \text{ jours } 13 \text{ heures } 19 \text{ minutes.}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\lambda^2}} = \sqrt{9,9^2 - \frac{1}{(11 \cdot 10^3)^2}} = 9,9 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Boule de liège :

$$\lambda = \frac{2ml}{k} = \frac{8\pi R^3 \rho l}{3k} = \frac{8\pi \times 10^{-6} \times 240 \times 0,1}{3 \times 3 \cdot 10^{-8}} = 6700 \text{ s} = 1 \text{ heure } 52 \text{ minutes.}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\lambda^2}} = \sqrt{9,9^2 - \frac{1}{2240^2}} = 9,9 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Remarque :  $k$  est suffisamment petit pour être dans le cas  $\omega_0 \gg \lambda^{-1}$ . Dans ce cas,  $\omega = \omega_0$  : la période des oscillations du pendule n'est pas affectée par le frottement de l'air ; le seul effet du frottement de l'air est d'amortir l'amplitude des oscillations du pendule.

#### 4. Discussion sur les frottements :

- (a) – La chute libre. Comme on l'a vu dans la première partie de ce devoir, le frottement qui s'oppose au mouvement de chute libre est le frottement visqueux dû à la viscosité de l'air. Dans le vide, le mouvement de chute est un mouvement accéléré; dans un milieu visqueux, la vitesse sature vers une vitesse limite  $\vec{v}_0$  qui est inversement proportionnelle à  $\eta$  (voir équations (3.4) et (3.3)).
- La chute sur un plan incliné. Lorsque les boules roulent le long d'un plan incliné, leur vitesse est trop faible pour que la force de frottement visqueux liée à la viscosité de l'air joue un rôle. La force de frottement dominante, dans ce cas, est le frottement solide entre le mobile et le plan. L'intensité de ce frottement dépend du poids de la boule et de la surface de contact entre la boule et le plan. Faire rouler la boule sur le plan incliné plutôt que la faire glisser permet de diminuer ce frottement.
  - Le pendule. Le frottement considéré à la question 3 de la deuxième partie est le frottement visqueux dû à la viscosité de l'air. On peut également tenir compte du frottement solide entre le pendule en mouvement et le support immobile.
- (b) La loi de la chute des corps énonce que tous les corps tombent à la même vitesse dans le vide. Pour la mettre en évidence expérimentalement, il s'agit de s'abstraire le mieux possible des frottements.

La chute libre peut être décomposée en deux phases : un régime aux temps courts ( $t \ll \tau$  dans l'équation (3.2)), uniformément accéléré, où la vitesse ne dépend que du rapport des densités du milieu et du mobile et de l'accélération de la pesanteur (équation (3.5)), et un régime aux temps longs ( $t > \tau$ ) où la vitesse sature vers une valeur constante,  $\vec{v}_0$ , qui dépend en plus de la masse du mobile et de la viscosité du milieu. C'est dans le premier régime que la loi de la chute des corps pourrait être testée, en se plaçant dans le cas  $\rho_0 \ll \rho$ . Les applications numériques de la question 2c de la première partie ont montré que les temps  $\tau$  sont suffisamment longs ( $\geq 4$  minutes) pour qu'on puisse aisément se placer dans ce régime  $t \ll \tau$ .

Cependant, les applications numériques de la question 1 de la deuxième partie montrent que le temps de chute d'un mobile lâché d'une hauteur de 2 mètres, s'il ne dépend pratiquement pas du matériau dont est fait le mobile comme discuté précédemment, est très court (0,64 secondes). Il est donc difficile de mesurer ce temps avec précision. La chute de mobiles le long d'un plan incliné permet d'allonger ce temps de chute en le divisant par le sinus de l'angle d'inclinaison du plan (équation (3.9)) : pour un angle de 10 degrés, on obtient un temps de chute de 3,7 secondes, qui est aisément mesurable. Mais les expériences de chute le long d'un plan incliné ne peuvent se passer du support, et la friction inévitable du mobile contre le plan introduit des écarts à la loi qu'il s'agit de vérifier.

Le dispositif du pendule permet de s'abstraire astucieusement de l'effet des frottements car, si on se place dans les bonnes conditions (petites oscillations et frottement faible), les frottements influent uniquement sur l'amortissement des oscillations mais pas sur leur période. On peut ainsi attacher au pendule des mobiles de taille, poids et matériaux différents, constater que la période des oscillations est la même dans tous les cas de figure, et vérifier ainsi la loi de la chute des corps. Le pendule est donc le dispositif expérimental terrestre le mieux approprié pour mettre en évidence la loi de la chute des corps.

## Chapitre 4

# René Descartes : *Les Principes de la Philosophie* (1644)

### 4.1 Analyse du document

**Article 36** : Descartes énonce un principe de conservation dans tout l'univers de la "quantité" de mouvement et de la "quantité" de repos. Justification théologique.

**Article 37** : Conservation de l' "état" (être carré, être au repos, être en mouvement). La justification est également d'ordre théologique (voir la première et la dernière phrase de l'article). Ici, il s'agit de l'état d'un corps particulier alors que l'art. 36 traite de la conservation du mouvement total dans tout l'univers.

**Article 38** :

1. La force de résistance de l'air ou des liquides est ici la force de frottement visqueux. Cette force est proportionnelle à la viscosité du liquide.
2. Equation du mouvement :  $m\dot{v} + C \times \eta v = 0 \rightarrow v = v_0 \exp(-t/\tau)$  où  $v$  est la vitesse du corps de masse  $m$ ,  $\eta$  est la viscosité du milieu,  $C$  est une constante et  $\tau = m/(C\eta)$  : la vitesse du corps diminue avec le temps.

**Article 39** : Il s'agit de la loi de conservation du mouvement rectiligne (cette loi sera ensuite incluse dans le principe d'inertie formulé par Newton). Il s'agit de la pseudo-force centrifuge ; cette pseudo-force est une force d'inertie qui vient du fait qu'un mouvement circulaire est un mouvement accéléré.

**Article 40** : Conservation de la quantité de mouvement.

"Rencontre" entre corps dur / mou = choc élastique / choc inélastique en mécanique classique actuelle : la quantité de mouvement est conservée : c'est l'énergie cinétique qui n'est pas conservée dans le deuxième cas..

**Article 41** : Le corps qui a une moindre force est contraint par l'obstacle qu'il rencontre à changer sa détermination, et si l'obstacle est inébranlable il inversera sa détermination en gardant la même quantité de mouvement.

La notion de "détermination" correspond au sens du mouvement (« sa détermination vers un côté plutôt que vers un autre »). Elle semble proche du concept classique de vitesse, mais Descartes ne l'identifie pas à une vitesse.

Dans "mouvement", il y a en plus la notion de l'étendue du corps. Il semble que le "mouvement" appartienne au corps alors que sa "détermination" dépende de celle des autres corps environnants.

**Article 42** : Seconde partie de la règle : si le mobile a plus de force que l'obstacle, il transfère au corps qu'il rencontre une quantité de mouvement égale à celle qu'il perd.

Résumé de l'article 42 : Dieu immuable a mis dans le monde une certaine "action" qui correspond à une certaine "quantité de mouvement". Ce mouvement quantifiable peut cependant s'échanger entre les diverses parties du monde (à travers des chocs). Le principe de conservation globale (mondiale) de la quantité de mouvement régit les mouvements relatifs locaux des corps.

Ce principe est une loi divine (immutabilité) : argument théologique.

**Article 43** : Les phrases où le mot "force" apparaît :

- « la force dont un corps agit contre un autre ou résiste à une action »,
- « un corps qui est joint à un autre corps a quelque force pour empêcher qu'il n'en soit séparé »,
- « lorsqu'il est en repos il a de la force pour demeurer en ce repos et pour résister à ce tout ce qui pourrait l'en faire changer »,
- « il a de la force pour continuer de se mouvoir »

Note : la dernière phrase porte sur la quantification de cette "force".

Dans ces quatre occurrences, la force est une résistance du corps à modifier son mouvement. Dans la dernière occurrence elle dépend de la "grandeur" du corps (i. e. son volume) et de sa vitesse, et également de la surface de séparation avec un autre corps et de la nature du choc. Il n'est pas évident de traduire dans le langage de la mécanique classique ce que ces deux dernières notions représentent mais elle font apparaître que cette notion de "force" intervient dans la relation entre deux corps qui vont entrer en collision. C'est elle qui régule l'échange du mouvement entre les deux corps. Elle ne semble pas avoir d'équivalent dans le cadre de la mécanique classique, et ressemble surtout à l'idée commune d'un rapport de forces où le corps qui a la moindre force est contraint par celui qui a une plus grande force de changer d'état (cf art. 40 : « si un corps qui se meut et qui en rencontre un autre a moins de force pour continuer de se mouvoir en ligne droite ... »).

## 4.2 Questions de synthèse

1. Galilée : expérience du plan incliné → le principe d'inertie se trouve dans le passage à la limite où l'inclinaison du plan est nulle : dans ce cas, la vitesse du mobile est conservée. Approche essentiellement expérimentale chez Galilée, alors que chez Descartes le principe d'inertie est ancré dans une approche théologique, où le raisonnement prime sur l'utilisation des données empiriques. Notons toutefois chez Descartes l'utilisation des données issues des sens pour appuyer un raisonnement (cf art. 39 : « et nous le pouvons même sentir de la main .... »).
2. La quantité de mouvement de Descartes est le produit de l'étendue du corps (son volume) par sa vitesse. Il y a 2 principales différences avec la définition de la mécanique classique  $\vec{p} = m\vec{v}$  :
  - (a) c'est le volume du corps qui intervient et non pas sa masse,
  - (b) la vitesse (et la quantité de mouvement) de Descartes ne sont pas des grandeurs vectorielles mais scalaires (et positives).
3. Selon Descartes :
  - (a) Le repos et le mouvement sont deux états différents d'un corps : il y a conservation de la quantité de mouvement et de repos (art. 38 : « Dieu [...] de sa toute-puissance a créé la matière avec le mouvement et le repos, et [...] conserve maintenant en l'univers [...] autant de mouvement et de repos qu'il en a mis en le créant ».
  - (b) « le repos est contraire au mouvement »(art. 37)

Pour Galilée, le repos est un cas limite du mouvement de vitesse nulle.

4. Newton : Première loi = principe d'inertie : regroupe les 2 premières lois de Descartes  
La notion de force chez Newton est celle de la mécanique classique que nous connaissons.  
3ème loi de Newton (action / réaction) : décrit les "rencontres" entre objets dont parle Descartes.