

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Provence (Aix-Marseille I)

Mention : Sciences

Formation doctorale: Physique et Modélisation des Systèmes Complexes

DE L'ELASTICA AUX PLAQUES PLISSÉES

par

Benoît ROMAN

Soutenue le 8 décembre 2000 devant le jury composé de Messieurs :

Y.	COUDER	Président
S.	FAUVE	Rapporteur
A.	POCHEAU	Directeur
Y.	POMEAU	Rapporteur
E.	VILLERMAUX	
J.-E.	WESFREID	

REMERCIEMENTS

Je remercie ici P.Clavin de m'avoir accueilli à l'IRPHE, et à travers lui tous les membres du laboratoire.

Je remercie S.Fauve et Y.Pomeau pour leur travail de rapporteurs ainsi que les autres membres du jury, Y.Couder, J-E.Wesfreid et E.Villiermaux pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais remercier ici Alain Pocheau pour m'avoir confié un sujet aussi élégant, amusant et riche, pour avoir été aussi disponible, pour m'avoir soutenu pendant des moments moins faciles et suggéré tant de solutions. J'ai beaucoup appris de sa façon de prendre du recul devant les problèmes rencontrés, et de sa grande culture scientifique.

J'ai bénéficié de nombreuses discussions scientifiques avec M.Abid, B.Audoly (au cours d'une collaboration vraiment très agréable), C.Clanet, M.Georgelin (que je remercie aussi pour son aide précieuse dans la dernière ligne droite) et T.Frisch. Je profite de l'occasion pour remercier aussi Iety dont l'aide m'avait été vraiment très précieuse quelques années plus tôt.

Je remercie C.Clanet pour la mise au point du dispositif expérimental, et J.P.Pahin pour ses travaux préliminaires. Je remercie aussi M.Gilino, C.Paitel et l'équipe technique, F.Abetino, G.Girard et surtout J.Minelli sans lequel les expériences n'auraient pu voir le jour, et dont les conseils et l'intuition m'ont souvent guidé. Merci à eux aussi pour l'ambiance.

Je voudrais remercier tout particulièrement mes compagnons de tous les jours, les deux Laurent, Ziad, Pierre, Nicolas, Scott, Delphine, Franck.

Enfin je voudrait citer tous ceux qui m'ont aidé pendant cette thèse de façons très diverses: Christophe pour tant de choses, Géraldine pour son soutien essentiel, Arnaud et son PC; Stefania, Rémy; tous ceux qui m'ont accueilli à Marseille-plage, Rémi-Greg-Séverine-Elodie, Laurent (encore un), Laure, Patrice-Redge-Steph', Olivier, Elena, les marins de la Pointe Rouge, et aussi Carole, Fred, Pierre, Céline, j'en oublie sûrement.

Enfin je pense à Agathe, Charlotte, à Renaud, à mes parents, et je les remercie d'avoir su rester à mes côtés.

Je tient à citer Marielle; cette thèse restera associée pour moi à son image.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Dispositif expérimental et outils théoriques	9
1.1 Dispositif expérimental	10
1.1.1 Feuilles utilisées	12
1.1.2 Conditions d'encastrement	12
1.1.3 Dispositif de compression	14
1.1.4 Visualisation	17
1.1.5 Mesure résistive de longueur d'un pli en suspens	18
1.1.6 Mesure de longueur de contact plan	20
1.2 Description théorique: l' <i>elastica</i>	22
1.2.1 Hypothèses et énergie de courbure	22
1.2.2 Un problème simplifié: l' <i>elastica</i>	23
1.2.3 Retour au problème initial	29
1.2.4 Propriétés utiles	31
1.3 Conclusion	35
2. Processus de création d'un nouveau pli	37
2.1 Confrontation expérimentale de l' <i>elastica</i>	39
2.1.1 Les hypothèses du modèle	39
2.1.2 Confrontation directe	40
2.1.3 Conclusion	46
2.2 Propriétés exactes des plis	47
2.2.1 Propriétés de symétrie des brins	47
2.2.2 Lois de conservation	49
2.2.3 Tiges, gouttes et ménisques	52
2.2.4 Conservation de l'énergie	56
2.3 Écrasement "en champignon"	59
2.4 Unicité des brins	61
2.5 Du brin au pli: asymétrie et frottements	64
2.5.1 Existence de solutions asymétriques	65
2.5.2 Sélection par la route d'écrasement	65

2.6	Conclusion	71
3.	Cascade de générations de plis	73
3.1	Évolution de la force de réaction	75
3.2	Similarité géométrique	77
3.2.1	Courbure et invariance d'échelle	77
3.2.2	Construction d'une solution à n plis	78
3.2.3	Conséquence sur les forces de réaction	78
3.2.4	Test expérimental	79
3.2.5	Invariance discrète et ruptures d'invariance	82
3.3	Au delà de la similarité des états : étude des brins	84
3.3.1	Méthodes de mesure	84
3.3.2	Évolution cyclique au cours de l'écrasement.	86
3.3.3	Évolution du cycle aux grands nombres de plis	88
3.4	Hystérésis et multi-stabilité	90
3.4.1	Hystérésis "intrinsèque"	90
3.4.2	Hystérésis dû à la distribution des plats	93
3.4.3	Évolution aux très grands nombres de plis	95
3.5	Conclusion	98
4.	Au delà des plis droits	101
4.1	Une invariance d'échelle spatiale?	102
4.1.1	Écrasement entre deux plaques non parallèles	102
4.1.2	Une généralisation de l' <i>elastica</i>	104
4.1.3	Écrasement en coin et similarité géométrique	105
4.1.4	Conditions de raccordement	107
4.1.5	Conclusion	108
4.2	Plis courbés	110
4.2.1	Dispositif expérimental	111
4.2.2	Une transition de régularisation	113
4.2.3	Comportement mécanique des états régularisés	116
4.2.4	Réseau de d-cônes et cascade transverse	124
4.2.5	Conclusion	127
4.3	Conclusion	131
5.	Instabilités secondaires de flambage et délaminage	133
5.1	Lien avec le délaminage	135
5.2	Dispositif expérimental	137
5.2.1	Quelques ordres de grandeur	137
5.2.2	Dispositif expérimental	138
5.3	Calculs de stabilité	144

5.3.1	Flambage d'un plan sous compression non-isotrope . . .	144
5.3.2	Stabilité de la colonne d'Euler	148
5.4	Résultats expérimentaux	152
5.4.1	Différents modes observés	152
5.4.2	Diagramme de stabilité	154
5.4.3	Retour sur le délaminage	156
5.5	Conclusion	158
Conclusion		161
Annexe		163
A.	Solutions formelles de l'elastica et intégrales elliptiques	165
B.	Une intégrale première supplémentaire?	169
C.	Existence de plis asymétriques sans frottement	173
D.	La colonne d'Euler, solution exacte des équations de Föppl-Von Kármán	177
E.	Articles	181
E.1	Non-linear Constrained Elastica	181
E.2	Buckling cascade of thin plates: Forms, constraints and similarity	219
E.3	Cascade de bifurcation de flambage: réponse mécanique et similarité	229
E.4	De l'analyse de l'elastica aux propriétés globales de plaques écrasées	237
E.5	Entre l'arbre et l'écorce	245

INTRODUCTION

Plaques et coques minces sont largement utilisées dans la confection des objets qui nous entourent. Une raison importante en est leur grande légèreté doublée dans certaines configurations d'une résistance mécanique importante (structures creuses, lamellaires [47] ou en nid d'abeille. . .). Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures robustes de moindre poids. Plus généralement, les propriétés élastiques de plaques minces s'avèrent partie prenante de nombreux systèmes où une interface matérielle est présente. Citons l'exemple des films minces déposés sur un substrat pour lesquels les tensions nées du séchage ou du refroidissement entraînent les cloques des peintures ou le délaminage de films épitaxiaux [20].

Citons également les membranes biologiques dont les formes, notamment des vésicules, sont en partie gouvernées par des termes élastiques [21, 64]. Citons aussi certaines macromolécules qui peuvent être modélisées comme des coques minces [65, 73], les nanotubes dont les comportements singuliers ou collectifs ont trait là encore à l'élasticité, ou encore la géophysique des plaques terrestres [9, 44].

Pourtant, malgré plus de deux siècles d'existence et des implications très diverses, l'élasticité des plaques minces recèle encore de nombreuses zones d'ombres. Notamment les domaines non-linéaires de déformations, les importances relatives de l'extension et de la courbure [41] ou les formes des motifs de délaminage [2] soulèvent toujours de nombreuses questions. Le but de cette thèse est d'y apporter quelques réponses.

On fait habituellement [43] remonter l'origine de l'élasticité aux travaux de Hooke : “*ut tensio sic vis*” (1680), que l'on traduit aujourd'hui par la proportionnalité de la contrainte et de la déformation. Les premières études d'élasticité, auxquelles se sont intéressés notamment Mariotte, Bernoulli et Euler, portent alors naturellement sur les déformations de tiges. En 1744, ce dernier aboutit à l'équation de l'*elastica*, dont les solutions décrivent le flambage d'une tige. Ceci inaugure le domaine toujours très actif des études de stabilité élastique. Toujours à cette époque, on note également les premières études de modes acoustiques des tiges [6, 25]. Les résultats de ces premières études demeurent très utilisés de nos jours dans des domaines très divers, en

particulier du fait des effets dramatiques quelquefois produits par l’instabilité de flambage. Donnons comme illustration de celle-ci le flambage thermique de rails, largement capable de provoquer le déraillement d’un train (figure 0.1).



Fig. 0.1 – *Flambage de rails sous l’effet de la dilatation thermique. En Suède les températures peuvent en effet varier de $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $+55\text{ }^{\circ}\text{C}$ entre l’hiver et l’été.*

Fort des succès de l’élasticité des tiges, Euler fut le premier à s’attaquer aux déformations des plaques dans le but de déterminer les modes acoustiques d’une cloche (“De sono campanarum” [26]). Son idée fut de modéliser celle-ci par une collection d’anneaux analogues à des tiges courbées, inaugurant ainsi le débat sur la pertinence de l’approximation de plaques par des tiges. Des tiges aux plaques, la généralisation s’avérera plus complexe qu’escomptée. Il fallut attendre en effet plus d’un siècle et demi pour aboutir aux premières équations modélisant les faibles déformations des plaques – les équations de Föppl-Von Kármán (1910) – preuve de la difficulté de cette entreprise. Au delà de leur existence, ces deux équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées du quatrième ordre, “sont très complexes et ne peuvent être résolues exactement, même dans les cas les plus simples” d’après [37].

Malgré plus de deux siècles, l’élasticité des plaques minces apparaît donc encore largement en quête de développement. Ceci semble d’autant plus nécessaire que ses applications et ses couplages avec de nombreux phénomènes physiques sont nombreux. De ce double constat sont nées les motivations de ce travail de thèse.

Motivations

Les questions abordées dans cette thèse sont inspirées par l'observation

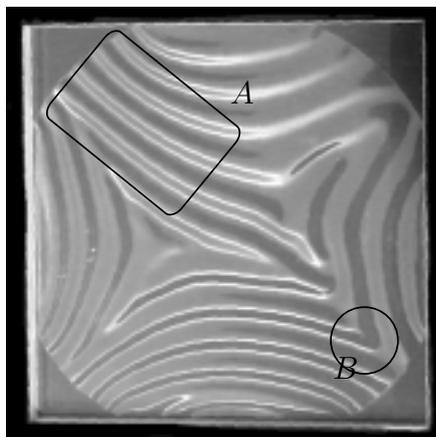


Fig. 0.2 – *Écrasement d'une feuille encadrée selon ses quatre côtés. Le motif formés par les plis révèle de larges domaines de faible courbure interfacés par des zones de "défauts" plus localisés.*

(figure 0.2) des plissements adoptés par une feuille carrée encadrée sur ses quatre côtés, présentant un excédent de surface par rapport au bâti et écrasée par le dessus. Sous ces contraintes, la feuille adopte une structure de plis formée de vastes domaines faiblement courbés (*A*) séparés par des zones plus localisées, où se résolvent les conflits d'orientation (*B*).

Avant que d'espérer comprendre ces motifs complexes, il nous a paru légitime de nous concentrer sur les larges domaines de type *A* où le nombre de plis est conservé. D'autre part, étant donnée la faible courbure de ces domaines à l'échelle des plis, il nous a semblé séduisant d'aborder leur étude sous l'angle d'une courbure générale nulle, puis d'introduire celle-ci en terme de perturbation. C'est ainsi qu'une large part de notre étude s'est intéressée à des plis présentant une direction d'invariance, pour se compléter par celle de plis analogues, mais à faible courbure imposée.

Parallèlement à cette approche, nous avons également abordé, sous deux angles complémentaires, l'étude de situations non homogènes de compression de plaques minces :

- inhomogénéité géométrique : écrasement de plaques en coin.
- inhomogénéité de contraintes : flambage sous champ de contraintes bi-axial.

La première étude nous montrera comment les plaques s'adaptent adiabatiquement à une modification lente des contraintes. La seconde, qui a trait

au délaminage, nous indiquera l'importance d'un champ de contrainte initial envers la morphologie des instabilités de flambage.

Ce manuscrit de thèse est structuré comme suit :

Dans le chapitre 1, nous détaillons le dispositif expérimental de base utilisé pour écraser les plaques par le dessus. Puis nous exposons la description théorique des états plissés selon une même direction, obtenue par minimisation de l'énergie de courbure. Cela comprendra le formalisme de l'*elastica* contrainte, à savoir la modélisation des formes et des contraintes adoptées par une tige de longueur *fixe* emprisonnée dans une boîte de taille *donnée*.

Malgré la simplicité de cette équation, les conditions aux limites et les conditions géométriques de compression rendent le problème inaccessible à une résolution analytique. Ceci provient d'une difficulté commune à de nombreux problèmes : comment traiter de conditions *globales* dans le cadre d'équations différentielles portant par nature sur des grandeurs *locales*? Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'utilisation de deux types d'outils efficaces pour surmonter cette difficulté.

Dans le chapitre 2, nous utilisons des propriétés de symétrie et de conservation, pour décrire le processus de création d'un nouveau pli au cours de la compression.

Dans le chapitre 3, nous considérons les propriétés d'invariance d'échelle de l'*elastica* pour déterminer la structure de la cascade de génération de plis. Un point notable est que le système obéit à une auto-similarité *discrète* et *partielle*. Ces deux caractéristiques se révéleront non seulement *liées*, mais *nécessaires* pour qu'il puisse exister une réponse mécanique à la compression. Les conséquences de l'auto-similarité se révèlent nombreuses, en particulier quant à la réponse mécanique de ce système. Elles nous permettent ainsi d'expliquer simplement la richesse de son comportement.

Inspirés par ces résultats, nous présentons ensuite (dans une première partie du chapitre 4) un autre type de cascade de plis, faisant intervenir des variations de la largeur de la feuille associées à un écrasement en coin.

Nous poursuivons alors ce chapitre en nous interrogeant sur la robustesse de notre approche. Si nous espérons modéliser des motifs du type de ceux de la figure 0.2, n'a-t-on pas pris ici une limite singulière en choisissant une courbure nulle des lignes de contact? Des tiges aux plaques, la généralisation n'est pas forcément légitime. En comparaison des tiges, l'énergie d'une plaque déformée fait en effet intervenir un terme supplémentaire d'extension, souvent dominant dans le cas de plaques minces. Nous verrons au chapitre 4 dans quelle mesure le comportement de plis droits peut s'extrapoler à ceux de plis courbés.

Le chapitre 5 complète la modélisation des plaques sous contraintes en s'attachant à l'étude de la compression longitudinale sur les plis. Celle-ci

est en effet partie prenante des caractéristiques relatives à la figure 0.2, car les plis ne sont sans doute pas uniquement sujets à des forces transverses. Dans cette étude, il ne s'agit donc plus d'écraser une plaque flambée mais de comprimer un pli selon sa direction d'invariance. Dans cet esprit, nous étudions les instabilités secondaires d'une bande infinie initialement plane soumise à des contraintes bi-axiales dans son plan. Cette étude s'avérera très directement liée au phénomène de délaminage qui apparaît lorsque de fortes contraintes compressives s'exercent dans le plan d'un film mince déposé sur un substrat. Lorsque celles-ci sont assez fortes, le film se décolle partiellement du substrat pour former des cloques qui peuvent prendre la forme de doigts oscillants (figure 0.10 page 8). À la suite de travaux récents [2], on s'attachera à comprendre le rôle de l'élasticité du film décollé (en particulier ses instabilités) sur ces figures de délaminage.

Une conclusion sera enfin apportée sur l'état de cette étude quant aux questions initiales. Nous constaterons en particulier les progrès réalisés dans l'étude pleinement non-linéaire de l'*elastica*, dans sa robustesse théorique et pratique et dans sa pertinence à modéliser aussi des états à faible courbure, où l'extension est néanmoins présente.

Panorama des configurations

Pour étudier la compression de plis ayant une direction d'invariance, nous comprimons entre deux plaques parallèles une feuille dont deux côtés en regard ont été encastrés. La configuration est telle qu'un excédent de surface est imposé : la feuille est déjà flambée avant toute compression par le dessus (voir figure 0.3).

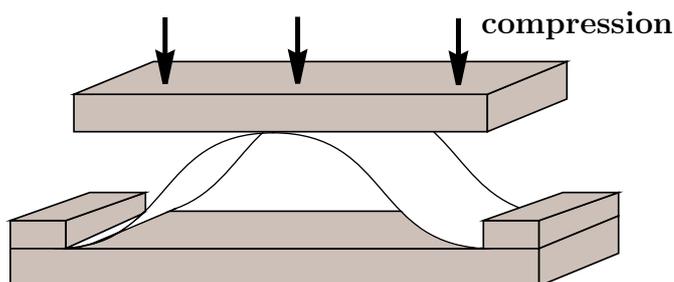


Fig. 0.3 – Schéma de principe de l'expérience.

Si l'excédent de surface est trop grand, le pli prend une forme de plus en plus repliée au cours de la compression (voir figure 0.4 page suivante) tandis que ses parties planes restent stables vis à vis du flambage. Au vu de leur forme, nous appellerons "champignon" ce type d'état.

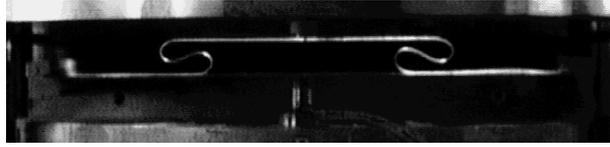


Fig. 0.4 – *Photo d’un état en forme de “champignon”*

En revanche si l’excès de surface est plus réduit, et donc les feuilles peu courbées initialement, un nombre croissant de plis apparaît au cours de la compression selon la route suivante. Lorsque la hauteur est progressivement réduite, le contact avec la plaque du haut devient plan puis *flambe* pour donner naissance à un pli ne touchant pas la plaque opposée (figure 0.5), que nous appellerons un “pli en suspens.” L’extension verticale de ce pli augmente jusqu’à ce qu’il finisse par toucher l’autre plaque : on a alors créé un deuxième pli.



Fig. 0.5 – *Forme prise par la feuille lors de la création d’un deuxième pli : après le flambage de la zone de contact, on observe un pli en suspens.*

Le processus se répète ensuite de façon identique et un nombre croissant de plis est créé (figure 0.6). On peut ainsi obtenir un très grand nombre de

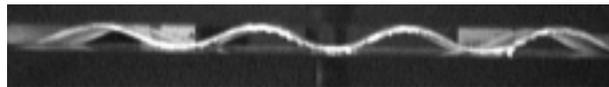


Fig. 0.6 – *Vue par la tranche d’un état présentant quatre plis*

plis (jusqu’à une cinquantaine) en réduisant suffisamment la hauteur, et cela sans dommages pour la feuille, si son épaisseur est choisie assez petite.

Nous avons également écrasé des feuilles non plus entre deux plaques parallèles, mais dans un coin (figure 0.7). Ceci a été l’occasion d’étudier une autre forme d’invariance d’échelle, ne se manifestant non plus au cours de l’écrasement, mais spatialement. Des plis similaires à différentes échelles parviennent ainsi à cohabiter sur la même feuille pour une découpe judicieuse de ses contours.

Pour évaluer la pertinence de ces travaux sur les plis droits, nous avons perturbé les lignes de contact par une faible courbure. Il s’agit en fait main-



Fig. 0.7 – Une autre forme d'invariance d'échelle lors d'un écrasement en coin.

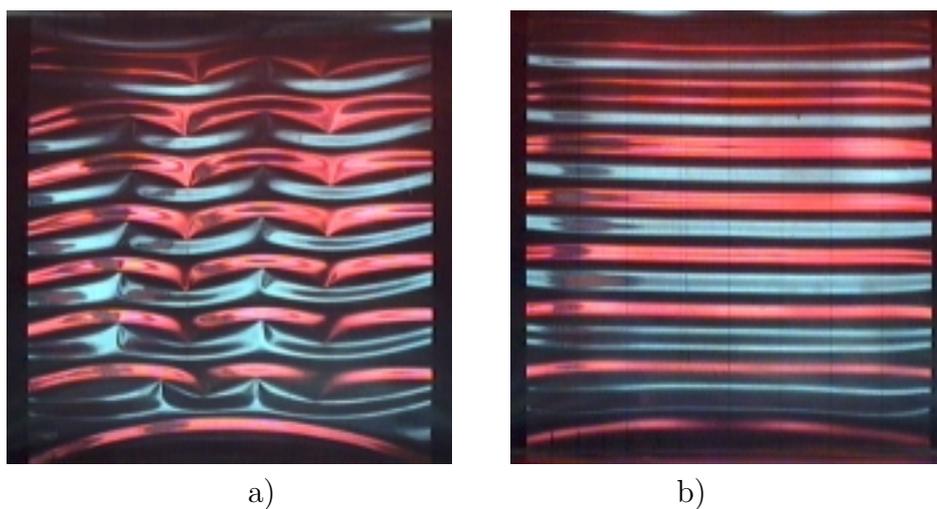


Fig. 0.8 – Vue de dessus des états de feuilles écrasées entre supports courbés; a) un état comportant des singularités; b) un état régularisé. La courbure des conditions d'écrasement (cylindres d'axe vertical sur ces photos) est masquée dans cette visualisation.

tenant d'écraser les feuilles entre deux plaques cylindriques courbées. L'axe des cylindres (vertical sur les photos) est perpendiculaire aux conditions aux limites d'encastrement. Celles-ci sont donc courbes puisqu'inscrites sur les cylindres. Au cours de l'écrasement, on observe alors des réseaux de singularités de plus en plus serrés (figure 0.8a), puis une transition brutale de régularisation. Celle-ci conduit à des états particulièrement intéressants pour notre propos car composés de plis réguliers mais courbés (figure 0.8b).

Enfin, une dernière expérience permettra de comparer les états obtenus par compression biaxiale d'une bandelette élastique (figure 0.9) aux figures oscillantes de délaminage présentées en figure 0.10 page suivante.

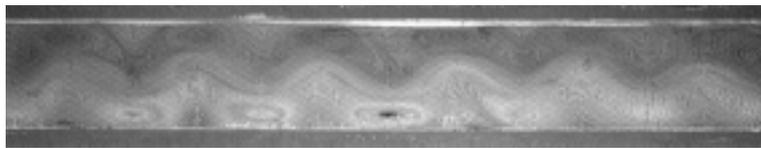


Fig. 0.9 – *Un état très comprimé de la bandelette élastique qui ressemble beaucoup...*

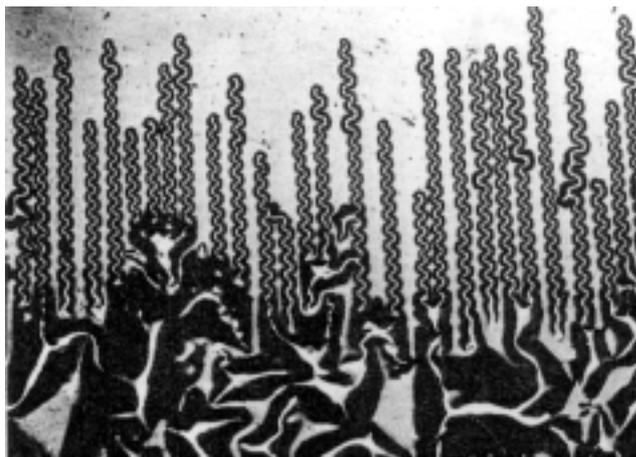


Fig. 0.10 – *... aux figures de délaminage en fil de téléphone d'une couche de carbone de 200 nm d'épaisseur déposée sur du quartz (d'après [28]).*

1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET OUTILS THÉORIQUES

Résumé

Ce chapitre préliminaire est divisé en deux parties. La première est consacrée à la description du dispositif expérimental, utilisé dans les chapitres 1 à 4. La deuxième partie consiste en l'exposé des outils théoriques utilisés tout au long de l'étude, notamment l'équation de l'*elastica*.

1.1 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

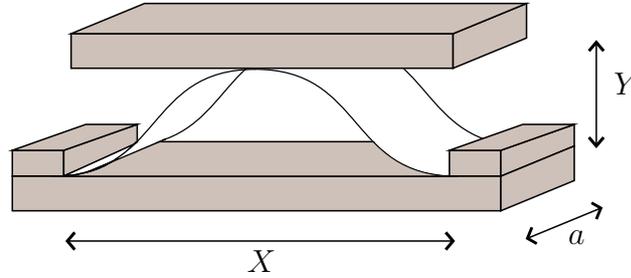


Fig. 1.1 – Une feuille initialement plane est encastrée sur ses côtés, de telle sorte qu'elle soit flambée vers le haut. L'expérience consiste à la comprimer verticalement entre deux plaques horizontales.

Le but du dispositif expérimental est d'étudier le comportement élastique de plis ayant pour l'instant une direction d'invariance. Ces états peuvent avoir un intérêt direct dans des applications industrielles (déformation de matériau sandwich de type carton ondulé [47], de lames à ressort [30, 33] ou pour la modélisation d'un test de résistance mécanique [10]).

Pour cela nous partons d'une feuille plane horizontale que l'on fait flamber vers le haut en encastrant ses côtés comme sur la figure 1.1. Ces conditions aux limites étant désormais fixées, la feuille est placée dans une presse (voir figure 1.1) afin de réduire progressivement la hauteur qui lui est disponible.

D'autres travaux sur l'itération de l'instabilité de flambage ont pris un parti différent [13, 16, 24, 31, 48] en réduisant la taille latérale, à hauteur disponible fixée.

Notre étude expérimentale a principalement porté sur la mesure de la force verticale totale nécessaire pour maintenir la hauteur disponible Y . Cependant d'autres dispositifs de mesures ont également été développés pour étudier plus finement les évolutions morphologiques de la feuille : mesures de la longueur d'un pli, d'une zone de contact.

Dans toute cette étude nous utiliserons le système de coordonnées selon lequel l'axe Oz est la direction d'invariance du système, l'axe Ox est perpendiculaire et horizontal, et l'axe Oy est vertical (voir figure 1.3 page ci-contre). On notera X la distance entre les deux conditions aux limites, Y la hauteur disponible et L la longueur de la feuille. L'excès relatif de surface entre la feuille et la surface disponible sur la plaque $\mathcal{R} = (L - X)/X$ sera alors le paramètre adimensionné gouvernant le problème.

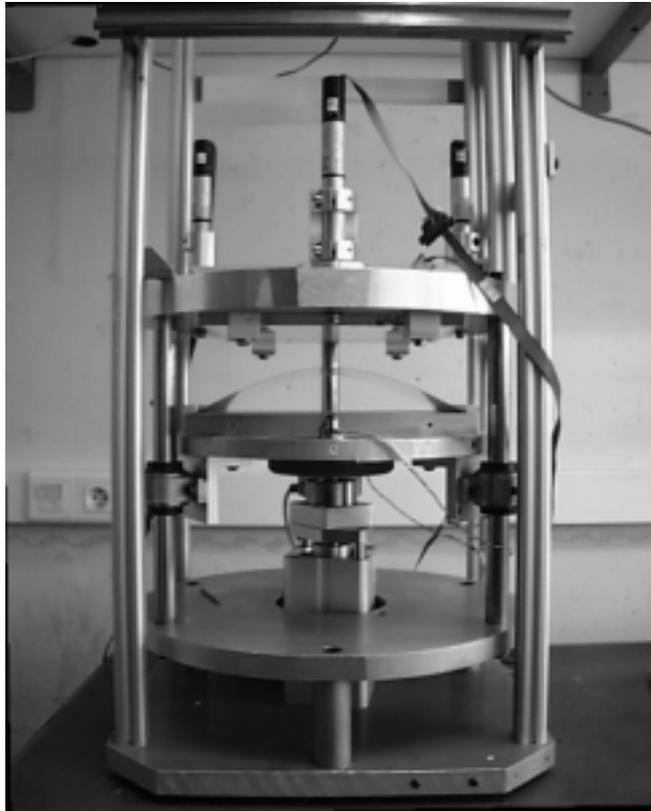


Fig. 1.2 – Photographie du dispositif expérimental

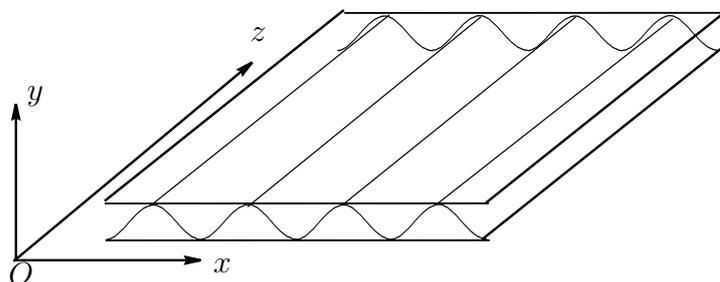


Fig. 1.3 – Définition des axes.

1.1.1 Feuilles utilisées

Dans la plupart des expériences, nous utilisons des feuilles initialement planes, en acier à ressort (module d'Young environ 200 Gpa), de longueur effective $L = 231,6$ mm, largeur $a = 100$ mm (figure 1.4). Selon les plaques, l'épaisseur h est de 0,1 0,2 ou 0,3 mm. Dans la majorité de l'étude, on a choisi



Fig. 1.4 – La feuille a une épaisseur h , une largeur a et une longueur l

un excès de surface relatif faible pour éviter le régime dit de champignon (figure 0.4), soit $\mathcal{R} = (L-X)/X = 5\%$. La hauteur initiale avant compression est alors de l'ordre de $Y_0 = 35$ mm.

Dans certains cas, pour les visualisations, nous utilisons des feuilles de polycarbonate d'épaisseur 0,1 à 1 mm. Le module de Young est alors de deux ordres de grandeur plus faible que celui de l'acier à ressort. Enfin, toutes ces feuilles sont stockées à plat, afin de ne pas leur communiquer de courbure initiale.

1.1.2 Conditions d'encastrement

Les deux bords de la feuille, de longueur a , sont placés dans des mors dont la fonction est d'imposer des conditions d'encastrement : la position des extrémités de la feuille est fixée, ainsi que le plan tangent le long de ces bords.

Les bords de la feuille sont donc enserrés entre le support et une réglette que l'on visse sur celui-ci. Pour obtenir une bonne précision dans les mesures, un grand soin a été pris dans la réalisation de ces conditions aux limites. Il faut en effet s'assurer que celles-ci imposent bien l'invariance par rapport à la direction Oz des plis que l'on va obtenir.

Il est primordial pour cela d'assurer une très bonne précision sur le positionnement de la feuille. En effet, la hauteur maximale d'une tige flambée varie comme $(L-X)^{1/2}$ car c'est une bifurcation supercritique (voir page 28). Lorsque \mathcal{R} est faible (X et L sont proches), une variation de L ou X en fonction de z peut donc avoir de grandes conséquences sur les variations de hauteur Y , et perturber l'invariance du pli initial dans la direction z . Pour éviter cela, il faut d'une part que les réglettes soient fixées de façon parfaitement parallèle l'une à l'autre (on a ainsi une bonne précision sur X), mais aussi que la feuille soit positionnée de façon que la distance le long de la

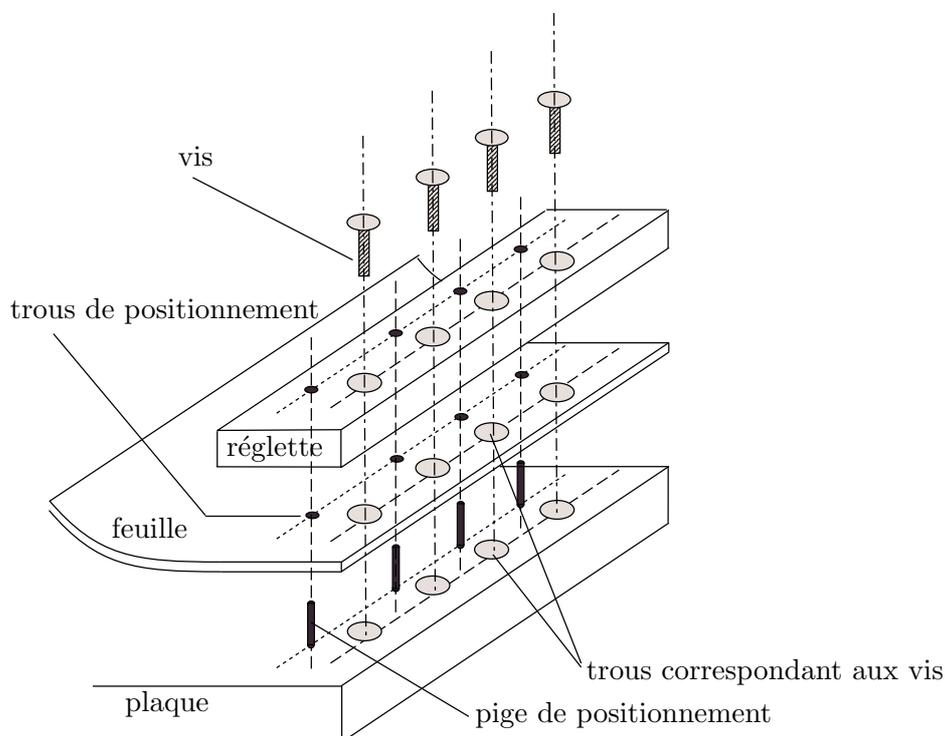


Fig. 1.5 – *Dispositif de positionnement de la feuille. Il faut s’assurer très précisément que l’excès de surface est bien constant sur toute la longueur d’encastrement. C’est le rôle des pignes de positionnement.*

feuille soit bien la même tout le long des bords encastés (bonne précision sur L). Dans ce cas, le flambage initial est alors bien invariant selon Oz .

La feuille comporte des évidements pour permettre le passage des vis de serrage, mais aussi des trous de positionnement usinés à des endroits précis, pour autoriser le passage de pignes dont la position sur le support est déterminée précisément (voir la figure 1.5). Ceci permet de positionner très précisément la feuille avant de procéder au serrage du dispositif d’encastrement. Si celui-ci devient assez fort, l’influence des pignes de positionnement sur l’élasticité de la feuille devient négligeable. On aboutit ainsi à des conditions aux limites invariantes selon Oz .

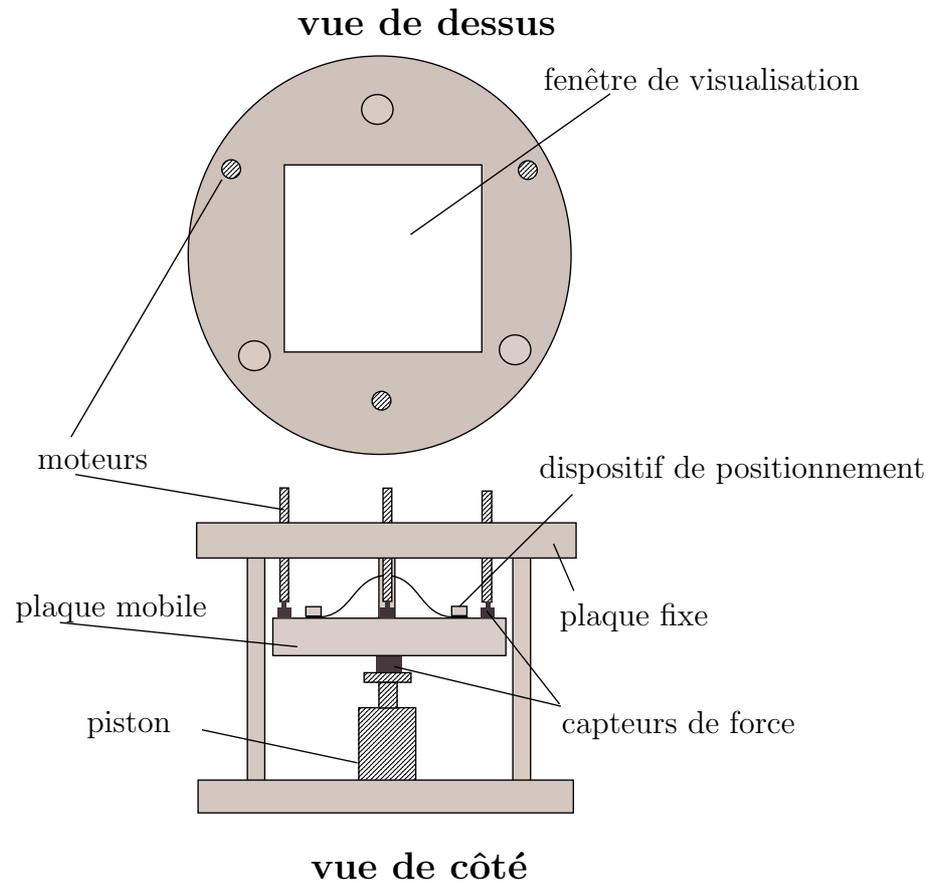


Fig. 1.6 – *Dispositif expérimental de compression. La feuille est encastrée sur une plaque mobile qui peut se déplacer vers une plaque fixe. La hauteur disponible est imposée, tandis que l'on mesure la force de réaction verticale.*

1.1.3 Dispositif de compression

Déplacement de la plaque

La plaque horizontale sur laquelle est fixée la feuille est mobile et peut se déplacer verticalement, parallèlement à elle-même. Elle est guidée le long de trois axes verticaux par des patins à roulement à bille. Ce guidage n'impose pas le parallélisme¹ des deux plaques mais permet un positionnement latéral de la plaque du dessous par rapport à la plaque fixe du dessus. Ce dernier est rendu nécessaire par la présence des réglettes d'encastrement qui doivent

1. Nous décrirons plus loin comment est obtenu le parallélisme des plaques de compression.

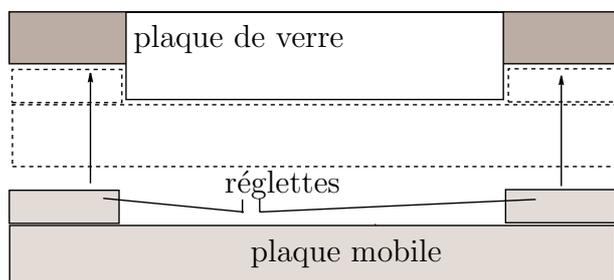


Fig. 1.7 – *Le guidage latéral de la plaque mobile permet d’ajuster la position des réglettes d’encastrement par rapport à la plaque de verre (fenêtre de visualisation).*

venir se placer de part et d’autre de la plaque du haut (voir figure 1.7) lors de l’écrasement.

La plaque du bas est poussée vers le haut grâce à un piston pneumatique alimenté en air comprimé par l’intermédiaire d’un détendeur. Elle est déplacée vers le haut jusqu’à reposer contre trois moteurs pas-à-pas verticaux disposés en triangle et dépassant du bâti.

Mesure de forces

Chaque moteur appuie sur la plaque du bas par l’intermédiaire d’un capteur de force solidaire de celle-ci, et permet la mesure de la force verticale exercée par le moteur. La précision de ces capteurs est de 2 N environ, pour une gamme de mesure de 200 N au maximum. Cette étendue de mesure est suffisante car les moteurs sont très précis (répétabilité de $0,1 \mu\text{m}$), donc fragiles, et seraient endommagés par des forces supérieures à ces valeurs.

D’autre part, entre le vérin et la plaque mobile est inséré un capteur de force de même précision mais d’étendue de mesure bien supérieure : 2 kN. Cette force exercée par le piston est répartie entre les forces appliquées sur les moteurs, le poids de la plaque mobile (constante) et la force appliquée sur la feuille elle-même (voir 1.6). La force de réaction élastique de la feuille est donc finalement obtenue par différence, (le poids de la plaque étant retiré une fois pour toutes).

L’expérience consiste à toujours exercer avec le vérin pneumatique une force supérieure à la force de réaction de la feuille, mais sans être excessive pour ne pas appuyer trop fort sur les moteurs. Cela s’obtient au moyen d’un réglage judicieux de la pression dans le vérin. En particulier nous verrons que dans certains cas, le système peut subir des réarrangements qui diminuent brutalement sa force de réaction (§ 3.4 page 90). La force exercée sur les

moteurs augmente alors brusquement, au risque de les endommager.

On peut espérer mesurer la force élastique par différence de mesure avec une précision d'au moins 8 N (en pratique elle est bien meilleure). Tant que la force due au vérin est ajustée de telle sorte que les moteurs n'encaissent qu'une force réduite (inférieure à 200 N), l'étendue de mesure est seulement limitée par celle du capteur de force placé sur le vérin, c'est-à-dire 2 kN.

L'intérêt de ce montage différentiel est ainsi d'autoriser des mesures de forces importantes, tout en ayant une grande précision sur les hauteurs imposées. Les moteurs précis étant forcément fragiles, ils ne supportent ici que la *différence* de force entre le vérin et la feuille.

Pilotage informatique

Les trois moteurs sont pilotés par ordinateur. Les opérations de déplacement des moteurs, d'enregistrement du zéro de référence sont gérées à travers un programme Labview. De même les indications des capteurs de force sont enregistrées sur le même ordinateur grâce à une carte d'acquisition.

Pour protéger les moteurs, un programme de sécurité vérifie en permanence que la force sur chaque moteur ne dépasse pas la valeur limite. Le cas échéant, celui-ci déclenche une électrovanne permettant d'annuler la force de compression en reliant la chambre du vérin à l'extérieur. Cette même électrovanne peut être activée depuis un bouton-poussoir de sécurité en cas de danger pour l'utilisateur (la presse peut effectivement développer des forces importantes et réagir brusquement dans certains cas). Elle se déclenche aussi en cas de panne de courant.

Parallélisme et zéro de référence

On s'assure du parallélisme des deux plaques (dont les aspérités sont de l'ordre de la dizaine de μm après rodage) de la façon suivante. Les moteurs sont remontés, puis les plaques sont amenées au contact en imposant une force importante à l'aide du vérin pneumatique. Les moteurs sont alors descendus jusqu'à ce qu'ils viennent au contact de la plaque du bas. Cette position est alors enregistrée et sert de position de référence (zéro). En pratique un programme de dichotomie recherche la position des moteurs pour laquelle ils exercent une force d'environ 10 N.

Les moteurs sont ensuite déplacés simultanément des mêmes valeurs, ce qui assure le parallélisme des deux plaques.

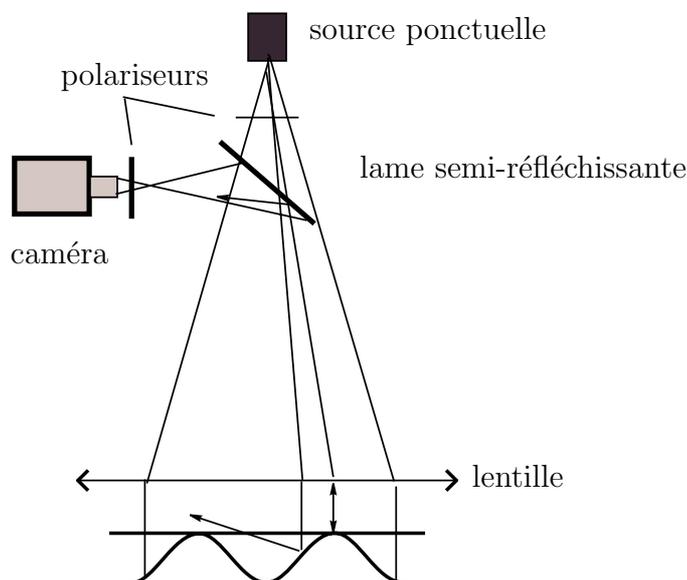


Fig. 1.8 – *Dispositif optique de visualisation des zones de contact. Seules les portions de la feuille dont le plan tangent est parallèle aux plaques de compression sont vues : ce sont les zones de contacts avec les plaques.*

1.1.4 Visualisation

La visualisation se fait de deux façons : par la tranche, et par le dessus. L'observation par la tranche est très simple : il s'agit d'observer directement les formes prises par les feuilles. Il peut cependant être utile de remplacer les feuilles en acier, généralement plus fines, par celles en polycarbonate, plus épaisses et donc mieux visibles.

La plaque du haut est en verre, maintenue sur le bâti par des mâchoires. Il est donc possible d'observer par le dessus l'évolution du système. Une source ponctuelle placée au foyer d'une lentille de Fresnel de focale 60 cm permet d'éclairer le système (environ 20 cm × 20 cm) sous un faisceau parallèle (voir figure 1.8). Celui-ci est réfléchi par la surface de la feuille qui agit comme un miroir déformé. Les rayons sont donc défléchis dans des directions qui dépendent de l'inclinaison du plan tangent. Aux endroits où la feuille a son plan tangent parallèle aux plaques de compression, les rayons sont réfléchis parallèlement à eux-mêmes, traversent à nouveau la lentille et vont converger vers le point source. À l'aide d'une lame semi-réfléchissante, ils sont redirigés vers le côté. Une caméra placée à cet endroit permet de filmer la fenêtre de visualisation. L'optique de la caméra étant mise au point sur la feuille, les

seuls points lumineux de celle-ci sont ceux ayant réfléchi des faisceaux dans une direction assez proche de la verticale pour passer à travers la lame semi-réfléchissante. Ainsi on sélectionne (à quelques degrés près) les points de la feuille dont le plan tangent est parallèle aux deux plaques de compression.

Il faut cependant éliminer les très fortes réflexions sur les deux faces parallèles de la plaque de verre. Pour ce faire, on place un polariseur linéaire avant la lame semi-transparente, et un autre, perpendiculaire devant la caméra. A priori aucun rayon ne peut plus être détecté par la caméra. Cependant, lorsque l'on utilise des feuilles de polycarbonate dont les propriétés optiques ne sont pas isotropes, leur lumière réfléchie est polarisée différemment de la lumière incidente. Le dispositif permet alors de visualiser leurs parties localement horizontales, sans image parasite.

1.1.5 Mesure résistive de longueur d'un pli en suspens

Dans certaines configurations, on observe des plis en suspens (figure 0.5 page 6), dont la mesure de longueur s'avérera utile (§ 3.3.1 page 84). Celle-ci doit cependant être d'autant plus précise que les plis à mesurer seront plus petits au fur et à mesure de l'écrasement (leur taille sera diminuée d'un facteur 5 dans nos expériences).

Une méthode de mesure par traitement d'une image prise par la tranche serait imprécise, car elle dépendrait en particulier de la précision avec laquelle on localise le point de contact. Comme la feuille y est tangente, la dérivée première est nulle, et sa position est équivoque.

Pour s'affranchir de cette difficulté, nous avons mis au point une technique de mesure de résistance linéique entre les deux points de contacts. Il s'agit d'abord de placer sur la feuille une pellicule dont la résistance linéique est constante. Ceci n'est pas évident dans la mesure où cette pellicule devra avoir un module de flexion le plus faible possible, pour ne pas perturber l'élasticité de la feuille. Il faut aussi que la résistivité soit mesurable, la plupart des matériaux ayant une résistance très faible (conducteurs) ou très grande (isolants). Nous avons par exemple expérimenté un nouveau procédé de peinture résistive chauffante développé récemment, sans succès parce que la résistance était trop faible. Finalement nous avons utilisé des bandelettes autocollantes de feuille résistive utilisée habituellement comme résistance surfacique de chauffage (il s'agit d'une feuille très mince de cuivre déposée sur un substrat souple). Son épaisseur totale est de 0,1 mm, sa résistance linéique d'environ 4 m Ω /mm et son module de flexion négligeable par rapport à celui de la feuille.

Une bandelette (ad) est donc collée à l'endroit de la feuille où l'on attend la formation de ce pli en suspens (figure 1.9 page ci-contre). Une seconde

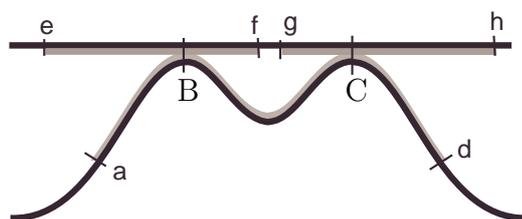


Fig. 1.9 – Dispositif de mesure résistive de la longueur du pli en suspens BC . Les bandelettes résistives sont représentées en grisé. Les potentiels des points a , d , e , f , g , h seront mesurés lors du passage d'un courant imposé entre les points e et h .

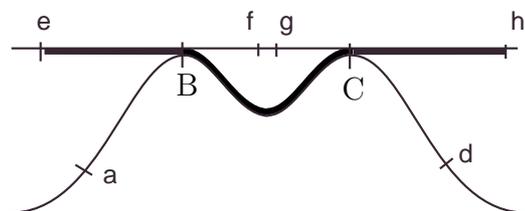


Fig. 1.10 – Schéma représentant le trajet du courant (en trait épais). Entre les points a et d , la différence de potentiel est la même qu'entre les points B et C , donc proportionnelle à la résistance de la portion BC , soit encore à la longueur du pli en suspens.

bandelette *coupée* en deux (ef - gh) est également collée sur la plaque contre laquelle le pli en suspens doit se former. Aux extrémités de ces bandes (aux points a , d , e , f , g , h sur la figure 1.9) sont soudées des lamelles de cuivre d'où partent les fils de mesure.

Un courant d'intensité constante 1 A est établi entre les deux demi-bandes résistives placées sur la plaque de compression grâce à un générateur de courant branché sur les points e et h . Comme ces deux bandelettes ne sont pas en contact, c'est par l'intermédiaire de la bande résistive placée sur la feuille que le courant va passer (son trajet est représenté sur la figure 1.10). La différence de potentiel entre les points a et d est la même qu'entre les points B et C , puisqu'aucun courant ne passe entre a et B , ni entre C et d . Ainsi la tension ad est-elle proportionnelle à la résistance de la portion BC , elle-même proportionnelle à la longueur du pli en suspens.

Il faut bien voir que ces différences de potentiel ne sont proportionnelles aux résistances que si on les mesure sur la même feuille, car les résistances

de contact peuvent perturber de beaucoup les mesures. On se tromperait par exemple si l'on espérait mesurer la longueur de la portion BC à l'aide de la tension fg. D'où l'intérêt des points de mesures a et d.

Les points f et g permettent cependant d'effectuer une mesure supplémentaire. En effet, la longueur eB le long de la plaque est proportionnelle à la tension ef (de même pour la mesure de la longueur Ch par la tension gh). Avec ces deux longueurs eB et Ch, connaissant la longueur eh, on peut en déduire la longueur BC *le long de la plaque cette fois, c'est-à-dire la distance* BC. Au total on peut estimer que la précision de ces mesures de longueur curviligne est de l'ordre du millimètre, pour des distances mesurées supérieures à 40 mm, c'est-à-dire une erreur relative de l'ordre de 3%, bien meilleure que celle qui pourrait être obtenue par traitement d'image.

1.1.6 Mesure de longueur de contact plan

Il sera également utile de mesurer la longueur d'un contact plan, et même la somme des longueurs des contacts plans. Malheureusement, la technique résistive ne peut s'appliquer ici car la feuille et la plaque restent précisément en contact tout le long.

La technique alternative de mesure employée ici est très simple, mais devient rapidement fastidieuse lorsque le nombre de plis augmente. Il s'agit de balayer la plaque de verre avec un faisceau laser. Celui-ci se trouve réfléchi deux fois par l'interface air-verre, mais aussi par la feuille elle-même. Ces trois réflexions sont observées sur un écran quelques dizaines de centimètres plus loin. Si la feuille est parallèle au plan d'écrasement, donc aux deux faces de la plaque de verre, les trois spots lumineux sont alignés. Ceci cesse d'être le cas dès que l'on se place en un point où la feuille fait un angle θ non nul avec la plaque. Le faisceau réfléchi par la feuille fait alors un angle 2θ par rapport à ceux réfléchis par la plaque de verre. À une distance d'observation d , les déviations sont ainsi de l'ordre de $2\theta d$, ce qui peut être grand à condition que d le soit. Typiquement, pour $d = 30\text{cm}$, une déviation de l'ordre du centimètre, facilement repérable, correspond à un angle de l'ordre de 0,03 radians, soit 1 degré. On obtient ainsi une localisation très précise du point de contact. On constate alors souvent que, dans le cas de contacts plans, celui-ci est assez éloigné de ce que l'on aurait pu juger à l'oeil.

En pratique (figure 1.11 page suivante), on utilise une diode laser fixée sur un chariot qui se déplace sur un axe parallèle à la direction x . Comme la position du chariot est repérée grâce à un régle, on peut mesurer les longueurs de contacts plans, avec une précision de l'ordre du millimètre.

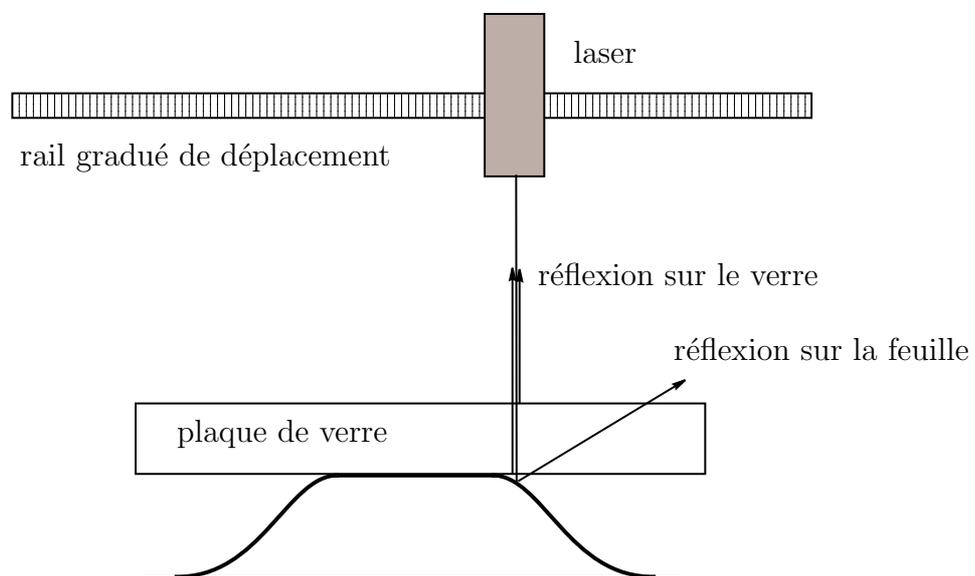


Fig. 1.11 – *La déflexion d'un faisceau laser permet de localiser le point de contact effectif avec la plaque de compression.*

1.2 DESCRIPTION THÉORIQUE : L'ELASTICA

Dans cette section, nous exposons la description théorique du système, dont l'élément principal, l'équation de l'*elastica*, due à Euler, est bien connue [1, 43, 37]. Nous avons jugé intéressant d'en détailler la déduction à partir de la minimisation de l'énergie élastique sous des contraintes géométriques, et d'en souligner certaines propriétés qui vont avoir des conséquences directes sur le système.

Nous cherchons à déterminer les états d'équilibre et les forces de réaction d'une feuille de longueur L , de largeur a et d'épaisseur h , enfermée dans une boîte de taille (X,Y) . Lorsque l'épaisseur h est petite devant les autres longueurs du problème, donc dans la limite des plaques minces, on peut décrire la plaque par sa surface médiane. Mais dans l'hypothèse où les plis ont une direction d'invariance (Oz), la géométrie de la surface est entièrement déterminée par son profil (intersection de la surface médiane avec un plan parallèle à Oxy). Le problème revient alors à trouver une équation d'équilibre pour cette courbe. Notons que la surface moyenne ne subit aucun étirement (elle reste développable en tant que surface cylindrique). De ce fait, il nous suffira de considérer une énergie de flexion².

1.2.1 Hypothèses et énergie de courbure

La densité linéique d'énergie de courbure admet un développement en puissance de la courbure $1/r$ (où r est le rayon de courbure) dont on ne conservera que le premier terme dans la limite des faibles courbures. Or, en l'absence de courbure spontanée de la feuille au repos, une courbure vers le haut ou vers le bas doivent conduire à la même énergie. Par conséquent celle-ci est une fonction paire de $1/r$. Pour ces raisons de symétrie, le premier terme du développement en faible courbure s'écrit donc $\mathcal{E} \propto 1/r^2$. Le coefficient de proportionnalité fait intervenir les caractéristiques du matériau (le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν) ainsi que celles de la feuille elle-même (h,a). Dimensionnellement, la densité linéique d'énergie ne peut alors s'écrire que sous la forme

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}EI(h,a,\nu) \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

où I a la dimension de la puissance quatrième d'une longueur, puisque E a celle d'une pression.

2. Des états faisant intervenir l'autre forme d'énergie élastique des plaques minces seront étudiés aux chapitres 4 et 5.

Les états d'équilibre sont ceux dont l'énergie élastique est minimale. En l'absence de contrainte sur le système, l'état d'équilibre est celui d'énergie nulle, et donc de courbure identiquement nulle : la plaque est plane. Pour décrire les états rencontrés dans nos expériences, il faut imposer les conditions géométriques suivantes : la taille X , la hauteur maximale Y , et la longueur L de la feuille. Nous allons maintenant les exprimer.

En notant s l'abscisse curviligne, et $\theta(s)$ l'angle que fait la tangente à la courbe au point d'abscisse s par rapport à l'horizontale Ox (figure 1.12), la courbure s'écrit simplement $1/r = d\theta/ds$. L'énergie de courbure s'écrit alors

$$E_c = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds$$

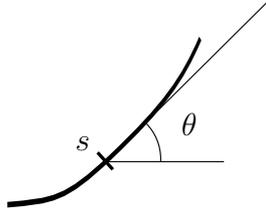


Fig. 1.12 – Définition de l'angle θ au point d'abscisse s .

Il s'agit donc de minimiser cette énergie de courbure sur l'ensemble des fonctions $\theta(s)$ qui vérifient les restrictions géométriques imposées à la feuille et que l'on peut écrire

$$\theta(0) = \theta(L) = 0, \quad (1.1)$$

$$\int_0^L \cos(\theta) ds = X, \quad (1.2)$$

$$\forall \hat{s} \in [0, L], \quad 0 \leq \int_0^{\hat{s}} \sin(\theta) ds \leq Y. \quad (1.3)$$

La résolution de ce problème n'est pas simple, notamment suite à la condition non-linéaire (1.3) qui exprime une inégalité [46], dont les bornes sont en général atteintes en plusieurs points de la fonction $\theta(s)$ (voir figure 1.13 page suivante).

1.2.2 Un problème simplifié : l'elastica.

Nous considérons donc le problème simplifié qui consiste à remplacer la condition 1.3 par

$$\int_0^L \sin(\theta) ds = Y. \quad (1.4)$$

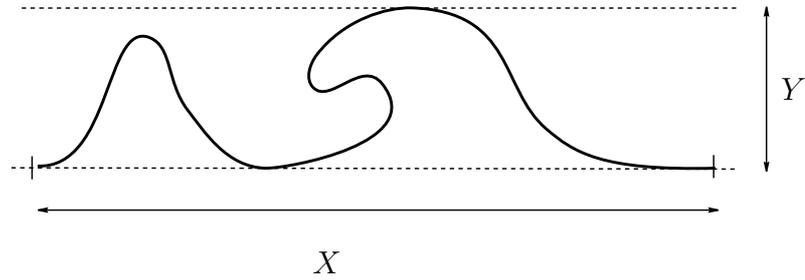


Fig. 1.13 – Un exemple de courbe satisfaisant les contraintes globales. L'état d'équilibre est celui qui, parmi celles-ci, minimise l'énergie de courbure.

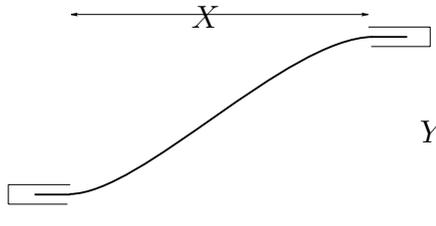


Fig. 1.14 – Conditions géométriques simplifiées : au lieu d'imposer la hauteur maximale de la solution (figure 1.13), on fixe la position des extrémités.

Ceci revient à fixer la position du point final (X, Y) par rapport au point initial (figure 1.14). Nous verrons que cela constitue une solution intermédiaire du problème représentant les formes connectant les deux plaques parallèles de compression.

Elastica et minimisation de l'énergie de courbure

De façon classique, nous associons deux multiplicateurs de Lagrange p, q aux contraintes (1.2, 1.4). La méthode de résolution est décomposée en deux étapes :

1. Minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{F} = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + p \left(\int_0^L \cos(\theta) ds - X \right) + q \left(\int_0^L \sin(\theta) ds - Y \right),$$

sur l'ensemble de toutes les fonctions $\theta(s)$, p et q étant fixés pendant cette minimisation. Les variations de \mathcal{F} s'écrivent grâce à une

intégration par partie (les termes de bords sont nuls suite aux conditions sur θ en $0, L$) :

$$\delta\mathcal{F} = \int \left(-EI \frac{d^2\theta}{ds^2} - p \sin(\theta) + q \cos(\theta) \right) \delta\theta ds.$$

Autour d'un état d'équilibre, $\delta\mathcal{F}$ doit alors être nulle au premier ordre, *quelle que soit la fonction* $\delta\theta$. Ceci conduit pour ces états à l'équation de l'*elastica*, attribuée à Euler (1744),

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -p \sin(\theta) + q \cos(\theta). \quad (1.5)$$

- Détermination de p et q de manière à satisfaire précisément les conditions (1.2,1.4).

Cette deuxième étape est loin d'être simple.

Elastica et équilibre mécanique local

Pour interpréter physiquement les multiplicateurs de Lagrange (p, q) , introduisons les notations suivantes (voir figure 1.15) : un point d'abscisse s définit une frontière entre deux parties de la courbe, celle à gauche notée \mathcal{C}_g (d'abscisse inférieure à s) et celle à droite, \mathcal{C}_d (d'abscisse supérieure à s). En ce point, \mathcal{C}_g exerce sur \mathcal{C}_d une force de composante horizontale $F(s)$ et verticale $G(s)$, mais aussi un moment de composante $M(s)$ selon Oz .

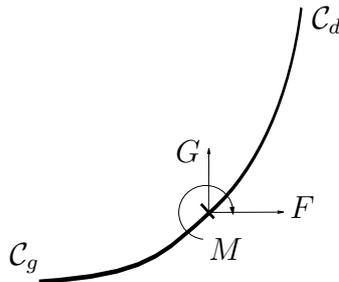


Fig. 1.15 – Définition des forces et moments.

Cherchons maintenant à relier les variations d'énergie élastique aux travaux de ces forces : considérons donc une variation de forme *quelconque* de la tige. La variation de l'énergie de courbure pour une portion située entre s_1 et s_2 s'écrit, $\delta E_c = EI \int_1^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} ds$, que l'on peut intégrer par partie pour donner :

$$\delta E_c = [EI \dot{\theta} \delta \theta] - EI \int \ddot{\theta} \delta \theta ds$$

(les termes de bords ne sont pas nuls en général car la variation de forme est quelconque). Lorsque la fonction $\theta(s)$ de départ est solution de l'équation de l'*elastica*, on en déduit une expression simple du second terme en fonction de p, q :

$$\delta E_c = [EI\dot{\theta}\delta\theta] - p\delta X - q\delta Y$$

Mais d'autre part, cette variation d'énergie est égale aux travaux produits par le moment M et les forces F, G aux points s_1 et s_2 , extrémités de la portion de tige considérée. Pour simplifier, prenons le point 1 fixe, en position et en angle $\theta(s_1)$. Les travaux sont alors nuls en ce point de sorte que

$$\delta E_c = M_2\delta\theta_2 - F_2\delta X - G_2\delta Y = EI\dot{\theta}\delta\theta_2 - p\delta X - q\delta Y.$$

L'égalité de ces deux expressions devant être valable pour tout $\delta\theta$, on peut identifier terme à terme et en déduire :

$$\begin{aligned} F &= p, G = q, \\ M &= EI\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Les multiplicateurs de Lagrange p, q s'interprètent donc comme les composantes de la force exercée sur la feuille à ses extrémités. Ainsi, comme p et q ne dépendent pas de s , F et G sont donc des constantes le long de la courbe.

D'après la dernière équation, le moment nécessaire pour imposer un rayon de courbure r (voir figure 1.16) est proportionnel à la courbure $1/r$. Ceci a été le point de départ d'Euler, modélisant une tige comme une ligne résistant à la courbure par un moment proportionnel à celle-ci. Cette vision est tout à fait équivalente à celle que nous avons exposée ici.

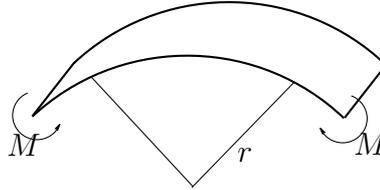


Fig. 1.16 – Le moment M nécessaire pour courber la tige selon un rayon de courbure r est $M = EI/r$.

En effet l'équilibre des forces sur un élément de courbe ds montre que F et G sont constants. D'autre part, en supposant simplement que $M = EI/r$, l'équilibre local des moments pour un élément de courbe ds (voir figure 1.17)

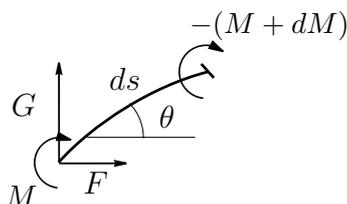


Fig. 1.17 – L'équilibre mécanique local d'un élément de brin permet d'obtenir directement l'équation de l'elastica.

impose que $M - (M + dM) - F \sin(\theta)ds + G \cos(\theta)ds = 0$, ce qui conduit à l'équation de l'elastica (1.5 page 25).

De façon générale, l'équation de l'elastica exprime ainsi l'équilibre mécanique d'une tige soumise à des forces (et éventuellement des moments) à ses extrémités, mais exempte de force volumique.

Calcul du coefficient I

Le coefficient I peut être déterminé à partir de la relation $M = EI/R$ dans deux cas limites, celui de la tige et celui d'une plaque infinie dans la direction Oz .

Dans la limite où la largeur de la feuille est très grande, on peut considérer que toutes les contraintes sont indépendantes de z . Dans la limite de faibles h/r , le moment $M(s)$ est calculé comme la résultante des moments élémentaires par rapport à la ligne neutre, intégrés sur l'épaisseur h de la feuille. Son existence résulte donc des variations des contraintes dans l'épaisseur qui présentent notamment un signe opposé de part et d'autre de la ligne neutre. En particulier, la résistance à la flexion s'avère effectivement résulter du fait que la feuille est étirée dans sa partie extérieure, et comprimée à l'intérieur de la courbure³. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, d'autant mieux vérifiée que h/r est petit, les variations de contraintes avec l'épaisseur peuvent de plus être prises linéaires. Sous ces hypothèses, on trouve bien une loi de proportionnalité entre le moment M et la courbure, de la forme 1.6 page ci-contre, avec

$$I = \frac{h^3 a}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1.7)$$

où ν est le coefficient de Poisson. On retrouve ainsi le coefficient $D = EI/a$ (module de flexion) qui intervient dans les équations (5.1 page 144) de Föppl-Von Kármán.

3. L'idée de compression et de dilatation de filaments avait déjà conduit Bernoulli en 1705 à une équation d'équilibre de tiges, d'après [43]

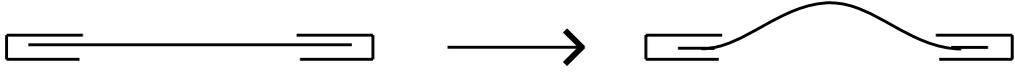


Fig. 1.18 – Flambage d'une tige sous conditions d'encastrement

Le même calcul pour une tige, c'est-à-dire lorsque la largeur a est très petite, se fait sous l'hypothèse d'une contrainte σ_{zz} nulle [37]. La section de la tige est alors déformée, et l'on obtient une relation du même type que 1.6), mais avec cette fois

$$I = \frac{h^3 a}{12}. \quad (1.8)$$

Ainsi la feuille de largeur infinie ne peut être considérée comme la limite d'une tige dont la largeur a serait de plus en plus grande, puisqu'on n'obtient pas le même coefficient I/a . Dans le cas des feuilles infinies dans la direction z , il existe en effet une contrainte σ_{zz} non nulle. Physiquement, elle provient du fait que la section de la feuille de largeur infinie n'est pas déformée comme le serait une tige (plus exactement, ces déformations auraient lieu sur des échelles de longueur de l'ordre de a , c'est-à-dire beaucoup plus grandes que les autres longueurs intervenant dans le problème). Cette différence de I/a est donc une illustration du couplage élastique entre les deux directions, par l'intermédiaire du coefficient de Poisson.

Instabilité de flambage

L'étude du flambage d'une tige, par Euler, a été historiquement la première étude de stabilité élastique. Le seuil de flambage d'une tige encastree est bien connu [37, 43, 66], mais il est intéressant de le rappeler ici car cette instabilité tient une place centrale dans le comportement du système étudié.

Considérons une tige soumise à une force horizontale p et encastree de telle sorte que l'angle $\theta = 0$ soit imposé à ses extrémités. Dans la limite des faibles angles, l'équation de l'*elastica* est linéarisée en

$$EI\ddot{\theta} = -p\theta.$$

Les solutions sont alors simplement des sinusoides $\theta(s) = A \sin(2\pi s/B + \varphi)$, dont la période B est donnée par $4\pi^2/B^2 = p/EI$. Les solutions non identiquement nulles vérifiant $\theta(0) = \theta(L) = 0$ n'existent que si $L = mB$, où m est un nombre entier. Cette constante correspond à la nécessité d'inscrire un nombre entier d'oscillations sur la longueur L de la tige. Pour un tel mode à m bosses, on obtient alors $p = 4\pi^2 EI(m/L)^2$.

Ainsi le premier mode neutre rencontré lorsque l'on augmente progressivement la force p est celui pour lequel $m = 1$, lorsque

$$p = 4\pi^2 EI/L^2. \quad (1.9)$$

En dessous de cette valeur, l'état plan (non flambé) est le seul qui existe, tandis qu'au dessus, celui-ci devient instable en faveur des états flambés. Ce flambage est ainsi un exemple très classique de bifurcation supercritique.

Lorsque l'on comprime une tige entre ses mains, on a souvent l'impression que le flambage se fait de façon brutale, donc sous-critique. En dehors des imperfections de planéité ou de compression qui modifient les réactions du système, cette impression s'explique par la grande disparité dans la raideur locale du système $k = -dp/dx$ avant et après le flambage. Cela provoque un "emballement" qui rend d'autant plus nécessaire d'éviter en pratique le flambage et qui par contre-coup a motivé beaucoup de recherches sur ce phénomène.

Dans le cadre de nos hypothèses, avant le flambage, la raideur serait même infinie, puisque la tige est incompressible (nous n'avons pas tenu compte de l'énergie de compression). En réalité pour une variation de longueur δL , $p \sim Eah(\delta L/L)$, donc $k \sim Eah/L$.

Après le flambage, les variations de longueurs sont de l'ordre de L , tandis que la force p est de l'ordre de EI/L^2 , d'où une raideur $k_f \sim EI/L \sim Eah^3/L^3$. Le rapport des raideurs est donc $k_f/k \sim (h/L)^2$, d'autant plus petit que la tige est plus fine.

1.2.3 Retour au problème initial

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à des courbes dont on avait fixé les extrémités de telle sorte qu'elles vérifient $\theta = 0$ à leurs extrémités, mais pour une extension latérale X et une hauteur Y . Revenons maintenant au problème initial, pour lequel on impose des conditions globales correspondant à une frustration géométrique (1.2, 1.3 page 23). Les solutions sont alors formées d'un ensemble de plis, eux-mêmes composés de branches dont seules les extrémités sont en contact avec une plaque de compression⁴. Dans le reste de cette étude, nous appellerons "brins" ces portions de plis, représentées en gras sur la figure 1.19.

Au cours de la compression la feuille est ainsi dans un état composé d'une suite de brins, dont le nombre est variable (figure 1.19 page suivante). Cependant, chaque brin étant à l'équilibre mécanique avec le reste de la feuille, il vérifie l'équation de l'*elastica*, pour des p, q donnés.

4. Dans le cas de contact plan, la portion en contact sera considérée comme faisant partie du brin.

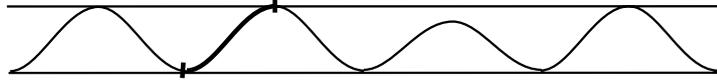


Fig. 1.19 – Un état à plusieurs plis est découpé en plusieurs branches qui joignent les deux plaques de compression : nous appellerons celles-ci “brins”.

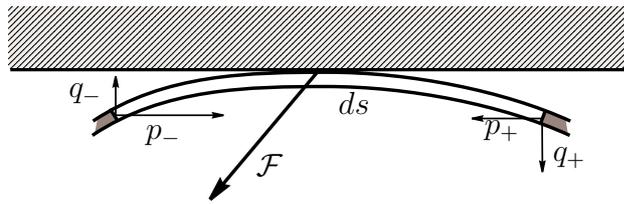


Fig. 1.20 – Au point de contact, la force totale \mathcal{F} exercée par la plaque est répartie sur les deux brins.

Ce découpage en brins effectué, précisons les interactions entre eux, c’est-à-dire en un point de contact. En ce point (voir figure 1.20) les parois exercent une force \mathcal{F} sur l’élément ds au contact, et son équilibre mécanique s’exprime alors par

$$\begin{aligned} p_- - p_+ + \mathcal{F}_x &= 0 \text{ projeté selon l'axe } Ox \text{ et} \\ q_- - q_+ - \mathcal{F}_y &= 0 \text{ selon l'axe vertical } Oy, \end{aligned}$$

où les indices $+$ représentent les quantités prises à droite de l’élément ds (et $-$ à gauche). On a de plus défini $\mathcal{F}_y = -\mathcal{F} \cdot Oy$ de manière qu’elle soit positive. Ces expressions jouent ainsi le rôle de conditions de passage pour p et q .

On supposera que le contact se fait *sans frottement*⁵. Ainsi \mathcal{F} est dirigée selon Oy . Il en résulte que $p_+ = p_-$. En projetant selon Oy , on trouve en revanche que $q_+ = q_- - \mathcal{F}_y$. Ainsi la force \mathcal{F} est responsable d’une discontinuité de q , donc d’une discontinuité de $\dot{\theta}$, d’après l’équation de l’*elastica* (1.5). En fait, parce que les *notations* ne sont pas invariantes par symétrie gauche-droite, q est positif sur les plis montants (car leur extrémité de gauche est sur la plaque du bas, donc subit une force q positive vers le haut), mais il est négatif sur les plis descendants (leur extrémité de gauche subit une force vers le bas de la part de la plaque du haut). Il faut aussi noter que pour les “plis en suspens”, qui sont des brins particuliers, la force q est nulle puisque ces plis ne sont pas contraints en hauteur.

5. Nous examinerons au § 2.5 la validité de cette hypothèse

On considère d'autre part que le contact ne peut communiquer de moment à la feuille (en l'absence de phénomènes d'adhésion), ce qui conduit à la continuité de M , donc de $\dot{\theta}$, au passage du point de contact.

Le découpage en brins permet ainsi de ramener le problème à celui de la détermination d'une famille de n (à déterminer) *elastica* obéissant aux contraintes suivantes :

- Conditions de passage aux points de contacts en l'absence de frottement:

$$\text{continuité de } p \quad (1.10)$$

$$\text{continuité de } \dot{\theta} \quad (1.11)$$

- Conditions globales : hauteur Y , taille *totale* X et longueur *totale* L imposées.

$$\Sigma x_i = X \quad (1.12)$$

$$\Sigma l_i = L \quad (1.13)$$

$$y_i = Y \text{ (si c'est un pli en suspens } y_i < Y, q = 0) \quad (1.14)$$

Les degrés de liberté sont importants, car sur chaque brin on a le loisir d'ajuster p, q , c'est-à-dire *les paramètres de l'équation de l'elastica*, ainsi que la condition initiale de la courbure au point de contact: $\dot{\theta}_0 = d\theta/ds(s=0)$.

Cependant, même dans le cas simplifié d'un seul brin (figure 1.14 page 24), on ne dispose pas d'expression de p, q ou $\theta(s)$ en fonction de la hauteur d'écrasement. Pourtant dans ce cas, les solutions de l'*elastica* peuvent s'exprimer analytiquement à l'aide d'intégrales elliptiques incomplètes (cf. Appendice A page 165), mais l'inversion de ces équations implicites pour (p, q, θ) est, à notre connaissance, impossible.

C'est pourquoi dans cette étude nous avons pris le parti, la plupart du temps, d'exploiter les propriétés de l'équation de l'*elastica* elle-même, plutôt que d'utiliser les expressions explicites qui sont difficiles à manipuler.

1.2.4 Propriétés utiles

Examinons maintenant quelques propriétés utiles de l'*elastica*,

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -p \sin(\theta) + q \cos(\theta).$$

Équation différentielle

L'*elastica* est une équation différentielle ordinaire autonome du second ordre. Ainsi la connaissance en un point s , des deux quantités $[\theta(s), \dot{\theta}(s)]$ suffit pour définir entièrement l'état à gauche et à droite de ce point.

C'est dire que la connaissance en un point de l'angle θ et de la courbure r suffisent à déterminer entièrement la forme de la feuille (sous réserve de connaître les paramètres p et q). En particulier, il n'y a pas de "mémoire" du système : l'information sur la forme avant le point s est totalement contenue dans l'état local. C'est ce qui rend efficace le découpage de la feuille en brins : l'état du n -ième brin ne dépend que des conditions de passage, indépendamment des conformations de la feuille sur les $n - 1$ premiers brins. Le problème de la minimisation de l'énergie de courbure, forcément global, est ainsi réduit à celui d'une famille de chaînons (les brins) interagissant à travers un petit nombre de paramètres.

L'*elastica* possède d'autre part des propriétés de symétries. Notons par exemple l'invariance par les transformations suivantes

$$s \longrightarrow s + s_0 \text{ et } s \longrightarrow -s,$$

desquelles nous déduirons des propriétés de symétries géométriques des brins.

Analogie cinématique

En fait, l'équation de l'*elastica* se ramène tout simplement à une équation de pendule *non-linéaire conservatif*, si l'on remplace l'abscisse curviligne s par le temps. Cette remarque est due à Kirchhoff [43], qui l'avait formulée dans le cadre plus général des déformations de tiges incluant la torsion [69, 67]. Si q est non nul, alors tout se passe comme si la gravité était inclinée par rapport au repère avec un angle $\bar{\theta}$ tel que $\tan(\bar{\theta}) = q/p$. Notons alors que la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{F} = Ec + pX + qY$ s'interprète dans ce cadre comme la minimisation de l'action $S = \int (T - U) ds$, où $T = EI\dot{\theta}^2/2$ est l'énergie cinétique (énergie de courbure) et $U = -p \cos(\theta) - q \sin(\theta)$ l'énergie potentielle.

Les formes prises par les plis sont donc directement reliées aux oscillations d'un pendule non-linéaire pesant qui sont, elles, bien connues. Les solutions peuvent en effet s'écrire à l'aide d'intégrales elliptiques incomplètes (Appendice A). Mais, comme on l'a noté plus haut, ces expressions formelles sont, en dehors de certains cas particuliers, difficilement utilisables.

En effet, dans le cadre de l'analogie avec le pendule, le problème revient à chercher le champ de gravité (p, q) ainsi que la vitesse initiale du pendule $\dot{\theta}(0)$, pour satisfaire

- la condition $\theta(0) = \theta(L) = 0$ qui s'interprète en imposant au pendule la position $\theta = 0$ au bout du temps L . C'est ici une condition de position *dans le futur* qui s'ajoute à la condition initiale $\theta(0) = 0$.

- les deux conditions de frustration géométrique qui s'expriment à l'aide d'intégrales de certaines quantités sur la trajectoire, et qui n'ont pas d'interprétation simple en terme de physique du pendule.

Ces deux types de conditions sont complexes et inhabituelles dans le cadre des oscillateurs. Nous nous appuyerons cependant sur cette analogie pour en déduire des propriétés de symétries naturelles dans ce cadre.

Lois de conservation

L'*elastica* possède une intégrale première, la quantité

$$H = EI \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - p \cos(\theta) - q \sin(\theta) \quad (1.15)$$

étant indépendante de s . Il suffit pour s'en convaincre de la dériver par rapport à s . Cela peut être vu comme le fait que l'énergie mécanique du pendule (énergie cinétique et énergie potentielle) se conserve au cours du temps.

D'autre part, l'intégration directe de l'*elastica* par rapport à s conduit, en notant $[x(s), y(s)]$ la position du point d'abscisse curviligne s ,

$$EI (\dot{\theta}(s) - \dot{\theta}(0)) = -py(s) + qx(s). \quad (1.16)$$

Il s'agit simplement de l'équilibre des moments de la portion de tige comprise entre les deux points d'abscisse s et 0 .

Ces deux intégrales premières seront utilisés fréquemment dans la suite de l'étude.

Géométrie et contraintes

Enfin, l'équation est adimensionnée sous la forme

$$\ddot{\theta} = -\hat{p} \cos(\theta) + \hat{q} \sin(\theta),$$

où $\hat{p} = p/EI$ et $\hat{q} = q/EI$. Puisque les conditions que l'on impose sont uniquement géométriques, il n'y a pas d'autre échelle de force dans le système que celle donnée par EI . De ce fait toutes les feuilles d'épaisseur, de largeur et de matériaux différents soumises aux mêmes contraintes géométriques prendront la même forme. Les forces mises en jeu seront simplement renormalisées par l'intermédiaire de EI en fonction de leur largeur a , épaisseur h , coefficient de Poisson ν et module d'Young E .

Cette dernière propriété de l'*elastica* facilite les choses du point de vue expérimental, puisque l'on peut choisir des matériaux ou des épaisseurs

différentes selon les régimes de manière à garder les forces étudiées dans la gamme de mesure, quitte à effectuer une opération de renormalisation.

En fait, à une mise à l'échelle près, les réponses *géométriques* ne seront fonction que de deux paramètres sans dimension, $\mathcal{R} = (L - X)/X$ l'excès de surface relatif, et Y/L , le taux d'écrasement.

Dans toute la suite de l'étude nous utiliserons cette équation adimensionnée en oubliant, pour ne pas alourdir l'écriture, de noter \hat{p} pour p .

1.3 CONCLUSION

Nous avons décrit le dispositif expérimental nous permettant d'obtenir des états formés d'un nombre n de plis de plus en plus grand par réduction de la hauteur disponible d'une feuille flambée.

La description théorique de ces états n'est pas simple. Il s'agit en effet de minimiser l'énergie de courbure sous des conditions géométriques *globales*. Le problème se ramène à celui de $2n$ *elastica* couplées par des conditions de raccordement et des conditions globales. Même pour un brin ($n = 1/2$) ce problème ne possède pas de solution analytique, mais seulement une expression implicite faisant intervenir des intégrales elliptiques incomplètes, dont l'inversion est difficile, voire impossible. Nous avons en revanche mis en lumière certaines propriétés de l'équation de l'*elastica* elle-même qui seront utiles dans la suite, notamment par leur incidence directe sur des caractéristiques géométriques globales du brin correspondant : ce sont des propriétés de symétrie, une analogie mécanique, et surtout deux intégrales premières.

2. PROCESSUS DE CRÉATION D'UN NOUVEAU PLI

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse au passage de 1 à 2 plis. Ce sera tout d'abord le moyen de tester la validité de l'*elastica* pour la description de plaques fortement courbées (invariantes dans une direction), en confrontant les expériences à des intégrations numériques. On exprimera ensuite les conséquences de cette validité sur le comportement du système. Enfin nous examinerons les limites possibles du modèle au point de contact avec les plaques de compression.

Le mécanisme de création d'un nouveau pli se décompose comme suit. Lorsque la hauteur est progressivement réduite, le contact avec la plaque du haut se fait selon une ligne pendant une gamme de hauteur (figure 2.1a). Puis ce contact devient plan (figure 2.1b). La zone de contact plan augmente avec l'écrasement, pour finalement *flamber*, et donner naissance à ce que nous appellerons un "pli en suspens" (figure 2.1c). Il s'agit d'un pli qui ne touche pas la plaque opposée. En revanche, sa flèche augmente à mesure que la hauteur Y diminue, pour l'amener à toucher l'autre plaque. On a ainsi créé un deuxième pli (figure 2.1d).

Nous ferons l'hypothèse que les plis sont formés de deux brins symétriques. De cette façon on ramène le problème de la détermination de l'état d'équilibre d'un pli au problème simplifié d'un seul brin, de longueur $L/2$ dans une boîte de taille $(X/2, Y)$. Nous montrerons plus loin pourquoi les symétries de l'*elastica* autorisent entre autres l'existence de ces plis symétriques puis nous justifierons au §2.5 le fait que ceux-ci sont bien les seuls naturellement rencontrés dans l'expérience.

Une grande partie de ce qui est exposé dans cette section est dispo-

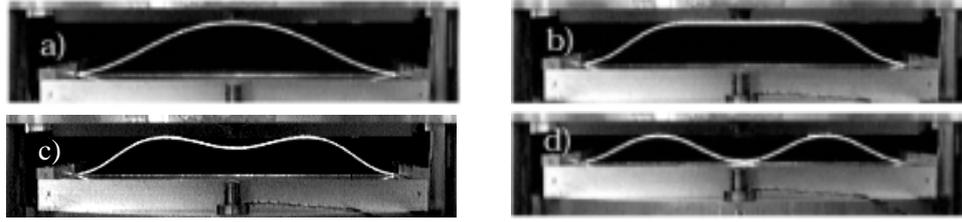


Fig. 2.1 – *Les formes prises par la feuille lors de la création d'un deuxième pli.*

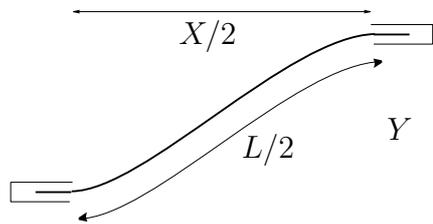


Fig. 2.2 – *L'hypothèse de symétrie ramène le problème de la détermination des états d'équilibres d'un pli à celui d'un brin*

nible dans l'article en appendice E. Aussi certains développements ne seront qu'ébauchés, le lecteur étant invité à s'y référer.

2.1 CONFRONTATION EXPÉRIMENTALE DE L'ELASTICA

L'*elastica* est utilisée dans beaucoup d'études sur les déformations de tiges [13, 16, 22, 23, 24, 31, 39, 46, 54, 70, 71, 72]. Cependant peu de travaux comparent précisément les prédictions de l'*elastica* aux expériences dans des domaines où les tiges sont très courbées. Dans la littérature récente, citons [49, 50] où l'*elastica* est en bon accord avec le diagramme d'équilibre expérimental [53] jusque dans des états très non-linéaires. Ici aussi nous allons mettre en évidence la pertinence de l'équation de l'*elastica* pour le cas qui nous intéresse, même en régime très non-linéaire. Celle-ci sera d'autant plus intéressante que certaines conditions de notre expérience seraient susceptibles de mettre en défaut l'*elastica*.

2.1.1 Les hypothèses du modèle

L'écriture de l'*elastica* repose sur plusieurs hypothèses. La première consiste à assimiler le comportement mécanique d'un objet tridimensionnel à celui d'une courbe plane résistant à la flexion par un moment proportionnel à celle-ci. Si cette démarche a fait ses preuves dans le domaine de tiges minces, il nous semble important de la tester dans le cas de plaques étendues. En particulier plusieurs questions se posent quant à l'application de l'*elastica* à ces dernières :

1. Quelle est la robustesse de l'état décrit par l'*elastica* pour des perturbations brisant l'invariance dans la direction z ? Cette question se pose notamment du fait que les déformations dans les différentes directions sont couplées par l'intermédiaire du coefficient de Poisson.
2. Puisque nous avons affaire à des feuilles, et non à des tiges, il ne faut pas négliger la possibilité de réapparition d'énergie d'extension, qui entre en jeu dès que le profil n'est plus développable. Ce serait le cas par exemple d'une imperfection des conditions aux limites.
3. Il est montré [37, 43] l'existence d'une loi de proportionnalité $M = EI/r$ entre le moment M et la courbure $1/r$ (tant que h/r est petit) dans le cas de tiges et dans le cas de feuilles infinies dans la direction z . Mais le coefficient I est différent dans les deux cas (voir § 1.2.2 page 27). Ceci signale-t-il une rupture de validité de l'*elastica* dans le régime intermédiaire ou simplement un ajustement du coefficient de proportionnalité I ?
4. Les forces qui s'appliquent sur la feuille sont supposées être transmises uniquement par contact. Ceci revient à négliger les effets de la gravité,

approximation légitime si l'énergie potentielle de pesanteur de l'ordre de $\rho g aLY$, est négligeable devant l'énergie de courbure $Eh^3 aLr^{-2}$, soit pour $E(h/r)^2/(\rho gY)$ grand. Ce sera bien le cas dans nos expériences.

5. Enfin la relation de linéarité de Hooke est supposée valide. Comme les contraintes maximales (sur les surfaces externes de la feuille) sont de l'ordre de Eh/r , cette condition sera d'autant mieux satisfaite que h/r est plus petit.

Remarque : les contraintes peuvent être décomposées en leur valeur moyenne sur l'épaisseur (dont les forces p et q sont la résultante) et en leur variation (linéaire) dans l'épaisseur, dues à la courbure $1/r$. Ces dernières sont alors responsables du moment M au point considéré. Celui-ci peut-il être indépendant de p, q ?

La loi $M = EI/r$ est généralement calculée [37] en l'absence de force p, q . et l'on suppose ensuite implicitement que I n'est pas fonction de p, q . En fait, il faut voir que l'ordre de grandeur des forces $p \sim EI/r^2$ correspond à des contraintes de l'ordre de $E(h/r)^2$, à comparer avec celles qui sont liées à l'extension et à la compression de part et d'autre de la ligne neutre $E(h/r)$. Il y a ainsi un facteur h/r petit entre les deux types de contraintes.

L'existence de forces p, q ne modifie donc que très peu les équilibres mécaniques internes de la feuille. Ceci légitime le fait que le coefficient I soit pris indépendant de p, q .

2.1.2 Confrontation directe

Confrontons les résultats expérimentaux à une intégration numérique de l'*elastica*.

Principe de l'intégration numérique

Le problème consiste à déterminer numériquement la forme $\theta(s)$ et les forces (p, q) correspondant à un brin de longueur $L/2$ et d'extension $(X/2, Y)$ (voir figure 2.2 page 38). Nous utilisons pour cela une méthode de tir, que nous allons maintenant détailler. Ce type de technique est très classique et son utilisation dans le cadre de la résolution de problèmes similaires n'est pas nouvelle [24, 50, 54, 71]. Il illustre cependant bien ici la façon dont les degrés de liberté du système sont utilisés dans les différentes phases de compression.

Déterminons tout d'abord une solution flambée non encore comprimée verticalement. La force verticale est donc nulle $q = 0$. Cherchons alors une force p et une condition initiale $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$ permettant de vérifier les conditions globales. Pour cela, intégrons pour un choix de $(p, \dot{\theta}_0)$ l'équation de l'*elastica* jusqu'à $s = L/2$. Le problème revient alors à ajuster ces choix initiaux pour obtenir $\theta(L/2) = 0$ et $x = X/2$. Ceci se réalise assez simplement

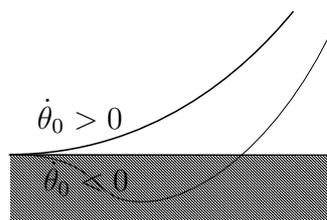


Fig. 2.3 – Une courbure initiale $\dot{\theta}_0$ négative est interdite par la présence de la plaque de compression inférieure. De façon symétrique, la courbure doit être négative au point de contact avec la plaque supérieure.

numériquement par une procédure de Newton [59]. En particulier, il suffit de partir d'un choix raisonnable pour converger rapidement vers la solution recherchée.

Dans une première phase de compression, il est naturel de rechercher une solution contenant un contact ponctuel. Pour cela, partant d'une donnée initiale de $(p, q, \dot{\theta}_0 = 1/r_0)$, l'équation différentielle de l'*elastica* est intégrée jusqu'à la longueur $s = L/2$. Les choix sont alors modifiés afin qu'en ce point on ait $\theta = 0$, $x = X/2$ et $y = Y$.

L'évolution qualitative du système apparaît bien similaire à celle de l'expérience. En effet au fur et à mesure que l'on diminue la hauteur, la courbure $1/r_0 = \dot{\theta}_0$ diminue elle aussi jusqu'à devenir nulle, puis négative. On ne peut cependant admettre de tels états à courbure initiale négative à cause de la présence de la plaque de compression (voir figure 2.3).

Il faut alors supposer un contact plus étendu que le contact ponctuel précédent pour continuer la compression : c'est un contact plan. Désormais, on commence forcément avec une courbure nulle $\dot{\theta}_0 = 0$, mais en contrepartie, on autorise une portion du système à rester en contact sur une longueur ajustable l_p avec la plaque de compression. La méthode de tir doit donc être modifiée : pour un triplet (p, q, l_p) , l'équation est intégrée jusqu'à la longueur $s = L/2 - l_p$, puis le triplet est ajusté jusqu'à ce qu'en ce point on obtienne $\theta = 0, y = Y, x = X - l_p$. Il faut bien noter que ces solutions sont recherchées par une procédure, certes apparentée, mais néanmoins différente de la précédente du fait du changement de triplet d'ajustement. Cette solution à contacts plans existe ensuite quelle que soit la hauteur Y à laquelle on comprime le système.

En réalité, certains de ces états contiennent des contacts plans qui sont instables vis à vis du flambage, leur longueur étant trop grande par rapport à la force latérale à laquelle ils sont soumis (§1.2.2). On recherche alors une solution contenant un pli flambé. De telles solutions existent effectivement :

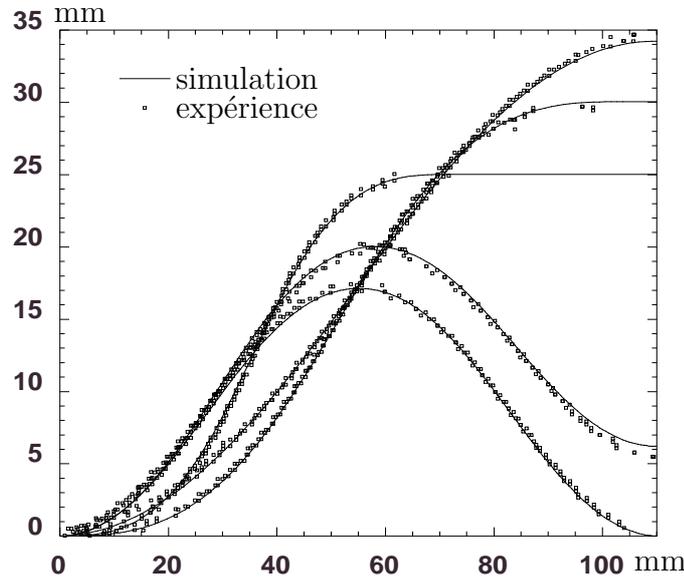


Fig. 2.4 – Comparaison des formes de plis avec l'intégration numérique de l'équation de l'elastica, pour des feuilles avec $X = 220,5$ mm, $L = 233,3$ mm, donc $\mathcal{R} = 5.8\%$, pour des hauteurs $Y = 34,5$ mm; 30 mm; 25 mm; 20 mm et 17 mm.

elles correspondent aux états contenant un pli en suspens. Cette fois il faut résoudre deux *elastica* couplées, une pour les brins, et une pour le pli en suspens. Les contraintes sont encore une fois différentes, et les degrés de liberté aussi.

Ainsi le comportement qualitatif à la compression est-il bien décrit par l'*elastica* : après une phase de contact ponctuel, vient une phase de contact plan puis dans certains cas, flambage vers un état contenant un pli en suspens.

Comparaisons sur les formes

Comparons maintenant les formes obtenues par simulation aux formes obtenues expérimentalement (voir les figures 2.1 page 38). Sur la figure 2.4 sont représentées les courbes obtenues par intégration numérique de l'*elastica* et, pour les mêmes conditions globales, les formes obtenues par digitalisation d'images prises par la tranche. Un excellent accord est obtenu. En réalité, la superposition des courbes est quasiment parfaite à un décalage près (que l'on a éliminé sur la figure) dans le cas des contacts plans. Celui-ci peut s'expliquer par une imperfection minimale dans les conditions aux limites mais dont l'effet se révèle important (voir l'article en appendice E.5 pour plus de

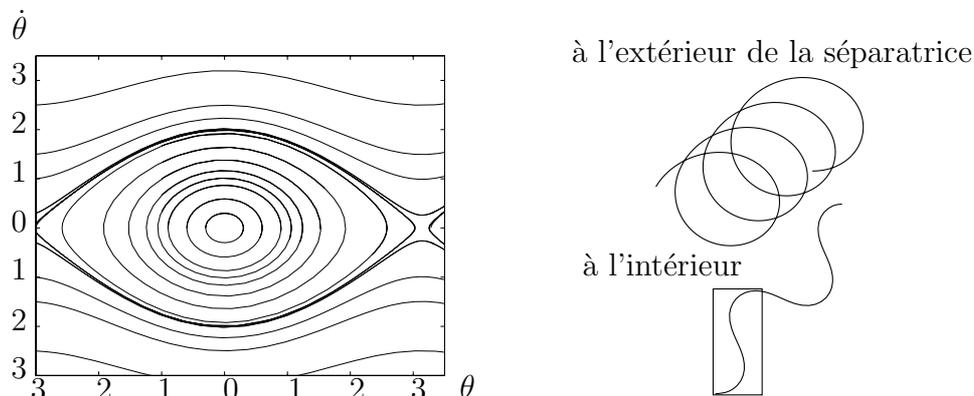


Fig. 2.5 – Portrait de phase de l'oscillateur (pour $p = 1$ et $q = 0$) et solutions correspondante de l'elastica.

précisions).

Diagramme de phase

Testons maintenant la validité de l'*elastica*, non pas sur les formes, mais sur l'équation elle-même. En effet, connaissant la mesure en tout point s de l'angle $\theta(s)$ et de la courbure $\dot{\theta}(s)$, nous pouvons directement tracer le point $(\dot{\theta}, \theta)$ dans l'espace des phases, et obtenir ainsi un portrait de phase.

D'après l'analogie de Kirchhoff des formes de tiges avec le mouvement d'un pendule, les solutions seront des portions de trajectoire d'un pendule à déterminer. Le portrait de phase du pendule, en "oeil de chat" est bien connu. On peut distinguer deux types de trajectoires, celles qui sont ouvertes (trajectoires de libration du pendule) et celles qui sont fermées, à l'intérieur de la séparatrice.

Les trajectoires ouvertes ont une vitesse, c'est-à-dire pour la plaque une courbure, qui ne s'annule jamais. En terme d'*elastica*, elles correspondent à des courbes qui s'enroulent indéfiniment comme sur la figure 2.5. Elles ne peuvent correspondre à nos expériences, car les brins doivent connecter deux points de même angle $\theta = 0$ et de courbures de signes opposés. Les solutions représentatives de l'expérience sont donc à rechercher parmi les trajectoires effectivement fermées (la séparatrice est écartée car elle se referme en un temps – donc une longueur – infinie).

Il faut garder en mémoire que les conditions aux limites imposent $\theta = 0$, mais pas l'inclinaison de la gravité. Celle-ci sera de fait différente pour chacun des plis rencontrés au cours de l'écrasement, générant pour chacun d'eux un diagramme de phase de pendule différent.

Un contact plan correspond à un décollement avec une courbure nulle

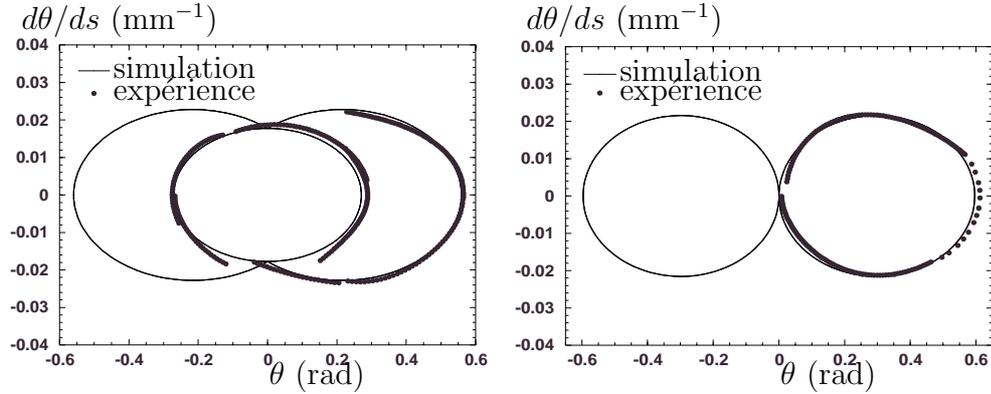


Fig. 2.6 – Diagramme de phase : à gauche pour un état contenant un pli en suspens ($Y = 22$ mm), à droite pour un état à contact plan ($Y = 25$ mm).

(voir page 31 pour les conditions de raccordement), donc un point $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$. La trajectoire sera donc tangente à l'axe des ordonnées. Ce ne sera pas le cas d'un brin avec contact ponctuel, qui décolle avec une courbure θ_0 non nulle. Un pli en suspens vérifie toujours $q = 0$, (sa hauteur n'étant pas contrainte). Ceci montre que le point $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$ est alors le point d'équilibre (la gravité est verticale), autour duquel les trajectoires effectuent un parcours symétriques dans le diagramme de phase.

Les mesures par traitement d'image sont délicates. La courbure exige en effet l'utilisation de la dérivée seconde d^2y/dx^2 . Plutôt que d'effectuer des dérivées par différences finies, nous approximons par portions la courbe par un polynôme sur lequel on opère ensuite exactement les calculs de dérivée. Sur les figures 2.6 est représenté le diagramme obtenu, dans le cas d'un état contenant un pli en suspens, et dans celui d'un contact plan. Les lignes continues correspondent aux résultats de l'intégration numérique. On constate que les trajectoires expérimentales (représentées par des points) en sont proches.

Force de réaction

Nous avons mesuré expérimentalement la force verticale F de réaction du pli lorsqu'il est comprimé. D'après l'hypothèse qu'il est formé de deux brins symétriques, on peut en déduire que $F = 2q$. Sur la figure 2.7 sont représentées les mesures expérimentales et les résultats de la simulation de la force verticale de réaction. Ces derniers sont dimensionnés en utilisant $E = 200$ Gpa et $I = ah^3/12$, comme pour une tige. Un bon accord est encore

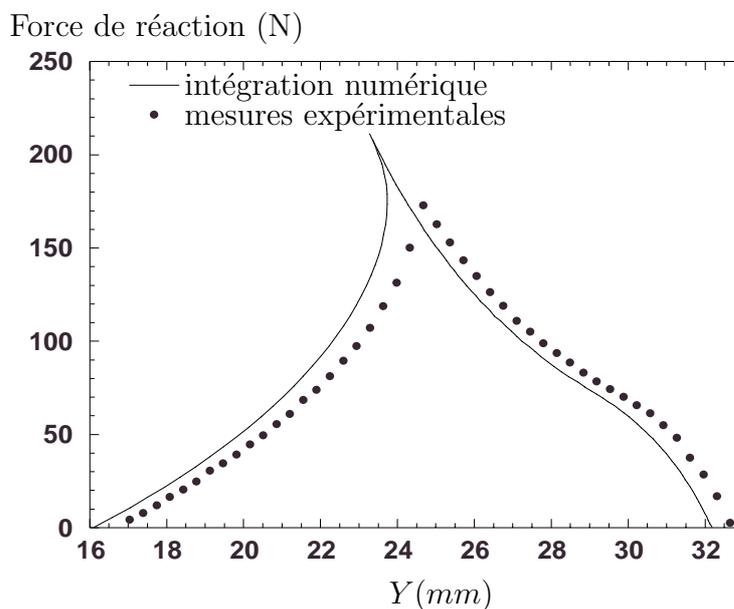


Fig. 2.7 – Force de réaction (en Newton) en fonction de la hauteur Y (mm) pour une feuille d’acier ($E \sim 200$ Gpa) d’épaisseur $h = 0,1$ mm avec ($\mathcal{R} = 5,15\%$). Les lignes continues représentent le résultat de l’intégration numérique, en bon accord avec les mesures expérimentales (\bullet). La force augmente au cours de la compression, puis diminue de façon peu intuitive, jusqu’à s’annuler pour $Y \sim 16.5$ mm, lorsque deux plis se trouvent formés.

obtenu entre expérience et simulation.

Remarquons que la force mesurée augmente dans une première phase, comme un ressort que l’on comprime, mais diminue ensuite jusqu’à s’annuler. Nous reviendrons sur cette réponse mécanique surprenante et en donnerons une explication physique au chapitre 3. Ce coefficient de compressibilité négatif entraînerait des instabilités de la hauteur si elle n’était pas fixée, donnant lieu à phénomène similaire à celui de “snap-through” [33, 34] observé sur des des tiges naturellement courbées (lames à ressort) que l’on comprime. Ces instabilités sont d’ailleurs effectivement observées dans les expériences où le paramètre de contrôle est la force [50, 53]. De manière générale, il convient de prendre la hauteur comme paramètre de contrôle pour pouvoir observer cette famille d’états qui, à volume non fixé, sont instables .

2.1.3 Conclusion

Il ne subsiste donc plus de doute quant à la validité de l'équation de l'*elastica*. D'une part, elle inclut bien qualitativement la suite d'événements, dont le flambage et le post-flambage, qui conduisent à l'apparition d'un nouveau pli. D'autre part, quantitativement, les prédictions de formes des plis et de force de réaction sont remarquablement bien suivies expérimentalement.

Notons cependant que la valeur exacte de I à prendre dans cette description reste inconnue pour cette plaque qui n'est ni une tige, ni une plaque infinie dans la direction z . On pourrait sans doute améliorer l'accord obtenu sur la figure 2.7 en prenant une autre valeur pour I , et trancher ainsi sur la valeur exacte de ce coefficient dans le cas intermédiaire de plaque quasi-carrées. Malheureusement, connaissant le meilleur coefficient EI , la mauvaise précision sur E ne permettrait pas d'en déduire la valeur exacte de I .

2.2 PROPRIÉTÉS EXACTES DES PLIS

Si l'équation de l'*elastica* s'applique avec une remarquable précision aux expériences, il reste difficile d'en déduire les propriétés mécaniques de la compression des plis autrement que numériquement. La difficulté réside dans le type de conditions de compression que l'on impose, à savoir des conditions globales qui contrastent avec la nature différentielle de l'équation elle-même.

Dans cette section, nous montrons qu'il est possible d'utiliser les propriétés de l'équation de l'*elastica* pour en déduire certains résultats importants sur les plis : propriétés de symétrie géométrique des brins, existence d'un mode neutre jouant un rôle important dans le système et relation géométriques exacte sur les plis "libres." Nous noterons ici x la taille du brin, y sa hauteur et l sa longueur.

2.2.1 Propriétés de symétrie des brins

Examinons maintenant différentes propriétés d'invariance de l'*elastica* dont les conséquences se retrouvent sur les symétries des brins. Ces dernières peuvent être vues comme les analogues des symétries d'oscillations d'un pendule. Rappelons cependant que l'*elastica* étant une équation autonome du second ordre, la donnée de 2 conditions initiales suffisent à déterminer la suite d'un pli. Cette propriété classique s'avérera essentielle dans la suite de ce paragraphe.

Symétrie centrale autour d'un point d'inflexion

Puisque la courbure est positive à une extrémité du brin puis négative à l'autre, elle doit s'annuler entre les deux : il existe donc forcément un point d'inflexion s_i . D'autre part, comme l'*elastica* est une équation autonome du second ordre, elle satisfait à l'invariance par

$$s \longrightarrow -s \text{ et, pour tout } s_0, s \longrightarrow s + s_0.$$

Arrivé au point d'inflexion s_i , la fonction $\theta(s) = \theta(2s_i - s)$ convient alors comme prolongation pour $s > s_i$. En effet, elle est bien solution de l'*elastica*, et commence en $s = s_i$ par les bonnes conditions initiales : c'est donc la solution qui prolonge le demi-brin après le point d'inflexion. Elle vérifie alors $\theta(s = 2s_i) = \theta(0) = 0$, ce qui montre qu'elle est décrite en entier jusqu'au contact suivant. Ainsi le point d'inflexion est un point de symétrie centrale du brin (figure 2.8), et se trouve donc à mi-hauteur, mi-largeur, et mi-longueur de celui-ci ($s_i = l/2$). Dans le cadre de l'analogie avec un oscillateur, il correspond ainsi au point d'angle maximum, où la vitesse s'annule avant de

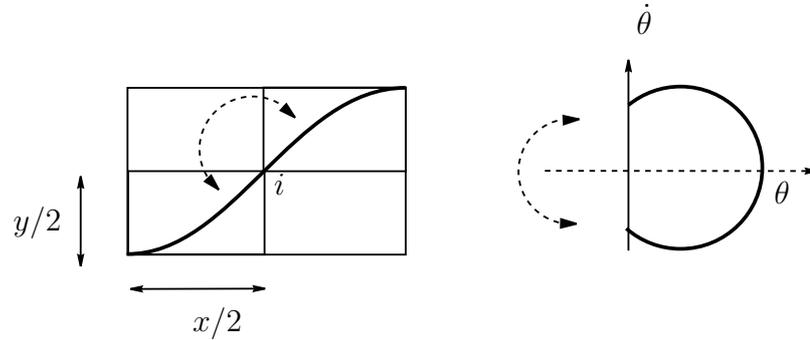


Fig. 2.8 – Les brins sont symétriques par rapport à leur point d'inflexion i . Cette symétrie apparaît très clairement sur le diagramme de phase, ainsi que dans l'analogie avec un oscillateur.

changer de signe. Les deux courbes qu'il sépare sont ainsi symétriques, de la même façon que la montée et la descente sont symétriques pour l'oscillateur.

Symétrie des brins à contact plan

Dans le cas particulier où le contact est plan, $\dot{\theta}_0 = 0$, une symétrie supplémentaire apparaît. Elle est tout à fait évidente sur le diagramme de phase (figure 2.9). Dans ce cas $s = 0$, comme $s = l/2$, est un point d'inflexion, donc un point de déviation maximale pour les oscillations du pendule associé (la vitesse angulaire y est nulle). Le demi-brin $s \in [0, l/2]$ correspond ainsi à une demi-période *complète* entre ses points de déviation extrémales. La symétrie gauche-droite du pendule autour de son point d'équilibre se traduit alors pour le demi-brin par une symétrie par rapport à la droite perpendiculaire à la tangente au point $s = l/4$ (figure 2.9). Ce dernier point d'angle $\bar{\theta}$ correspond par symétrie à un maximum de la courbure et vérifie donc d'après l'équation d'Euler $\tan(\bar{\theta}) = q/p$. Cette symétrie montre accessoirement que $\theta(l/2) = 2\theta(l/4) = 2\bar{\theta}$, dont nous verrons une interprétation géométrique plus loin (figure 2.12 page 52).

Existence de plis symétriques

Montrons ici que les plis symétriques existent, c'est-à-dire que le symétrique d'un brin dans un miroir est encore un brin, et que ces deux brins sont connectables entre eux.

L'*elastica* est invariante par chacune des deux transformations

$$s \longrightarrow L - s$$

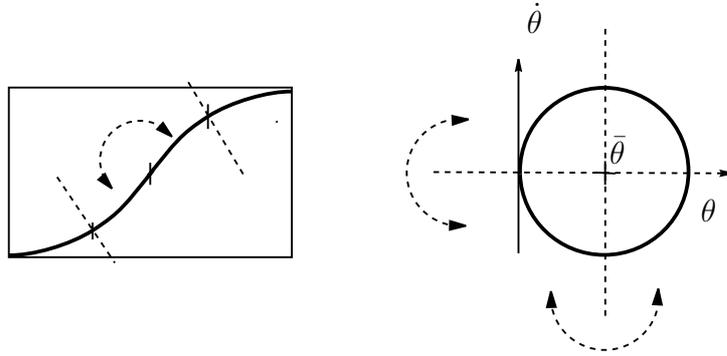


Fig. 2.9 – Si le contact est plan, chaque demi-brin possède une symétrie axiale supplémentaire. Cette symétrie supplémentaire est bien visible sur le diagramme de phase.

$$(\theta, q) \longrightarrow (-\theta, -q).$$

Partons d'un brin pour lequel on a $x = X$, $y = Y$ et $l = L/2$. Au point de contact $s = L/2$, on peut donc prolonger la solution par $\theta(s) = -\theta(L - s)$ si on prend garde de changer q en $-q$. En effet, cette fonction est alors bien à nouveau solution de l'*elastica* d'après ces deux propriétés d'invariance. D'autre part, la solution prolongée vérifie bien $\theta = 0$ pour $s = L/2$ ainsi que la continuité de la courbure et de p . Cela signifie qu'un brin peut être prolongé par son image dans une réflexion d'axe vertical, à condition de changer q en $-q$, c'est-à-dire de fournir une force verticale $F = 2q$ (§ 1.2.3 page 29). C'est ce qui autorise l'existence de plis symétriques, du moment que la plaque de compression est capable de fournir la force F requise.

2.2.2 Lois de conservation

Nous utilisons ici les deux lois de conservation (voir 1.15, 1.16 page 33) vues plus haut

$$\begin{cases} H &= \dot{\theta}^2/2 - p \cos(\theta) - q \sin(\theta) \\ M &= \dot{\theta} + py(s) - qx(s) \end{cases} \quad (2.1)$$

le long d'un brin. L'une correspond à la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps pour le pendule, l'autre à l'équilibre global des moments sur le brin.

Équilibre global des moments

La conservation de H entre les deux extrémités du brin, pour lesquelles $\theta = 0$, conduit immédiatement à l'égalité de leur $\dot{\theta}^2$. D'après les remarques

ci-dessus sur les signes respectifs des courbures au point de contact (voir 2.3 page 41), leurs signes sont en fait opposés. Ce résultat se généralise à tous les couples de points ayant le même angle θ et peut aussi être vu comme une conséquence des propriétés de symétries par rapport au point d'inflexion.

En appliquant maintenant la conservation de M entre les deux points de contact du brin, il vient

$$\dot{\theta}_0 = \frac{py - qx}{2}. \quad (2.2)$$

Cette relation nous sera très utile, car elle lie directement les quantités géométriques globales qui nous intéressent (x, y, l) aux paramètres de l'*elastica* $(p, q, \dot{\theta}_0)$.

Cas des contacts plans

On se restreint dans ce paragraphe aux brins commençant avec un contact plan ($\dot{\theta}_0 = 0$). D'après ce qui précède, ceux-ci se terminent aussi par une courbure nulle, de sorte que le contact à l'autre extrémité est également plan.

Considérons alors la transformation qui consiste à échanger de la longueur entre le contact du bas et celui du haut (figure 2.10). Le nouvel état obtenu est

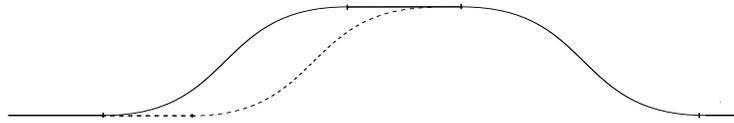


Fig. 2.10 – Si l'un des contacts est plan, l'autre l'est aussi. Il est alors possible d'échanger de la longueur entre les deux contacts sans modifier l'énergie élastique de l'ensemble (dégénérescence).

ainsi simplement constitué du même brin, déplacé latéralement, et de deux contacts plans dont la somme des longueurs est restée constante. Ainsi ni la longueur totale, ni la taille X , ni la hauteur Y n'ont changé. D'autre part, cet état possède la même énergie de courbure que l'état de départ, celle stockée dans le brin, l'énergie des plans étant nulle. Cette transformation continue d'échange de longueur d'un contact à l'autre est donc neutre vis-à-vis de l'énergie.

Expérimentalement, il est bien possible de modifier ainsi la répartition des longueurs de contacts en déplaçant un brin avec une tige rigide.

Grâce aux lois de conservation, nous avons ici mis en évidence un mode neutre global qui peut s'exprimer dès qu'un contact devient plan. Les nouveaux états créés sont ainsi indiscernables du point de vue de l'*elastica*. Pour

simplifier l'étude, nous avons alors ramené dans la suite du chapitre tous les contacts en un seul, qui totalise ainsi toute la longueur de plat disponible.

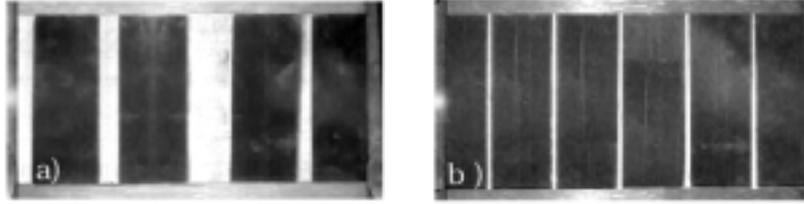


Fig. 2.11 – Visualisation par le dessus d'un état à contact plan (à gauche : a) et à contact linéique (à droite : b). Les zones de contact avec l'une des plaques sont en clair. Soit les contacts sont tous plans, soit aucun ne l'est.

Ce résultat se généralise facilement à un état formé de n plis et sera utile au chapitre suivant : tous les contacts avec chacune des deux plaques sont donc plans, et on peut de même échanger de la longueur entre tous les contacts des n plis. Nous verrons alors quelle importance ce mode neutre peut avoir dans l'évolution mécanique du système.

D'autre part, toujours dans le cas de contacts plans, l'équation (2.2) montre, puisque $\dot{\theta} = 0$, que

$$py = qx,$$

où y représente la hauteur du brin et x sa longueur hors contact plan. En particulier, pour revenir aux propriétés de symétrie du brin à contact plan, cela impose $\tan(\bar{\theta}) = q/p = y/x$. Ainsi $\bar{\theta}$ n'est autre que l'angle de la diagonale de la boîte. Il en ressort les propriétés géométriques résumées sur la figure 2.12 page suivante.

Plis "libres" : flambage non-linéaire

Considérons le cas des plis "libres" créés initialement avant tout écrasement : $q = 0$. Nous allons utiliser les deux lois de conservation conjointement.

Entre le point de départ ($\theta = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = 1/r_0$) et le point d'inflexion ($\theta = \theta_i, \dot{\theta} = 0$), les deux lois de conservation montrent que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0^2/2 - p &= -p \cos(\theta_i) - q \sin(\theta_i) \\ \dot{\theta}_0 &= (-pY + qx)/2. \end{aligned}$$

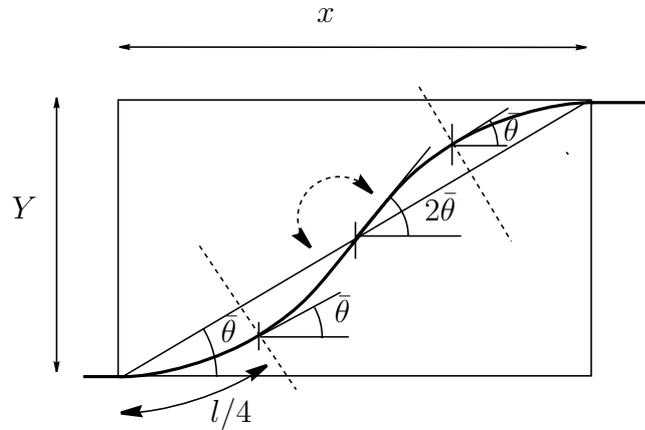


Fig. 2.12 – Les symétries et propriétés géométriques d'un brin dont les contacts sont plans. L'angle de la tangente au point d'inflexion est égal à 2 fois l'angle de la diagonale de la boîte, qui est aussi celui atteint au quart et au trois quarts de la longueur du brin.

Injectons dans celles-ci la valeur particulière $q = 0$. Le paramètre p est alors éliminé en

$$\sin^2(\theta_i) = \frac{Y}{8r_0}, \quad (2.3)$$

où r_0 est le rayon de courbure au point de contact (ou au sommet).

Cette loi est intéressante car elle est uniquement géométrique, et n'est entachée d'aucune approximation. En particulier elle contient toutes les non-linéarités géométriques qui font saturer l'instabilité de flambage.

Nous l'avons testée par traitement d'images sur une large gamme de plis. Les extrémités d'une bandelette de polycarbonate de longueur variable sont placées chacune dans deux mâchoires dont la distance est fixe. Lorsque la longueur augmente, les formes s'éloignent de plus en plus de la forme initiale plane. Sur les images de ces formes, un traitement permet de repérer l'angle θ_i au point d'inflexion, la hauteur Y du pli, ainsi que le rayon de courbure r_0 au sommet. Les résultats obtenus sont placés sur la figure 2.14. La relation (2.3) est très bien suivie par les points expérimentaux, même si les états sont très déformés. Notons l'absence de tout paramètre ajustable dans cette comparaison.

2.2.3 Tiges, gouttes et ménisques

De façon inattendue, l'équation de l'*elastica* décrit aussi la forme d'interfaces liquides ayant une direction d'invariance, à la proximité d'une paroi



Fig. 2.13 – *Photo de plis libres les plus courbés. Si l'on augmente encore l'excès de surface, un contact entre les deux branches apparaît, ce qui exige une modélisation différente.*

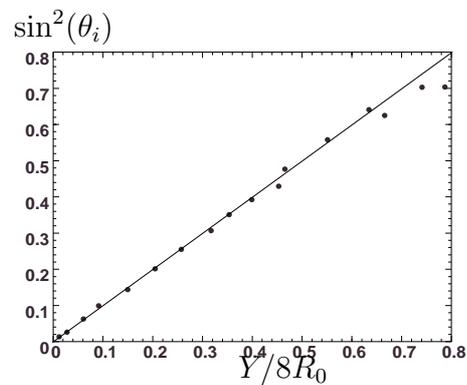


Fig. 2.14 – *La vérification expérimentale (●) de la relation 2.3 page ci-contre (ligne continue) est excellente, aussi bien sur des états faiblement non-linéaires, que sur des plis extrêmement éloignés de leur état de repos (voir la figure 2.13)*

et en présence de gravité (ménisques ou gouttes cylindriques). Dans ce domaine, une autre intégrale première est naturellement rencontrée, dont nous rapportons l'exposé, ainsi que sa traduction pour notre problème d'élasticité, dans l'appendice B.

En effet, une interface de courbure moyenne $\gamma = (1/r_1 + 1/r_2)$ possédant une tension de surface σ est associée d'après la loi de Laplace [38] à une différence de pression $\delta p = \sigma\gamma$. L'équilibre de celle-ci avec la pression hydrostatique relie alors la hauteur de fluide à la courbure de l'interface.

Si l'on considère maintenant une interface ayant une direction d'invariance (par exemple un ménisque entre deux plaques parallèles placées à la surface d'un grand réservoir de fluide, ou bien une goutte bidimensionnelle), le problème se ramène à celui de déterminer la forme d'une courbe. Avec nos notations (figure 2.15 page ci-contre), la courbure s'écrit alors $\gamma = d\theta/ds$, de sorte que l'équilibre hydrostatique impose

$$\frac{d\theta}{ds} - \frac{\rho g}{\sigma} y(s) = \text{Cte}, \quad (2.4)$$

où ρ est la différence de densité entre le fluide inférieur et supérieur, et y la hauteur du point de l'interface considérée. Ceci n'est autre que l'intégrale première de l'*elastica* pour $p = -\rho g/\sigma$ et $q = 0$. On peut ainsi retrouver cette dernière en dérivant la relation (2.4) par rapport à s :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{\rho g}{\sigma} \sin(\theta)$$

Il faut noter que si l'on retrouve ici l'équation de l'*elastica*, ce n'est pas pour les mêmes raisons physiques que précédemment: en effet, l'*elastica* ne résulte pas ici des propriétés élastiques internes de l'interface, mais de l'équilibre de celle-ci (tension de surface) et du milieu qui l'entoure (hydrostatique) en présence de gravité.

Conditions globales et aux limites

Les conditions imposées sont cependant assez différentes de notre problème élastique.

- La force $p = -\rho g/\sigma$ est en effet fixée ici par la nature des fluides. Ceci constitue une grande simplification par rapport à l'élasticité. En particulier cela permet de définir une distance a caractéristique du problème, la longueur capillaire, qui vérifie $a^2 = \sigma/\rho g$. D'autre part il faut noter qu'elle est négative si le fluide lourd est au dessous du fluide léger (ménisque, goutte posée).

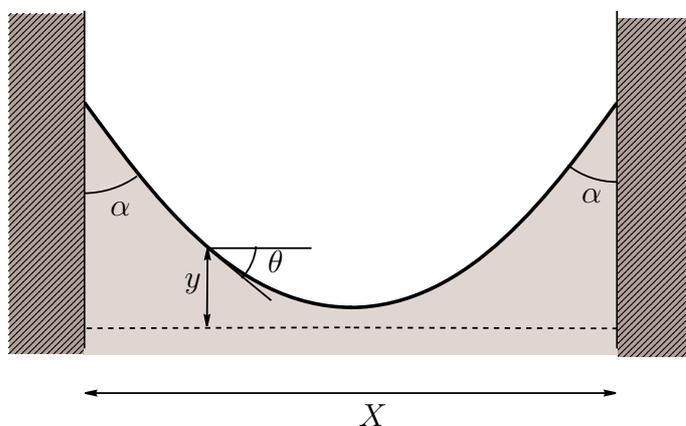


Fig. 2.15 – La forme du ménisque est décrite par une équation de l'elastica, mais avec $p < 0$. Elle est donc analogue à une tige sous tension mais avec des angles fixés (angle de contact) à ses extrémités.

- La longueur de l'interface est libre. En ce sens on se rapproche de la formulation en terme d'oscillateur où le temps de la trajectoire n'est pas fixé à l'avance. Ceci est, là encore, une différence importante par rapport aux problèmes d'élasticité.

Les conditions aux limites et les autres conditions globales dépendent du problème considéré. Par exemple pour le cas du ménisque, les angles initiaux et finaux sont fixés par les angles de contact α . Entre deux plaques identiques, on aurait alors $\theta = -\pi/2 + \alpha$ en $s = 0$, et un angle opposé sur l'autre contact (figure 2.15). D'autre part, l'écartement entre les plaques X est fixé¹, une condition globale qui est pour le coup analogue à la condition (1.2 page 23).

Ces conditions conduisent à des solutions qui peuvent être structurellement différentes de celles que nous avons vues jusqu'à présent. En particulier, pour le problème du ménisque, elles sont toujours à l'extérieur de la séparatrice dans le portrait de phase de l'oscillateur, de sorte qu'il n'y a jamais de point d'inflexion (trajectoires de libration de l'oscillateur). Lorsque les deux plaques sont espacées d'une distance infinie, la solution choisie est alors une portion de la séparatrice.

Pour les gouttes (bidimensionnelles) posées sur un plan, c'est également vrai: lorsque l'aire est faible (devant a^2) la solution est bien décrite par une approximation de cercle (libration très rapide, à vitesse –i.e. courbure– constante) tandis que dans la limite des grosses gouttes, on se rapproche d'une flaque presque plate (portion de séparatrice).

1. Dans le cas d'une goutte, c'est le volume total qui est imposé.

Mais si le fluide lourd est placé au dessus du fluide léger², alors la force p est positive et les formes prises par des gouttes pendantes bi-dimensionnelles sont les mêmes que celles des tiges flambées (en revenant sur la figure 2.13 page 53, on reconnaît une forme de goutte)

Cette analogie intéressante semble peu utilisée³. Elle conduit pourtant à une intégrale première supplémentaire, qui est naturelle dans le cas des ménisques, et qui relie le poids du liquide soulevé dans le ménisque (l'aire sous la surface) à la force exercée par la ligne de contact (loi de Jurin). Celle-ci n'aura pas d'intérêt direct dans notre étude, malgré une traduction élastique intéressante (Appendice B).

2.2.4 Conservation de l'énergie

Dans les sections précédentes, nous avons obtenu des propriétés morphologiques des plis en utilisant la conservation de quantités *le long d'un même brin*. Dans cette section, nous montrons comment on peut utiliser la conservation d'une quantité, l'énergie mécanique, mais *au cours de l'écrasement* cette fois.

L'énergie de courbure E_c des plis augmente au cours de l'écrasement par suite du travail de l'opérateur :

$$dE_c = -qdY. \quad (2.5)$$

Il est intéressant de voir que cette loi de conservation de l'énergie est contenue dans l'elastica. On peut s'en rendre compte de plusieurs façons. La première consiste à calculer la variation d'énergie $dE_c = \delta \int \dot{\theta}^2/2ds$ lors du passage d'une solution de l'elastica à une autre, une intégration par partie conduisant alors grâce à l'elastica au résultat.

On peut aussi le voir en utilisant le fait que $E_c + pX + qY$ est stationnaire autour d'une solution de l'elastica dans une boîte (X, Y) . Ceci, exprimé en prenant comme fonction test la nouvelle solution pour $Y + dY$, conduit aussi à $dE_c + qdY = 0$.

Pour faire le lien avec l'analogie du pendule, rappelons que le principe de minimisation de $E_c + pX + qY$ est l'analogue de celui de l'action. Ainsi cette propriété⁴ (2.5) est en réalité contenue dans le principe de minimisation de l'action.

Exprimons d'autre part l'énergie de courbure $E_c = \int \dot{\theta}^2/2ds$ en utilisant

2. Il existe des états stables vis à vis de l'instabilité de Rayleigh-Taylor lorsque les distances considérées sont plus petites que la longueur capillaire.

3. Nous remercions C.Clanet pour nous l'avoir signalée.

4. Elle n'a pas d'interprétation physique dans le cadre de l'évolution du pendule.

la conservation de H défini par (1.15 page 33),

$$E_c = \int [H + p \cos(\theta) + q \sin(\theta)] ds = px + qy + Hl$$

Or au point initial $H = \dot{\theta}_0^2/2 - p$, tandis que, par conservation de M (voir l'équation 2.2 page 50), $\dot{\theta}_0 = (-py + qx)/2$. On obtient ainsi

$$E_c = p(x - l) + qy + l(qx - py)^2/8 \quad (2.6)$$

Il est remarquable que l'on puisse ainsi exprimer l'énergie de courbure aussi simplement. Notamment l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie (2.5) avec cette forme de l'énergie conduit à une équation différentielle d'évolution du système reliant les force (p,q) aux longueurs (x,y,l) . En général, son utilisation n'est pas très simple car plusieurs paramètres varient en même temps au cours de l'écrasement.

Contactes plans

Dans le cas de contacts plans, x et l ne sont pas constants car il y a échange de longueur entre le brin et la région de contact. Mais ils sont reliés par le fait que $x = (X - l_p)/2$, $l = (L - l_p)/2$ où l_p est la longueur du plat. Ceci implique $2dx/dY = 2dl/dY = -dl_p/dY$. D'autre part, l'absence de courbure au point de contact $\theta_0 = 0$ impose $py - qx = 0$. L'expression de l'énergie de courbure $E_c = p(x - l) + qy$ s'en trouve ainsi considérablement simplifiée. La conservation de l'énergie mécanique (2.5) conduit alors, en utilisant $(x - l) = (X - L)/2$, à

$$2q + \frac{dp}{dY}(X - L)/2 + Y \frac{dq}{dY} = 0. \quad (2.7)$$

En utilisant de nouveau le fait que $py = qx$, on peut éliminer p , pour se réduire à une équation ne faisant plus intervenir que la force q , les paramètres géométriques (Y, l_p) et leurs dérivées par rapport à Y .

Dans le but de trouver l'état du brin (p,q,l_p) à partir de conditions géométriques $(X/2, Y, L/2)$, (i.e. inverser les relations formelles de l'appendice A) il nous faut disposer de 3 relations explicites entre ces quantités. Une première relation est fournie par (2.2 page 50). La relation de conservation de l'énergie en donne une seconde, sous forme différentielle. Pour terminer la résolution, il nous manque une troisième relation. En l'absence d'intégrale première supplémentaire, nous choisissons de résoudre le problème de façon approchée.

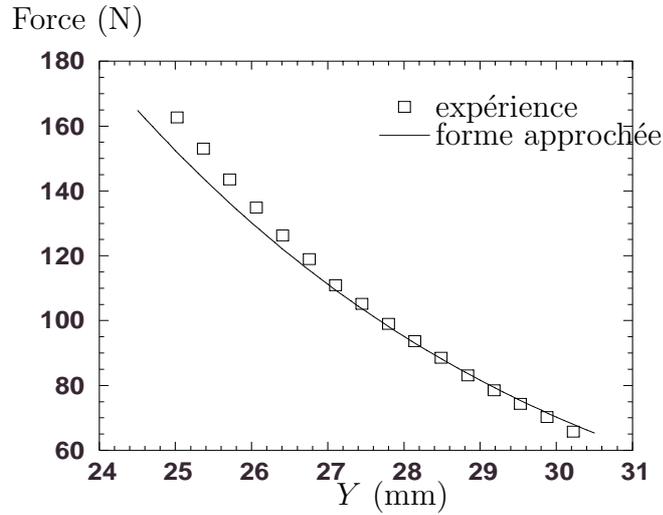


Fig. 2.16 – Un bon accord est obtenu entre les mesures (\square : $h = 0,3$ mm $\mathcal{R} = \nabla\%$) de force $q(Y)$ (voir figure 2.7 page 45) et la forme approchée (ligne continue) pour les états contenant un contact plan. Un paramètre multiplicatif est ajusté, mais nous décrivons bien la pente et la courbure de la courbe d'évolution.

En ajoutant une relation phénoménologique⁵ $l_p(Y)$, on obtient ainsi dans l'article en appendice E une équation différentielle à variables séparables $dq/dY = F(q)/G(Y)$, que l'on intègre alors simplement. La relation $q(Y)$ est ainsi déduite, à un coefficient multiplicatif près, de la conservation de l'énergie et d'une loi approchée.

Les résultats de cette intégration sont comparés aux mesures sur la figure 2.16 pour une feuille d'acier d'épaisseur $h = 0,3$ mm et d'excès relatif de surface $\mathcal{R} = 5\%$. Seul un paramètre multiplicatif correspondant à une constante d'intégration est ajusté. En revanche, le bon accord sur la pente et la courbure locale de cette courbe $q(Y)$ montre la pertinence de cette analyse (voir dans l'article en appendice E pour une comparaison probante sur une gamme plus étendue).

Ici encore, l'intérêt de lois de conservation pour ce problème est manifeste. La conservation de l'énergie (couplée aux lois de conservation le long du brin) nous a permis de trouver une loi approchée pour la relation $q(Y)$ dans la gamme des contacts plans.

5. Nous décrivons cette relation approchée et l'utiliserons dans un contexte plus large au § 3.3.1 page 84.

2.3 ÉCRASEMENT “EN CHAMPIGNON”

Nous montrons dans l'article en appendice E que lorsque l'excès de surface est trop grand, il n'apparaît pas de flambage mais un profil en champignon. L'argument est ici brièvement rappelé.

Il s'agit de trouver à quel moment le plan devient instable vis-à-vis du flambage. Pour cela on est aidé par le fait que les états à contacts plans sont décrits par des intégrales elliptiques *complètes* (voir l'appendice A page 165) desquelles on peut déduire, à (X, Y, L) fixés, la longueur l_p du contact plan.

D'après 1.9 page 29, un plan de longueur l_p soumis à une force p est instable lorsque le paramètre $C = pl_p^2 > 4\pi^2$. Il s'agit donc d'exprimer ce paramètre à l'aide d'intégrales elliptiques, et de rechercher la ligne critique $C = 4\pi^2$. On peut ainsi trouver la limite des excès relatif de surface \mathcal{R} au delà de laquelle l'instabilité ne se manifeste plus quelle que soit la hauteur Y imposée : le contact plan est alors stable. Dans ce cas, les brins se replient de plus en plus, pour finalement prendre la forme de deux S symétriques séparés par un plan (figure 0.4 page 6), que nous avons appelée “champignon”.

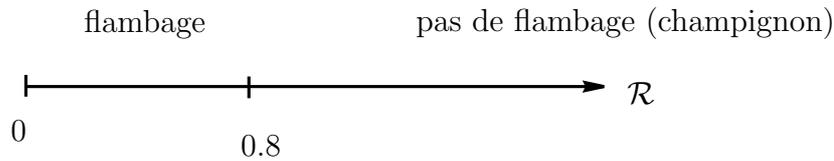


Fig. 2.17 – Lorsque l'excès de surface est trop important, les plats ne flambent pas, et prennent une forme “en champignon”.

Plutôt que de reproduire la méthode de calcul exposée dans l'article en appendice E, nous rappelons ici la raison physique de cette stabilité. Pour cela suivons l'évolution du paramètre pl_p^2 au cours de la compression. Partant d'une valeur nulle (au moment de la formation du contact plan, $l_p = 0$), la longueur de contact plan augmente quand on comprime, ce qui favorise a priori l'instabilité. Dans le même temps, la plage en x occupée par le brin diminue d'autant. Il arrive un moment où celle-ci s'annule ($x = 0$), puis devient négative, le brin terminant sa course en un point plus reculé que celui où il a commencé (voir figure 2.18 page suivante).

Ce faisant, la courbure initiale étant nulle, la force $p = qx/Y$ diminue, puis s'annule, et change de signe en même temps que x . Cette diminution est un facteur défavorable au flambage.

Entre ces deux phénomènes contraires (augmentation de l_p , et, à terme,

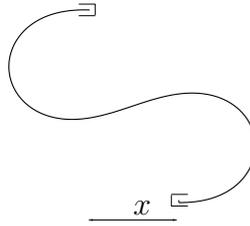


Fig. 2.18 – *Un brin à contacts plans avec un x négatif*

annulation de p), le paramètre $C = pl_p^2$ atteint un maximum qui peut être, selon la valeur de \mathcal{R} , inférieur ou non à $4\pi^2$.

Notons que les états à x négatifs, que nous avons baptisés “champignons”, sont des états *sous tension latérale* et non plus sous compression. Ils sont alors évidemment stables vis-à-vis du flambage. Notamment, quel que soit l’excès de surface \mathcal{R} , tous ces états à contacts plans sont stables pour de grandes compressions. Cependant si $\mathcal{R} < 0.8$, l’instabilité de flambage intervient *avant* que l’on puisse les observer.

2.4 UNICITÉ DES BRINS

La question de savoir si, lorsque l'on impose les dimensions (x,y,l) d'un brin donné, il existe une solution et une seule, est loin d'être simple. En effet, il s'agit de déterminer si deux solutions de deux *elastica* différentes peuvent satisfaire les mêmes conditions globales. Autrement dit : existe-t-il deux extrema de l'énergie de courbure, sous les contraintes de rester dans la même boîte?

Formulé ainsi, le problème ressemble à celui de la propagation lumineuse dans un milieu d'indice variable –à la différence que le milieu est fixé une fois pour toute dans cette analogie, tandis que le brin choisit son champ par (p,q) . Existe-t-il plusieurs rayons lumineux partant d'un point et arrivant à un autre? Cette fois il ne s'agit pas de minimiser l'énergie de courbure, mais le chemin optique. Nous savons que dans ce cas, le problème n'est pas simple, et la solution n'est pas forcément unique : il peut y avoir un nombre *fini* ou *continu* de trajets lumineux.

Tous les rayons partant d'un point objet convergent ainsi vers le point image correspondant, dans les systèmes optiques stigmatiques. Dans ce cas, puisque le temps de parcours est stationnaire continûment, il est constant sur cette famille continue de solutions. Dans notre cas, c'est ce qui se passe pour le mode neutre de répartition des contacts plans : l'énergie de courbure est constante sur cette famille continue d'états qui satisfont les mêmes conditions globales. Nous ne considérerons cependant pas cette situation comme une véritable multiplicité d'états.

Nous nous intéressons plutôt au cas où le nombre de solutions est fini. Un exemple optique simple est celui du mirage [2.19](#) page suivante : dans un fort gradient d'indice (au dessus d'un sol très chaud) certains rayons lumineux sont déviés vers le haut. On voit ainsi le ciel “se refléter” sur le sol comme s'il y avait de l'eau. Ceci implique que deux solutions “éloignées” sont localement extrémales.

Nous allons montrer qu'il y a unicité de la solution pour un brin de longueur l dans une boîte de taille (x,y) donnée. Le raisonnement détaillé est développé dans l'article en appendice E et nous n'en rapportons ici que les points essentiels.

Soient deux solutions possibles, notées S_1 et S_2 pour un (x,y) donné. Supposons qu'elles ne soient pas isolées, et qu'en modifiant le point (x,y) on engendre par continuité deux variétés de solutions sur un compact \mathcal{D} du plan (x,y) . On va noter $F = \Delta E_c(x,y)$ la différence d'énergie de courbure entre ces deux solutions.

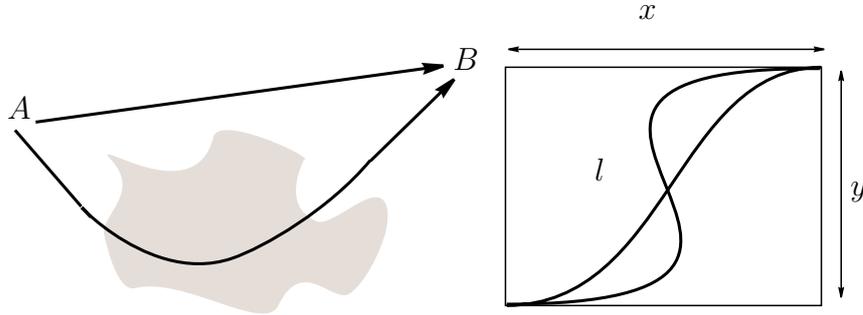


Fig. 2.19 – *Questions analogues : deux rayons lumineux peuvent-ils rendre stationnaire le chemin optique entre A et B ? Plusieurs solutions différentes minimisent-elles l'énergie de courbure dans une même boîte ?*

Les propriétés de l'*elastica* montrent que

$$dF = d\Delta E_c = -(p_1 - p_2)dx - (q_1 - q_2)dy$$

par simple variation de l'énergie. Cependant F étant continue sur le domaine compact \mathcal{D} , elle y atteint ses bornes.

Or, si un extremum est atteint dans l'intérieur de \mathcal{D} , on a en ce point $dF = 0$, ce qui impose $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Mais alors les courbures initiales de S_1 et S_2 sont égales ($\theta_0 = (py - qx)/2$), ainsi que les paramètres des *elastica* qui les décrivent. Au total, ces deux états sont alors confondus. La différence $F = \Delta E_c$ est donc nulle en ses extrema *si ceux-ci sont atteints dans l'intérieur* de \mathcal{D} .

Ce raisonnement montre que si l'on peut trouver un domaine \mathcal{D} sur la frontière duquel on a la propriété d'unicité (i.e. $F = 0$), alors celle-ci s'étend à tout l'intérieur du domaine. En effet les extrema (maximum ou minimum) de F sont atteints soit dans l'intérieur soit sur sa frontière, mais étant nuls dans les deux cas, ils imposent que F soit identiquement nulle sur D .

Or, en étudiant les propriétés d'intégrales elliptiques complètes, on peut montrer qu'il y a bien unicité sur la ligne $q = 0$, puis pour toute la zone (x,y) où il existe des contacts plans et enfin sur la ligne $x = 0$. Ces trois lignes définissent ainsi un domaine \mathcal{D} sur les frontières duquel on a unicité. Ce domaine, qui correspond aux contacts linéiques, satisfait donc lui aussi à l'unicité.

Ainsi, pour une boîte (x,y) , il y a au plus un brin solution de longueur l , du moins pour $x > 0$. Nous montrons enfin dans l'article en appendice E un résultat plus fort, qui permet d'étendre l'unicité au delà de ce domaine.

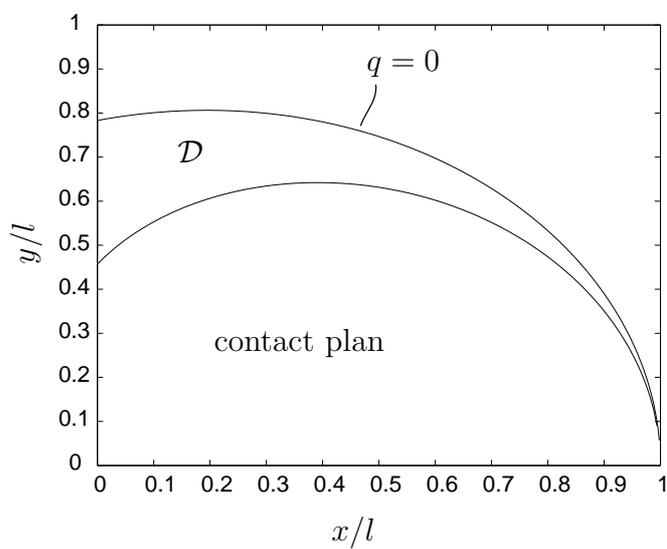


Fig. 2.20 – Graphe montrant trois lignes du plan (x,y) sur lesquelles l'unicité est montrée spécifiquement. Elle définissent un domaine \mathcal{D} dans lequel l'unicité est également vérifiée.

2.5 DU BRIN AU PLI : ASYMÉTRIE ET FROTTEMENTS

Dans ce chapitre nous avons jusqu'à présent considéré des plis toujours formés de brins symétriques, images l'un de l'autre dans un miroir vertical. Cette hypothèse, importante, nous a permis de réduire l'étude d'un *pli* de longueur L dans une boîte de taille (X, Y) à celle, plus simple, d'un *brin* de longueur $L/2$ dans une boîte de taille $(X/2, Y)$. Ce faisant, nous avons figé les degrés de liberté permettant aux brins de se répartir différemment la longueur L et la taille X totale (voir figure 2.21). En particulier, d'après ce qui précède (§2.4), si les brins sont formés de deux brins symétriques (excluant les solutions avec plis en suspens), il n'y a qu'un seul pli solution.

Dans cette section nous justifions notre hypothèse de plis symétriques pour les routes d'écrasement réalisées expérimentalement. Pour cela, nous

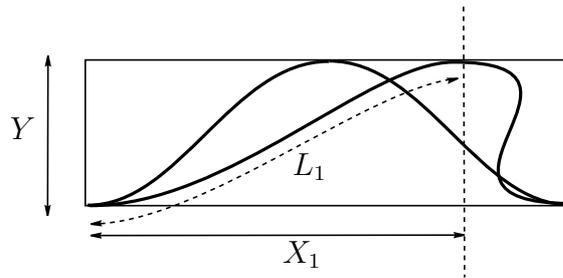


Fig. 2.21 – Un pli asymétrique est formé de deux brins qui échangent de la longueur L et de la taille X .

abordons la question de l'existence de plis non symétriques. Ceux-ci réaliseraient alors des solutions supplémentaires, brisant du même coup l'idée d'une solution unique pour un pli dans une boîte donnée. Nous verrons que ce problème est directement lié à la question du frottement aux points de contact, et que ce dernier joue un rôle surprenant dans la sélection des solutions.

Asymétrie et frottement : deux phénomènes liés

Nous appellerons asymétrie toute différence entre deux brins voisins. Celle-ci se ramène à une différence dans les triplets $(p, q, \dot{\theta}_0)$. Cependant, les brins doivent obéir aux conditions de raccordement (§1.2.3) suivante :

- égalité de moment $\dot{\theta}_0$.
- en l'absence de frottement, égalité de p .

Notons par contre qu'un frottement détruit l'égalité des forces p et induit donc nécessairement une asymétrie : les frottements sont *source d'asymétrie* dans ce problème. Inversement, si les plis sont symétriques, leurs p sont identiques par définition, ce qui impose une force de frottement nulle.

Désormais, en distinguant par les indices $_1$ et $_2$ les plis voisins, les conditions globales s'expriment

$$\begin{aligned} Y_1 = Y_2 &= Y \\ X_1 + X_2 &= X \\ L_1 + L_2 &= L. \end{aligned}$$

Elles conduisent à résoudre deux *elastica* couplées.

2.5.1 Existence de solutions asymétriques

Nous montrons dans l'appendice C page 173 l'existence de plis asymétriques *sans frottement*, aussi bien dans le régime des contacts ponctuels, que dans celui des contacts plans. Dans ce dernier cas, l'étude des solutions sous forme d'intégrales elliptiques permet de recenser toutes les solutions asymétriques existantes. En particulier, on montre ainsi qu'il existe toujours des solutions asymétriques, quel que soit l'excès de surface (lorsqu'il est grand, celles-ci n'apparaissent que pour des états du type "champignon", avec $p < 0$).

Lorsqu'on rajoute la source d'asymétrie supplémentaire que constituent les frottements, (c'est-à-dire le degré de liberté supplémentaire $\delta p = p_1 - p_2$), le nombre de solutions asymétriques possibles augmente forcément. On s'attend en particulier à trouver a priori une infinité continue de solutions indexées par δp . Certaines au moins de ces solutions sont stables. Nous les observons en effet expérimentalement (figure 2.22 page suivante) en perturbant fortement le point de contact.

Ce résultat paraît surprenant, puisqu'on est bien loin de l'hypothèse de plis symétriques uniques qui a pourtant montré sa pertinence dans le début de ce chapitre. Il faut donc expliquer pourquoi toutes ces solutions asymétriques n'apparaissent pas spontanément dans l'expérience.

2.5.2 Sélection par la route d'écrasement

Nous allons montrer que notre procédure d'écrasement défavorise l'apparition de plis asymétriques. Pour cela, nous allons suivre l'évolution d'un pli au cours de l'écrasement, et recenser les voies possibles d'apparition de ces solutions.

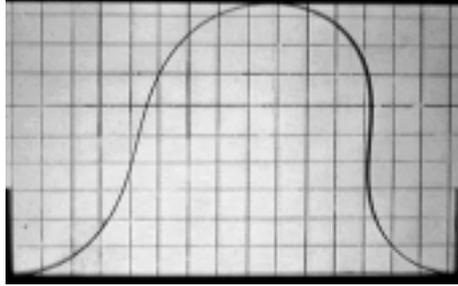


Fig. 2.22 – Exemple de solution asymétrique obtenue expérimentalement en perturbant le point de contact.

Plis libres

L'expérience débute par un pli "libre", non comprimé verticalement. Dans ce cas, $q_1 = q_2 = 0$ et il n'y a donc pas de frottement, ce qui en retour induit que $p_1 = p_2$. D'autre part, on a aussi égalité des courbures $\dot{\theta}_0$ pour satisfaire les conditions au point de raccordement. Les triplets $(p, q, \dot{\theta}_0)$ sont alors identiques : l'état de départ de la route d'écrasement est symétrique.

Phase de contact ponctuel

Lorsque l'on réduit la hauteur disponible Y , les forces q_1 et q_2 augmentent. Si une force de frottement δp excède $|\delta p| < \mu(q_1 + q_2)$, où μ est le coefficient de Coulomb (voir figure 1.20 page 30), il y a alors glissement. Examinons successivement les différents scénarios d'apparition de l'asymétrie :

Si le point de contact ne se déplace pas, alors ($X_i = X/2, L_i = L/2$), mais on a aussi $Y_1 = Y_2$. D'après les résultats d'unicité pour les brins de même longueur contenus dans des boîtes identiques, les deux brins ne peuvent qu'être identiques : le pli est symétrique. Une conséquence importante est alors que $\delta p = 0$: tant qu'il n'y a pas de déplacement du point de contact, δp reste nul. Ceci implique que le déplacement du point de contact ne peut se faire par glissement. *L'asymétrie ne peut apparaître spontanément par glissement.*

La seule possibilité de s'écarter de cet état symétrique est donc le roulement sans glissement, i.e. $dX_i = dL_i$, accompagné éventuellement de frottement. Il n'est pas évident de voir si ce scénario est effectivement possible. Un calcul de variance montre cependant que l'on dispose de six conditions à remplir (les quatre conditions géométriques ($\sum X_i = X, Y_i = Y, \sum L_i = L$), l'égalité des courbures, la condition de roulement) et de six paramètres $(p_i, q_i, d\theta_i/ds)$. De sorte qu'il n'est pas générique d'imaginer une famille continue de solutions, mais plutôt un nombre discret. A moins de perturbation d'amplitude finie, les solutions asymétriques ne peuvent alors spon-

tanément apparaît que si, au cours de l'écrasement, la branche des solutions asymétriques obtenues par roulement croise la branche des solutions symétriques. Nous ne observons pas cela dans l'expérience. *Les plis restent donc symétriques dans la phase des contacts ponctuels.*

Phase de contact plan

On arrive ainsi au contact plan avec deux brins symétriques (et donc $\delta p = 0$). Nous allons montrer que le cas de contacts plans est plus simple. Nous appellerons symétrique un pli à contact plan formé de deux brins ayant le même (p, q) . Les brins sont ainsi symétriques, même si les contacts plans sont répartis de façon quelconque (mode neutre de répartition). Cependant, pour plus de simplicité, nous prendrons ici aussi comme représentant de cette famille le pli pour lequel tous les contacts plans sont réunis en un seul, entre les deux brins.

On note M le milieu du pli ($s = L/2$). Si les brins sont symétriques, celui-ci se trouve au milieu de la boîte. S'il n'y a pas de glissement au cours de l'écrasement, ce point reste immobile. Il sépare alors verticalement la boîte en deux demi-boîtes identiques $(X/2, Y)$ contenant la même longueur $L/2$. D'après l'unicité, les brins ne peuvent qu'être identiques, de sorte qu'ici aussi $\delta p = 0$. Les plis symétriques sont ainsi obtenus *par déposition de longueur*, sans déplacement du contact.

Tant que δp reste nul, on ne peut avoir de glissement du plan. Il n'y a alors pas moyen de faire évoluer le système vers un état asymétrique.

Le résultat est ici plus fort que dans le cas des contacts ponctuels. La raison physique en est que, contrairement au cas des contacts ponctuels, on ne peut avoir de roulement sans glissement d'un contact étendu.

Pli en suspens

Pour des plis en suspens, même l'évolution symétrique est accompagnée de glissement : le point de contact n'est pas fixe, et il n'y a pas de raison géométrique de penser que le roulement se fait sans glissement. Il y a donc forcément des frottements δp , et de sorte que les brins ne peuvent être parfaitement symétriques. Les expériences montrent cependant que les frottements n'entraînent pas le système loin de son état symétrique.

Confrontation avec les expériences

Pour vérifier ces analyses, nous avons voulu visualiser le glissement, en déposant une poudre fine sur la plaque supérieure en verre. Celle-ci n'est arrachée par la feuille qu'en certaines régions, qui correspondent bien aux

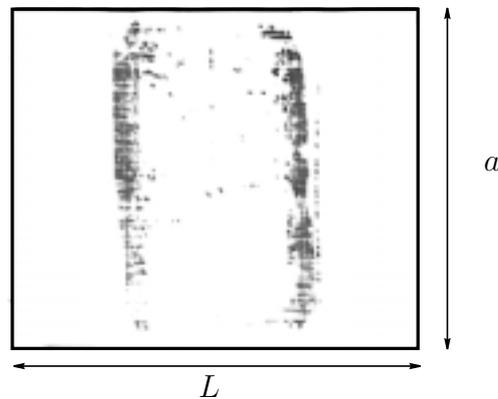


Fig. 2.23 – Photographie de la feuille après écrasement. Les parties sombres correspondent aux zones où de la poudre a été emmenée de la plaque de compression par glissement de la feuille. Les frottements apparaissent donc bien à des endroits localisés, pendant la phase des plis en suspens.

points de contacts du régime du pli en suspens, là où le glissement est attendu (voir figure 2.23).

D'autre part, nous avons mesuré la force de compression F au cours de cycles d'écrasement et de remontée, pour des états contenant un pli en suspens (voir figure 2.5.2 page ci-contre). Une différence entre l'aller et le retour sur un diagramme F en fonction de Y est le signe d'une énergie dissipée, très vraisemblablement par frottement. Ce n'est plus le cas lorsque l'on fait la même expérience dans un régime sans pli en suspens. Ceci prouve que les forces de frottements, si elles existent, ne travaillent pas, et donc qu'il y a absence de glissement.

Un résultat paradoxal.

Il existe donc un grand nombre de plis asymétriques, dès que l'on prend en compte un modèle plus réaliste de contact, incluant des frottements. Pourtant, on a pu très largement interpréter les routes de compression sans invoquer ni les frottements ni l'asymétrie. La raison en est que les états symétriques sont effectivement sélectionnés par l'histoire du système.

En réalité les frottements jouent un rôle surprenant dans ce problème. Source d'asymétrie à première vue, ils contribuent malgré tout à empêcher le déplacement des contacts, qui ne peuvent glisser. Cette condition géométrique suffit alors en pratique à imposer la symétrie du pli.

En retour ceci impose une force de frottement nulle $\delta p = 0$, de sorte que

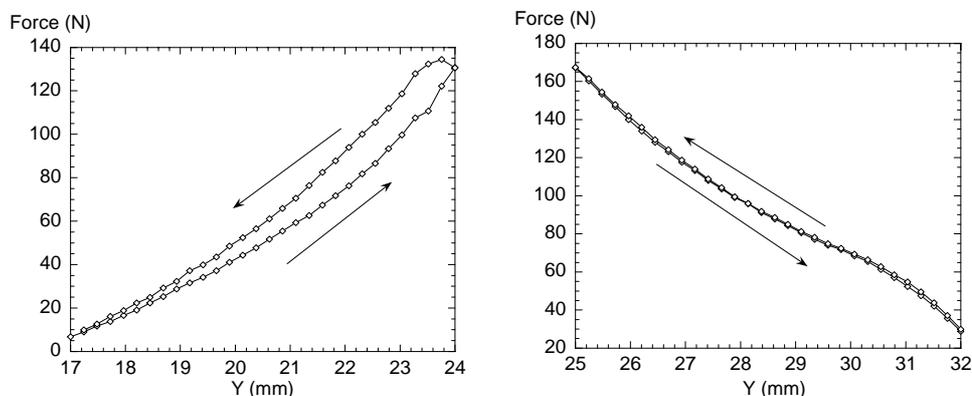


Fig. 2.24 – Mesures de la force de compression au cours de cycles. Dans la phase de pli en suspens à gauche, le cycle présente un hystérésis, ce qui est le signe de dissipation (frottement et glissement). Ceci n'est pas le cas dans les autres phases (à droite).

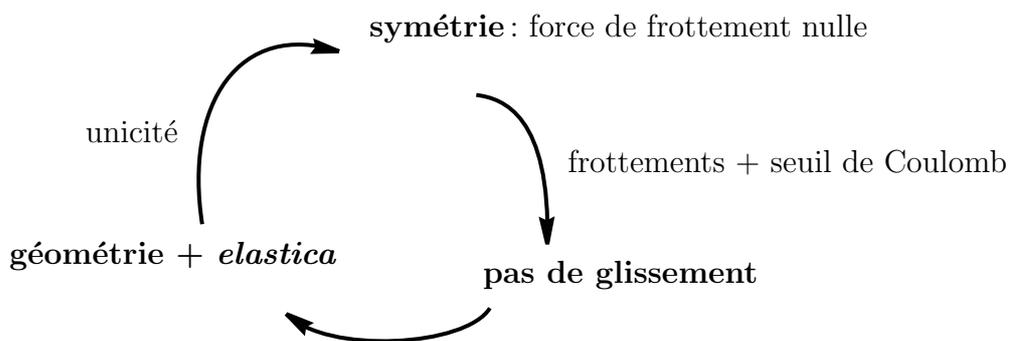


Fig. 2.25 – Schéma récapitulatif du rôle paradoxal des frottements: leur présence sélectionne des états symétriques, pour lesquels la force de frottement est nulle.

l'on peut paradoxalement *négliger les frottements* dans la description de ces états, alors qu'ils jouent un rôle important dans leur sélection.

2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré le très bon accord de l'*elastica* avec les expériences, même dans des domaines où la non-linéarité géométrique est très développée.

Malgré la simplicité de cette équation, le problème n'en est pas moins délicat à résoudre par suite de la présence de conditions géométriques globales imposées.

Nous avons cependant déduit, à partir d'intégrales premières, de lois de conservation et de symétrie, des propriétés notables des systèmes que nous avons validé par l'expérience. Une propriété d'unicité a également été démontrée pour une large gamme d'états et de conditions géométriques. Elle assure l'existence d'un unique brin à boîte et longueur donnée.

Considérant enfin les conséquences de frottements, nous avons montré pourquoi ils pouvaient être en pratique largement oubliés alors même qu'ils ouvrent l'espace de solution. La raison en est que, paradoxalement, la présence de frottements sélectionne les solutions sans frottement.

3. CASCADE DE GÉNÉRATIONS DE PLIS

Résumé

On décrit l'évolution du système au cours d'un écrasement important (cascade de bifurcations de flambage) et l'utilité des propriétés d'invariance d'échelles dans la compréhension de son comportement mécanique très complexe.

Dans ce chapitre nous étudions le comportement mécanique du système au cours du processus qui conduit à de nombreux plis [55, 61, 62, 63]. La réponse mécanique du système est complexe, du fait du nombre croissant de degrés de liberté avec le nombre de plis et du nombre important d'instabilités rencontrées. Une description précise des solutions comme au chapitre précédent semble donc illusoire.

Ici il est judicieux d'utiliser les propriétés d'invariance d'échelle *discrète* du système (§ 3.2 page 77). Celles-ci permettent de donner une prédiction de la réponse mécanique du système à partir de celle mesurée ou calculée (cf. chapitre précédent) lors du passage de 1 à 2 plis. Il faut souligner la puissance de cette propriété, qui permet de prolonger l'évolution mécanique du système sans aucun calcul.

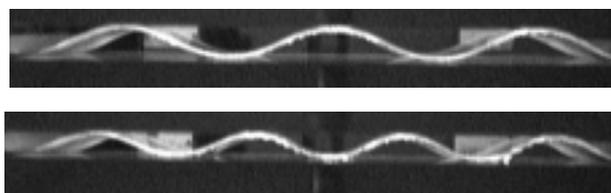


Fig. 3.1 – *Vue par la tranche de quelques états avec 3 et 4 plis*

Pour approfondir cette étude de l'évolution auto-similaire du système, nous nous concentrerons sur l'étude des brins eux-mêmes (§3.3).

Enfin, nous analyserons les sources d'hystérésis et de multistabilité dans le système (§3.4). Ici encore, les propriétés d'invariance d'échelle donneront assez de renseignements pour avoir une bonne idée de leur nature. Dans les dernières sections, nous considérerons des extrapolations aux grands nombres de plis des propriétés vérifiées pour des nombres de plis modestes. Nous examinerons ainsi les conséquences de la loi d'échelle sur l'organisation des différentes branches de solutions entre elles et donc sur le comportement mécanique de plus en plus complexe du système.

3.1 ÉVOLUTION DE LA FORCE DE RÉACTION

Considérons une feuille d'acier à ressort d'épaisseur 0,1 mm, présentant un excès relatif de surface $\mathcal{R} = 6\%$ tel que le flambage puisse se produire. Mesurons sa force de réaction à l'écrasement avec le dispositif expérimental¹.

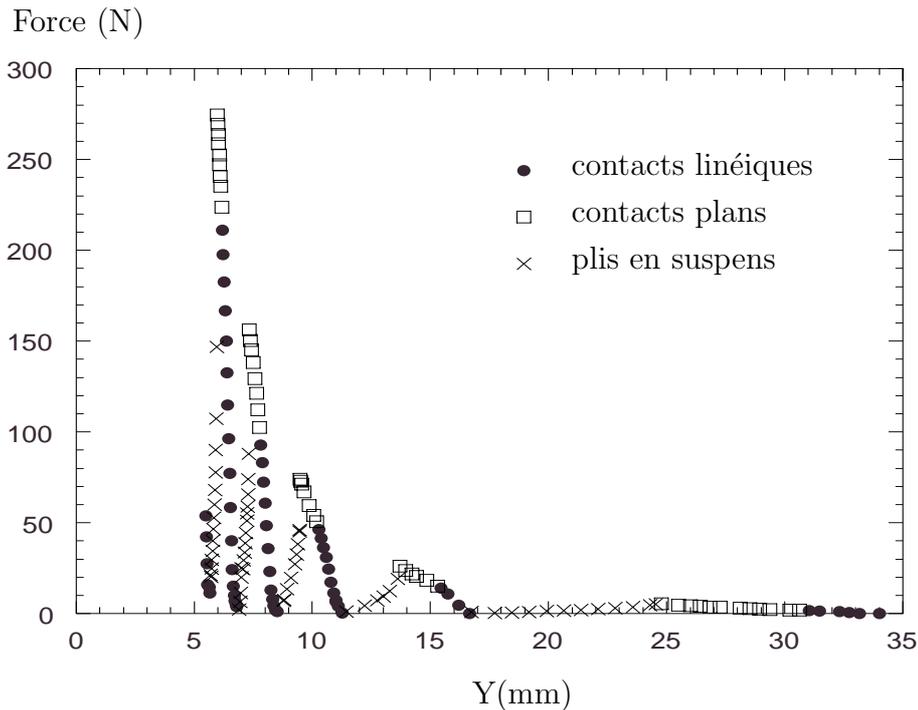


Fig. 3.2 – *Mesure de la force de réaction en fonction de la hauteur imposée Y , pour une feuille en acier à ressort ($E \sim 200$ GPa) d'épaisseur $h = 0,1$ mm et présentant un excès relatif de surface $R = 6\%$.*

La réponse mécanique observée apparaît fortement non-linéaire. En particulier elle n'est même pas monotone, là où celle d'un ressort linéaire serait une simple droite. Notamment, la figure 3.2 révèle une alternance de phases de croissance et de décroissance de la force en fonction de la hauteur Y .

Il faut noter ici que la stabilité mécanique du système impose que sa réponse mécanique soit décroissante avec Y et donc que le coefficient de

1. En réalité, pour des raisons exposées au §3.4, les expériences présentées sur la figure 3.2 ont été effectuées en désécrasement, c'est à dire en partant d'un état comprimé et en augmentant Y .

compressibilité soit positif. En effet, le système étant à l'équilibre, un léger écrasement supplémentaire, doit conduire à une force de réaction plus grande, pour ramener le système à l'équilibre : la présence de phase de compressibilité négative indique donc des états instables vis-à-vis d'une perturbation de hauteur. Ainsi si l'on posait des poids de plus en plus importants sur la feuille (le paramètre de contrôle devenant la force et non plus la hauteur), ces états ne seraient jamais rencontrés. S'ils le sont dans notre expérience, c'est grâce au fait que la hauteur est *imposée*.

Ces états représentés par des croix (\times) sur la figure 3.2 sont ceux qui incluent un pli en suspens. Expérimentalement on n'observe jamais plus d'un seul pli en suspens sur un état donné. Ces branches d'états à compressibilité négative conduisent, par réduction progressive de la force de réaction, à des états où celle-ci est nulle. Ceci est peu intuitif dans la mesure où ces états sont très comprimés. Comment comprendre en effet qu'un système dont le volume a été réduit d'un facteur 5 ou 6 puisse exercer une force nulle sur l'opérateur qui le comprime?

D'autre part, l'évolution globale est très rapide avec Y . On peut montrer que les maximums varient grossièrement comme Y^{-3} . Comment expliquer une dépendance si rapide avec la hauteur?

En résumé, la réponse mécanique du système est riche, et éloignée d'une réponse linéaire, dans le domaine considéré. Pourtant la feuille comprimée est restée en permanence dans le régime linéaire de l'élasticité, comme le confirme l'absence de marques irréversibles lorsque l'on relâche les contraintes. Dans ce chapitre, nous allons montrer comment l'on peut comprendre ce comportement, même très loin dans la cascade de bifurcations, grâce à des propriétés d'invariance d'échelle.

3.2 SIMILARITÉ GÉOMÉTRIQUE

3.2.1 Courbure et invariance d'échelle

L'équation de l'*elastica* possède la symétrie d'invariance par la transformation suivante

$$\begin{cases} s \longrightarrow \lambda s \\ \theta \longrightarrow \theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p \longrightarrow \lambda^{-2}p \\ q \longrightarrow \lambda^{-2}q \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans l'espace physique cette transformation correspond simplement à une homothétie de rapport λ (figure 3.3), qui conserve les angles, mais multiplie les distances par λ . Ainsi un facteur d'échelle transforme une solution $\theta(s)$ de

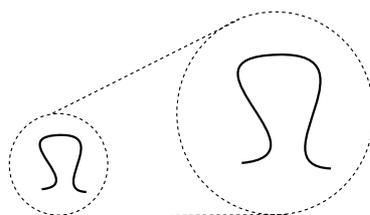


Fig. 3.3 – Un zoom transforme une solution d'une *elastica* en une solution d'une autre *elastica*.

l'*elastica* en $\theta(s' = s/\lambda)$, elle-même solution d'une équation de type *elastica*, mais pour (p, q) différents. Autrement dit, étant donnée la photo d'un pli, rien ne permet de dire à quelle échelle la photo a été prise, sauf si l'on connaît une mesure de la force qu'il faut exercer pour l'obtenir, le module de flexion I de la feuille et le module d'Young du matériau.

L'échelle de longueur participe donc simplement ici à fixer l'échelle de mesure de force en l'inverse de son carré. Dimensionnellement, cette dépendance des forces provient du fait que l'*elastica* est une équation du second ordre. Physiquement, pour un pli d'échelle d , les moments m varient comme le rayon de courbure, en $m \sim 1/d$ de sorte que les forces admettent l'ordre de grandeur $F \sim m/d \sim 1/d^2$.

L'invariance d'échelle découle en fait de l'absence de longueur caractéristique, propriété qui reflète ici l'hypothèse que l'épaisseur h de la plaque est petite par rapport aux autres grandeurs du problème. De ce fait, elle n'intervient qu'à travers le coefficient de renormalisation I sous la forme d'une loi de puissance.

3.2.2 Construction d'une solution à n plis

Utilisons cette propriété d'invariance d'échelle géométrique pour explorer la cascade de génération de plis.

Étant donné une feuille de longueur L dans une boîte de taille X , de hauteur Y , la forme $\theta(s)$ est une solution de l'*elastica* vérifiant les conditions globales imposées (1.14 page 31). Une homothétie de rapport $1/n$ transforme cette solution en un pli de longueur L/n , de taille X/n et de hauteur Y/n , qui est aussi solution de l'*elastica*. Comme toute solution de l'*elastica*, elle peut être prolongée par une solution satisfaisant aux conditions de continuité de p et $\dot{\theta}_0$ (1.11 page 31).

La remarque importante est alors qu'une réplique de ce pli est un candidat possible à la prolongation de lui-même. En effet, les contacts étant supposés sans frottement, p est conservé d'un brin à l'autre. La conservation de H impose alors qu'à la fin du pli, la valeur de $\dot{\theta}$ soit identique à celle de départ, $\dot{\theta}_0$. Ceci assure que les conditions de raccordement du pli avec *lui-même* sont bien vérifiées.

Cette opération de duplication du pli par lui-même peut être répétée n fois pour donner une solution d'équilibre mécanique formée de n plis (voir figure 3.4 page ci-contre), de longueur $n \times L/n = L$, de taille $n \times X/n = X$, mais tenant exactement dans une boîte de hauteur Y/n . Cet état satisfait donc bien les contraintes géométriques globales correspondant à une hauteur Y/n . Les états que l'on peut générer de cette façon à partir d'un pli initial seront appelés *états cousins* entre eux.

Notons cependant que nous avons simplement construit une solution d'équilibre élastique, mais que nous n'avons pas montré si elle correspond bien à celle adoptée par la feuille pour la hauteur imposée Y/n , ni si elle est elle-même stable.

3.2.3 Conséquence sur les forces de réaction

De cette construction géométrique, nous pouvons déduire une relation sur les forces de réaction développées par la feuille dans cet état en fonction de n . Si l'on note $F = 2q$ la force de réaction exercée par le pli initial, un pli homothétique exerce alors, d'après (3.1), une force $f_n = 2qn^2$. Comme la solution totale est formée de n de ces plis, la force totale de réaction $F_n = nf_n$ vérifie, pour cette famille d'états cousins, $F_n = n^3F$.

Ainsi, si les solutions décrites sont bien celles choisies par le système, on doit avoir la loi suivante, pour un *entier* n représentant le nombre de plis :

$$F(Y/n) = n^3F(Y). \quad (3.2)$$

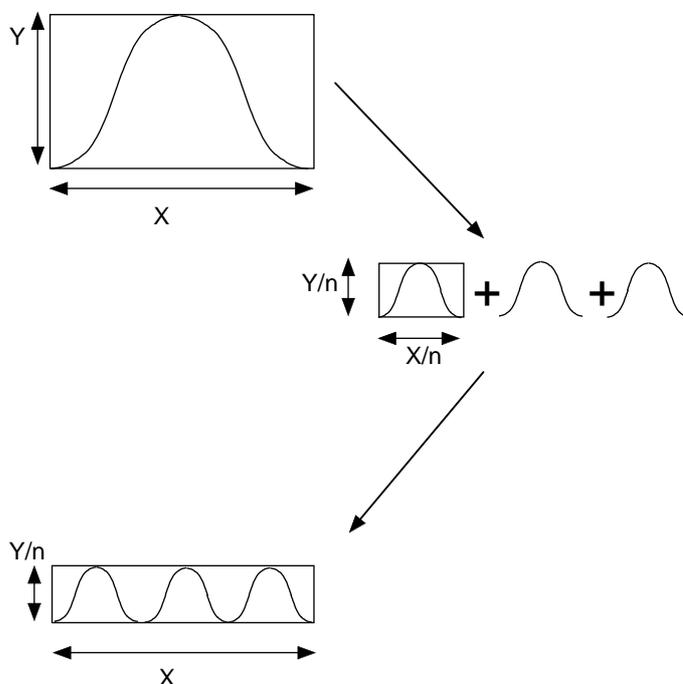


Fig. 3.4 – Construction géométrique d’une solution à n plis, à partir d’une solution à 1 pli. Un rapport d’échelle de facteur $1/n$ permet d’obtenir un pli de taille $(X/n, Y/n)$ et de longueur L/n , qui est prolongé par des répliques pour donner un état d’équilibre à n plis pour une feuille de longueur L dans une boîte de taille $(X, Y/n)$. On génère ainsi une famille d’états cousins indexés par n .

3.2.4 Test expérimental

Confrontons cette loi d’échelle (3.2) aux expériences. Il s’agit de comprendre si le système visite à l’étape n les états générés à partir de la réduction/duplication du pli initial, comme l’observation directe le suggère.

La relation de similarité est vérifiée.

Sur la figure 3.5 on a tracé $F(Y)/n^3$ en fonction de nY , pour les mêmes données que celles de la figure 3.2. Ceci revient à compenser l’évolution de force due à la réduction d’échelle et à la duplication. Les points expérimentaux (\square, \bullet) se retrouvent alors sur une même courbe, représentant la compression d’un pli simple. Ceci confirme que le système élastique visite

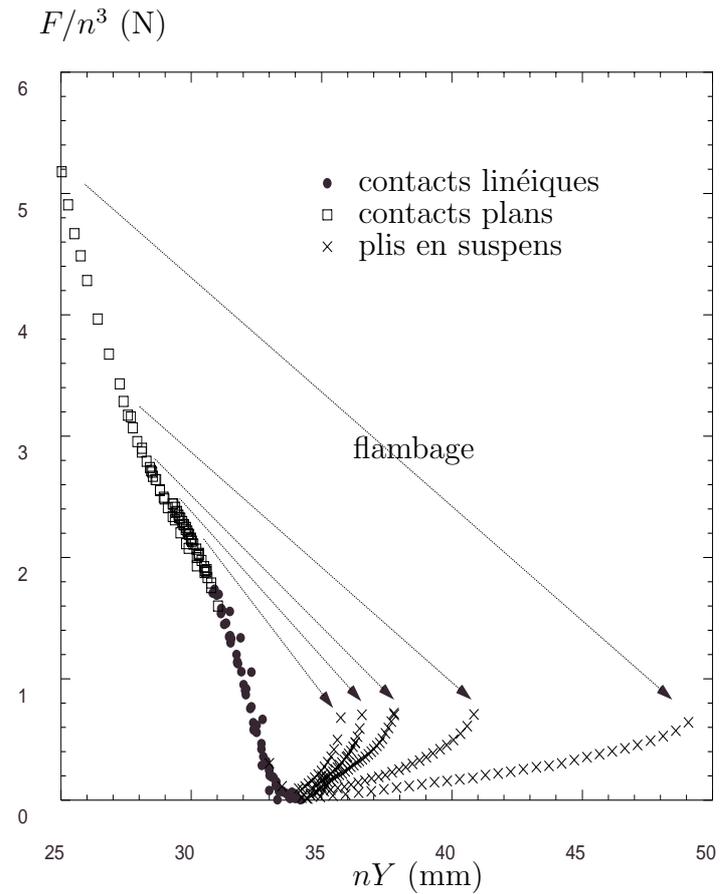


Fig. 3.5 – Mesures de force après compensation du facteur d'échelle, pour les mêmes données que la figure 3.2 page 75. La loi d'échelle est très bien vérifiée, sauf sur les états contenant un pli en suspens. Notons la discontinuité artificielle du facteur d'échelle au moment du flambage (flèches).



Fig. 3.6 – *La présence d'un pli en suspens unique brise la loi de similarité : la feuille ne présente plus n états identiques.*

bien les états que l'on a décrits par la construction du §3.2.2. Les états à n plis sont ainsi formés par des répliques des plis initiaux, mais réduits (pour accommoder la réduction de hauteur) et multipliés (pour conserver la longueur et la taille de la boîte) : ils sont cousins des états à un seul pli visités par le système lors du passage de un à deux plis.

Force de réaction nulle.

La structure des états à force nulle s'explique maintenant naturellement. Il s'agit d'états composés de n plis, identiques au pli de départ non encore comprimé mais à une échelle de réduction $1/n$: C'est la famille des états cousins du pli libre initial ($Y = Y_0$) pour lequel $q = 0$. Ils représentent des points de rendez-vous imposés de force *nulle*, tous les $Y = Y_0/n$ dans le diagramme (q, Y) .

Rupture de la relation

Il faut noter cependant que certains points représentés par des croix (\times) échappent à la réduction à une seule courbe.

Ces zones de rupture de la loi d'échelle correspondent aux états présentant un pli en suspens unique. Ils ne peuvent donc être vus comme la répétition d'un motif identique, et la construction que nous avons proposée ne peut donc prétendre les décrire : ces états ne sont cousins d'aucun autre visité par le système. Notons d'ailleurs que dans ce cas le nombre n à utiliser dans la relation (3.2 page 78) est lui-même ambigu : doit-on prendre en compte le pli en suspens comme un pli à part entière, ou ne pas le compter ? Sur la figure 3.5 page ci-contre il est compté comme un pli à part entière. Au moment du flambage, on passe de façon discrète de n à $n + 1$, ce qui produit une discontinuité artificielle dans la courbe. Dans la section suivante, nous verrons comment on peut éliminer cette discontinuité arbitraire.

Contacts plans

Les états à contacts plans (\square) vérifient très bien expérimentalement la loi de similarité (3.2). Pourtant nous avons remarqué que la distribution

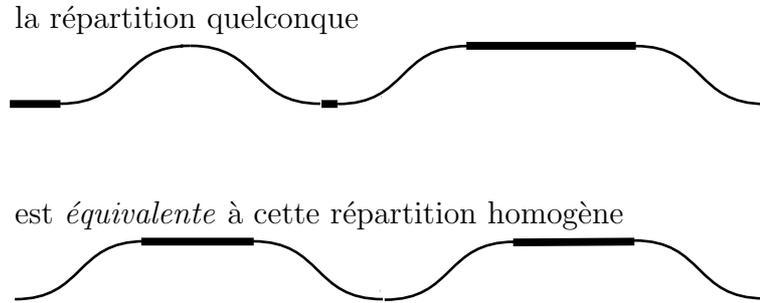


Fig. 3.7 – La distribution des plats est indifférente et peut donc être choisie de telle sorte que l'état de la feuille soit composé de n plis identiques.

des longueurs de plats était indifférente. De ce fait, ces états apparaissent rarement en pratique comme une réunion de motifs identiques, car leurs zones de contacts plans sont souvent réparties irrégulièrement. Ils ne peuvent alors être obtenus stricto sensu à l'aide de la construction géométrique décrite plus haut. Ceci est cependant secondaire ici du fait même que la distribution des longueurs de plats est indifférente à l'élasticité. La force totale de réaction reste donc identique quand on change la répartition des plats, ce qui permet de les répartir également sur chaque pli. On aboutit ainsi à n plis identiques (cf figure 3.7), pour lesquels on peut appliquer la loi de similarité (3.2).

3.2.5 Invariance discrète et ruptures d'invariance

Un raisonnement naïf aurait conclu de la construction géométrique

$$\begin{cases} F \sim n^3 \\ Y \sim n^{-1} \end{cases} \quad \text{donc } F \sim Y^{-3}.$$

Il revient à considérer que, puisque les forces varient comme le cube du nombre de plis et la hauteur comme l'inverse du nombre de plis dans cette construction, la force doit suivre une loi de puissance $F(Y) = AY^{-3}$ en fonction de la hauteur. Cependant, comme $F(Y_0) = 0$ au début de l'écrasement, la loi d'échelle conduirait à $A = 0$, donc à $F(Y) = 0$, ce qui est absurde!

Cette relation en loi de puissance est celle que l'on obtiendrait en imaginant que *tous* les états sont cousins entre eux, c'est-à-dire qu'entre Y et Y' quelconques, les états sont déductibles simplement par la transformation géométrique de réduction/duplication. Celle-ci serait alors valable pour n'importe quel facteur de réduction *réel* $1/n$. De cette similarité *continue* découlerait alors en effet naturellement un comportement en loi de puissance.

A contrario, le fait que l'invariance d'échelle soit *discrète* (indexée par un entier) s'avère essentiel pour la structure de la réponse mécanique de notre système. En particulier, les ruptures répétées de la loi de similarité discrète s'avèrent en fait une contrepartie *nécessaire* à sa validité. En effet, la relation

$$F(Y/n) = n^3 F(Y),$$

ne peut être vérifiée pour *tout* Y de l'intervalle $[0, Y_0]$, et tout *entier* n , sous peine de conduire là encore à une loi de puissance absurde $F(Y) = A/Y^3$ si F est continue.

La démonstration en est très simple. Prenons $Y \leq Y_0$, $r = m/n$ un nombre rationnel quelconque $r \leq 1$, et notons que $Y' = rY \leq Y \leq Y_0$ est dans l'intervalle de validité de (3.2). Comme $Y'/m = Y/n$ on obtient $F(Y'/m) = m^3 F(Y') = F(Y/n) = n^3 F(Y)$, de sorte que $F(Y') = (n/m)^3 F(Y)$, ou encore

$$F(rY) = r^{-3} F(Y). \quad (3.3)$$

Soit maintenant $G(Y) = Y^3 F(Y)$. Cette fonction continue comme F (au moins par morceaux) vérifie donc $G(rY) = G(Y)$, pour tout $Y \in [0, Y_0[$ et pour tout rationnel $r < 1$. En particulier $G(rY_0) = G(Y_0)$, de sorte que G est constante sur un ensemble dense dans $[0, Y_0]$. La continuité par morceaux de G suffit alors à montrer qu'elle est constante sur l'intervalle en entier. C'est-à-dire qu'il existe une constante A telle que

$$F(Y) = AY^{-3} \quad (3.4)$$

Ceci montre que la propriété d'invariance d'échelle discrète ne peut être vérifiée pour tous les états² : *il existe forcément des états non similaires à un motif déjà rencontré au cours de l'écrasement*. La loi de similarité *discrète* ne peut donc être que *partielle*. Elle doit subir des ruptures répétées de sa validité : ce sont les états incluant un pli en suspens.

2. Une autre possibilité d'obtenir une loi d'échelle non triviale serait de restreindre encore l'ensemble des entiers n qui vérifient la loi d'échelle. Par exemple le sous-groupe des puissances de 2 pourrait décrire un système où l'écrasement ferait passer de n à $2n$ plis, en imaginant que chaque pli donne naissance à un nouveau pli. Dans l'expérience on passe cependant de n à $n + 1$ de sorte que l'on décrit tous les entiers.

3.3 AU DELÀ DE LA SIMILARITÉ DES ÉTATS : ÉTUDE DES BRINS

Dans cette section, nous montrons comment on peut supprimer la discontinuité artificielle introduite au moment du flambage, en se focalisant sur la propriété d'invariance importante, celle des brins eux-mêmes. Pour aller plus loin dans la description de la manière dont le système alterne invariance d'échelle parfaite (états cousins) et états géométriquement nouveaux, il faut décrire l'évolution plus finement qu'avec les grandeurs globales que sont la hauteur Y et la force de réaction totale F .

Nous nous intéressons donc aux brins, supposés identiques (sauf éventuellement celui du pli en suspens) à une réflexion près. En tant que solutions de l'*elastica*, ces brins sont les éléments d'une famille à 3 paramètres, par exemple la taille (x,y) de la boîte qui les entoure et leur longueur l . Pour des raisons expérimentales et afin de suivre l'évolution des brins dans leur espace de phase, nous mesurons plutôt les 3 paramètres suivants : leur longueur l , la force q et leur hauteur Y .

3.3.1 Méthodes de mesure

Pour déduire la force exercée par un brin de celle exercée par la feuille, nous supposons que les plis sont formés de $2n$ brins identiques, et, éventuellement, d'un pli en suspens, ou de contacts plans. Ces derniers éléments ne contribuent pas à la force totale F . La force q reçue par chaque brin est donc simplement obtenue par division $q = F/2n$.

La longueur des brins est plus difficile à obtenir précisément. En effet, une mesure directe par traitement d'image serait imprécise, en particulier parce que les points de contacts sont difficiles à localiser sur une image : le contact y est toujours tangent et dans le cas des contacts plans, il se fait même avec rayon de courbure nulle. Il faut donc recourir à des méthodes plus précises.

- Dans le cas de contacts ponctuels sans pli en suspens, la longueur est totalement utilisée par les $2n$ brins identiques et $l = L/2n$.

En présence de plis en suspens, ou de contacts plans, de longueur totale l' , la longueur des brins est donnée par $l = (L - l')/2n$. Le problème revient alors à mesurer l' .

- Dans le cas du pli en suspens, on mesure leur longueur par une technique de mesure résistive détaillée au § 1.1.5 page 18.
- Pour des contacts plans, la mesure est rendue encore plus difficile parce qu'il faut mesurer leur longueur totale, répartie sur chaque contact. Cependant, dans cette phase, nous savons d'après ce qui précède que

les états à n plis pour une hauteur Y sont similaires à celui à 1 pli, pour une hauteur nY . Donc la longueur de contact plan amenée par chacun des n plis est $l'(nY)/n$, de sorte qu'au total, $l'(Y) = l'(nY)$. Cela signifie que la longueur totale de contact plan est *indépendante* du nombre n de plis pour des états cousins.

Nous avons testé cette relation sur des mesures directes de longueur de plat (cf § 1.1.6 page 20). Sur la figure 3.8 est représentée la longueur *totale* des contacts plans en fonction de nY , pour des états comportant 1 et 2 plis. On vérifie que les points se retrouvent sur une même courbe,

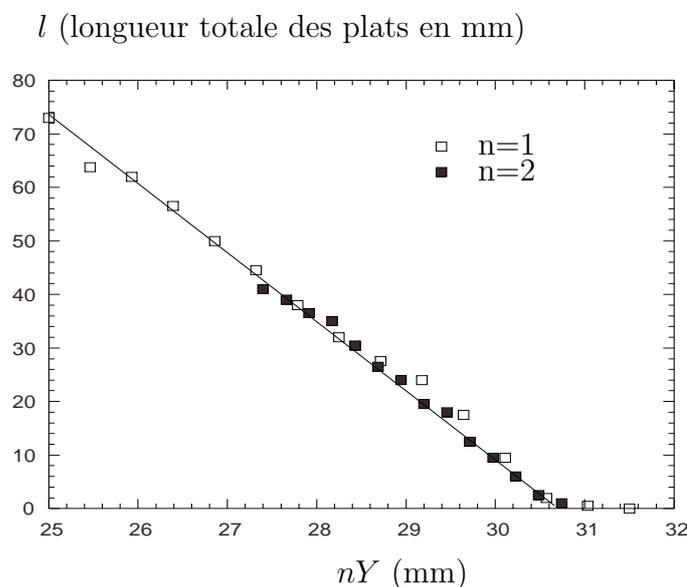


Fig. 3.8 – *Mesure optique de la taille totale des plats en fonction de nY , pour $n = 1$ et $n = 2$ plis. On retrouve bien, pour les même nY , la même longueur totale de plat. Ces mesures sont obtenues par détection de points de contact grâce à la déflexion d'un pinceau lumineux.*

ce qui confirme que les états sont bien cousins. D'autre part, elle est très proche d'une loi affine, dont on peut déterminer les coefficients. Pour des nombres de plis plus importants, nous utiliserons cette loi approchée³ pour la longueur totale de contact plan.

3. Il s'agit également de la loi affine utilisée au § 2.2.4 page 56 pour en déduire une loi de variation approchée $q(Y)$.

3.3.2 Évolution cyclique au cours de l'écrasement.

Pour illustrer le fait qu'au cours de l'écrasement le système utilise la même famille de brins, mais à des échelles différentes, nous utilisons des paramètres adimensionnés. À partir des trois paramètres (l, q, y) qui définissent un brin, nous pouvons construire deux paramètres adimensionnés par la longueur du brin : $(ql^2/EI, y/l)$. Ainsi, lorsque deux brins possèdent les mêmes paramètres, c'est qu'ils sont identiques à un facteur d'échelle géométrique près. Par conséquent, si deux états possèdent les mêmes paramètres adimensionnés pour leurs brins constitutifs, c'est qu'ils sont cousins, au sens vu plus haut, c'est-à-dire qu'ils sont formés d'un même motif répété et pris à des échelles différentes.

Sur la figure 3.9 page ci-contre sont portés ql^2/EI en fonction de y/l pour $n = 1$ à 6 plis. Ces données recouvrent des expériences faites avec plusieurs feuilles de différentes épaisseurs $h = 0,3$ et $0,1$ mm. Pour un petit nombre de plis, il est en effet nécessaire d'utiliser une feuille épaisse, afin que les forces mesurées soient dans la gamme mesurable, et que la gravité ne perturbe pas le système. Par contre, lorsque le nombre de plis augmente, les forces, qui augmentent globalement comme n^3 , deviennent trop grandes pour la gamme de mesure. Il est cependant facile de les garder dans une gamme raisonnable en changeant l'épaisseur h , puisqu'elles varient en h^3 , c'est-à-dire aussi vite qu'avec le nombre de plis. Un autre intérêt à cette réduction d'épaisseur est de conserver plus longtemps le système dans le domaine de l'élasticité linéaire en maintenant les contraintes dans une gamme raisonnable. Les données obtenues avec différentes feuilles sont ensuite simplement ramenées à leurs valeurs pour une épaisseur unique choisie $h = 0,1$ mm.

Dans ce diagramme, le système décrit des cycles au cours de l'écrasement. Ceci montre qu'il revient à son point de départ en coordonnées adimensionnées. La nature cyclique de l'évolution est visible ici, parce qu'on s'intéresse aux constituants élémentaires des états que sont les brins, et que l'on utilise des paramètres adimensionnés qui neutralisent les différences d'échelle.

Contacts linéiques

Ces cycles présentent une partie commune que tous empruntent à chaque fois : c'est la partie des contacts linéiques (●) qui est décrite en entier, de façon identique, à chaque passage.

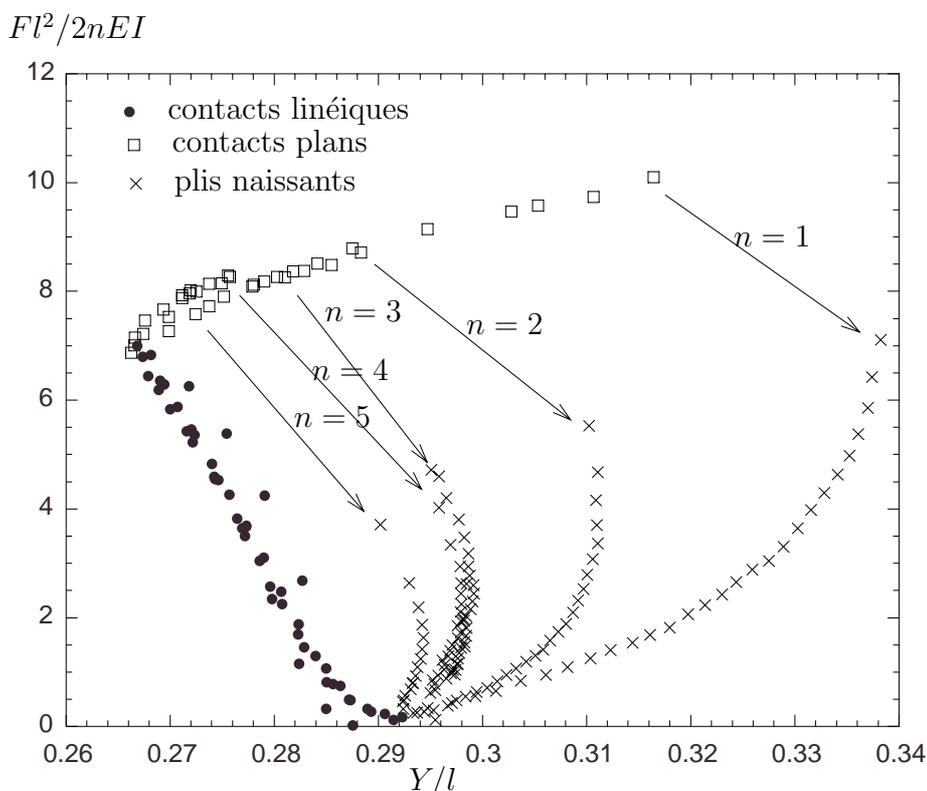


Fig. 3.9 – Diagramme de la force verticale reçue sur chaque brin $q/(EI^2)$ en fonction de sa hauteur Y/l . Ces quantités sont adimensionnées ici par la longueur du brin l . L'évolution est cyclique au cours de la compression.

Contacts plans

Une autre partie, celle qui correspond aux contacts plans (\square), est décrite, mais partiellement à chaque passage. En effet, lorsque le nombre de plis augmente, le système ne décrit qu'une partie de plus en plus réduite de la courbe, avant de passer au stade du pli en suspens. Cet effet peut être compris en étudiant le seuil de l'instabilité mise en jeu dans ce processus : le flambage.

L'instabilité de flambage apparaît en effet lorsque la longueur du plat l_p considéré et la force p tangentielle vérifient $pl_p^2 \geq 4\pi^2/EI$ (voir § 1.2.2 page 28). Or, pour des plis cousins (correspondant au même nY), la force p vérifie $p(n) = n^2p(1)$ d'après la propriété d'invariance d'échelle. En revanche $l_p(n) = l_p(1)$ est constant, lorsque toute la longueur de pli est répartie en un seul, ce qui est bien le cas de l'expérience faite en désécrasement.

Ainsi $pl_p^2 \sim n^2$, de sorte que le critère de flambage n'est pas une quantité indépendante de n . En particulier le seuil est ainsi atteint de plus en plus "tôt" quand n augmente sur ce diagramme adimensionné. Le système quitte donc cette branche commune après avoir parcouru une portion qui s'amenuise. L'évolution du système en phase de contact plan est ainsi bien auto-similaire, mais pas la position du point de bifurcation vers la branche flambée⁴.

Plis en suspens

La troisième partie des cycles est celle qui correspond aux états contenant un pli en suspens (\times). Le chemin pris par chaque cycle est différent à chaque étape : il n'existe pas d'homothétie permettant de passer d'un de ces plis à aucun autre rencontré lors de l'écrasement.

3.3.3 Évolution du cycle aux grands nombres de plis

Au cours de la compression, les chemins semblent se rapprocher de plus en plus de la courbe empruntée par les états à contacts linéiques. Deux phénomènes sont à l'origine de cet "écrasement" du cycle :

D'une part le point de départ par flambage de la branche de contacts plans est obtenu de plus en plus tôt.

D'autre part, dans la limite des n grands, on se trouve dans la situation de n plis identiques de taille x , de longueur l et d'un pli en suspens (taille x' , longueur l') de taille *comparable* aux autres plis.

En effet, pour estimer la taille d'un pli en suspens dans un état contenant n plis, on peut dire qu'au moment où il touche l'autre plaque, et devient un pli comme les autres, il a une longueur $L/(n+1)$ et une taille $X/(n+1)$. D'autre part, au moment de son apparition (flambage), sa longueur et sa taille sont de l'ordre de la longueur du plat qui a flambé. Le critère de flambage impose alors $l_p^2 p = 4\pi^2/EI$, et comme on se rapproche de plus en plus du moment où les plats apparaissent, la variation de p est essentiellement $p \sim n^2$. Cela impose $l_p \sim 1/n$. Ces deux estimations coïncident pour donner une taille qui varie en $1/n$, c'est-à-dire une taille comparable aux autres plis.

Pour des n grands, les conditions géométriques imposées aux $2n$ brins identiques sont alors de plus en plus proches de ($x = X/n$, $l = L/n$). Or ces conditions sont les mêmes que pour les plis en l'absence de pli en suspens.

4. Ce ne serait pas le cas si les contacts plans étaient effectivement distribués également sur chaque pli.

En fait, la présence supplémentaire d'un pli en suspens devient *infime* face aux n plis identiques restants.

Ainsi, au cours des phases incluant un pli en suspens, le système se rapproche-t-il de plus en plus des états composés de plis identiques. Les courbes qui le représentent font alors tout naturellement de même dans le diagramme. Le cycle a ainsi tendance à s'écraser pour épouser aux grands nombres de plis la partie qui correspond aux contacts linéiques.

À la limite des grands nombres de plis (voir figure 3.10), le système ne décrit pratiquement plus la partie correspondant aux contacts plans, car ceux-ci flambent très précocement. En revanche, la phase de pli en suspens suit quasiment la même courbe que celle du régime à contact linéique, mais en sens inverse, pour revenir vers le point de force nulle. Le cycle est alors devenu une simple portion de courbe.

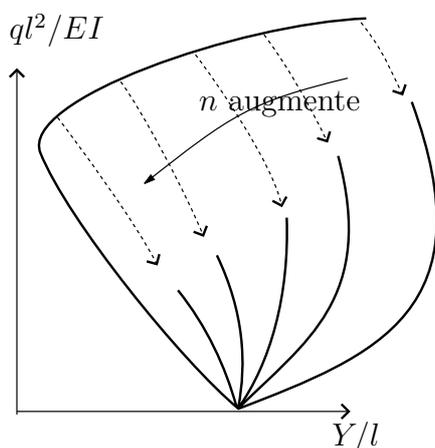


Fig. 3.10 – Écrasement du cycle aux grands nombres de plis.

3.4 HYSTÉRÉSIS ET MULTI-STABILITÉ

Toute cette vision doit être nuancée par les problèmes d’hystérésis et de multistabilité que nous allons examiner maintenant. En fait, toutes les mesures de force élastique présentées jusqu’à maintenant (figures 3.2 page 75, 3.5 page 80, 3.9 page 87) ont été effectuées en partant d’un état écrasé, et en augmentant la hauteur imposée Y , c’est à dire en désécrasant plutôt qu’en écrasant la feuille. La raison en est que les deux opérations peuvent conduire à des états différents.

Dans cette section, nous détaillons les deux mécanismes distincts qui conduisent à une multiplicité d’états : un premier, que l’on appellera intrinsèque car il est lié à la nature de l’instabilité de flambage dans la configuration considérée, et un deuxième, qui est une conséquence du mode neutre de distribution des contacts plans.

3.4.1 Hystérésis “intrinsèque”

Sur la figure 3.9 page 87 on peut voir que l’évolution du système n’est pas continue : elle présente un saut entre la branche correspondant aux contacts plans et celle du pli en suspens. Il semble bien que l’instabilité qui donne naissance au pli en suspens à partir d’un plat soit sous-critique. Ceci pourrait paraître a priori assez surprenant car le flambage d’une tige est un exemple classique d’instabilité supercritique (voir §1.2.2).

Bien entendu, la précision de la mesure peut être en cause, en particulier parce que, sur chacune des deux branches, les mesures de longueur ne sont pas effectuées avec la même technique (mesure de longueur résistive du pli en suspens, contre déduction de la longueur totale des plats sous l’hypothèse que la cascade est bien vérifiée). Cette différence de techniques de mesure peut très bien engendrer une discontinuité des résultats. En réalité, ce saut dans l’espace des phases est bien réel, et son amplitude s’amplifie quand le nombre de plis augmente (voir figure 3.13 page 93). Il est dû à une multiplicité d’états pour une hauteur donnée le long de la branche des plis en suspens.

Nous montrons ici que, lorsque n augmente, il existe forcément des états multiples possibles pour une même hauteur imposée, dont l’un contient un pli en suspens. Le raisonnement est simplement basé sur l’étude de l’évolution avec n des différentes branches de solution dans le diagramme (q, Y) , dont on va montrer qu’elles doivent se replier et se surplomber. Pour cela, définissons les hauteurs $Y_0(n)$ [respectivement $Y_p(n)$ et $Y_f(n)$] comme les hauteurs où l’état à n pli existe sous force nulle [respectivement fait apparaître des contacts plans, et flambe].

Lors du passage de n à $n + 1$ plis, la branche des plis en suspens

connecte le point de flambage $Y = Y_f(n)$ et celui où on retrouve un état cousin de celui de départ avec une force de réaction nulle : $Y_0(n+1)$.

L'évolution en fonction de n de ce dernier point est simple, c'est l'état cousin à n plis de celui de départ non encore comprimé : $Y_0(n+1) = Y_0/(n+1)$.

Nous ne disposons pas d'une loi équivalente pour l'évolution de la hauteur de flambage $Y_f(n)$. Cependant, pour arriver au moment du flambage, il faut avoir écrasé au moins jusqu'au point d'apparition des contacts plans $Y_p(n)$. En ce point, $Y_p(n) = Y_p(1)/n$ car les états où les contacts deviennent plans sont cousins entre eux. Ceci impose $Y_p(1)/n > Y_f(n)$.

La différence de deux $Y_0(n)$ consécutifs est en $[Y_0(n) - Y_0(n+1)] \sim Y_0/n^2$, de sorte qu'elle tend vers zéro beaucoup plus rapidement que la différence $Y_0(n) - Y_f(n) > (Y_0 - Y_p(1))/n$ plus lente que $1/n$. Donc pour un n assez grand on aura toujours *inversion* des hauteurs : $Y_f(n) < Y_0(n+1)$. Le point de flambage de n plis se produit alors pour une hauteur *plus petite* que celle où les $n+1$ plis sont formés.

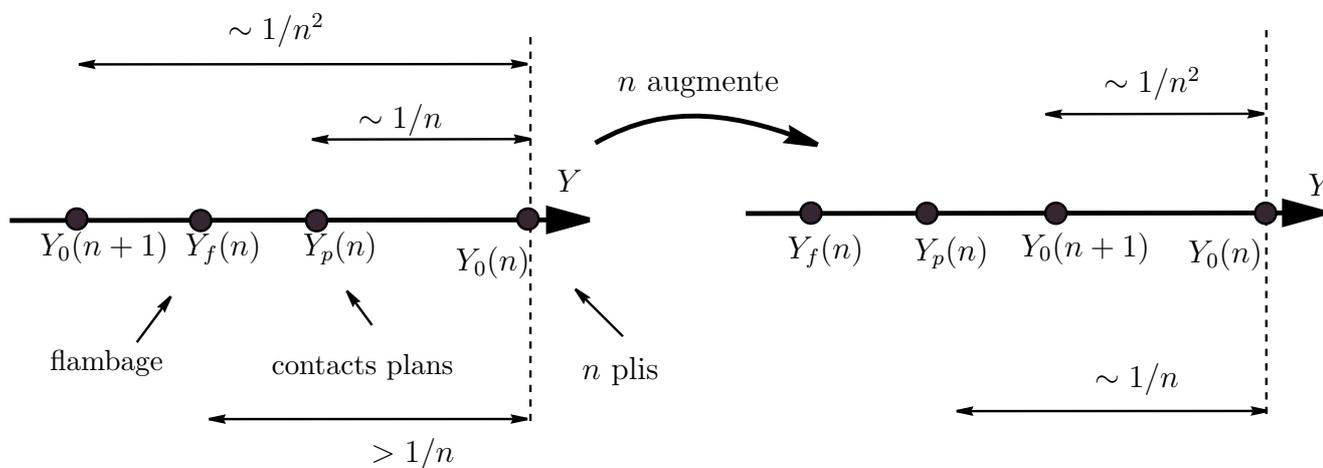


Fig. 3.11 – Pour n assez grand, il y a inversion de la hauteur $Y_0(n+1)$ pour laquelle on forme $n+1$ pli, et de celle pour laquelle les n plis flambent, $Y_f(n)$.

Autrement dit (voir figure 3.11), pour suivre l'évolution du pli en suspens, depuis sa naissance $Y_f(n)$ jusqu'au moment où il touche l'autre plaque $Y_0(n+1)$, il faudrait forcément augmenter la hauteur Y , donc *désécraser* la feuille. La branche des plis en suspens s'est en fait repliée sous la branche

correspondant à n plis, de sorte qu'il y a forcément multistabilité (voir figure 3.12).

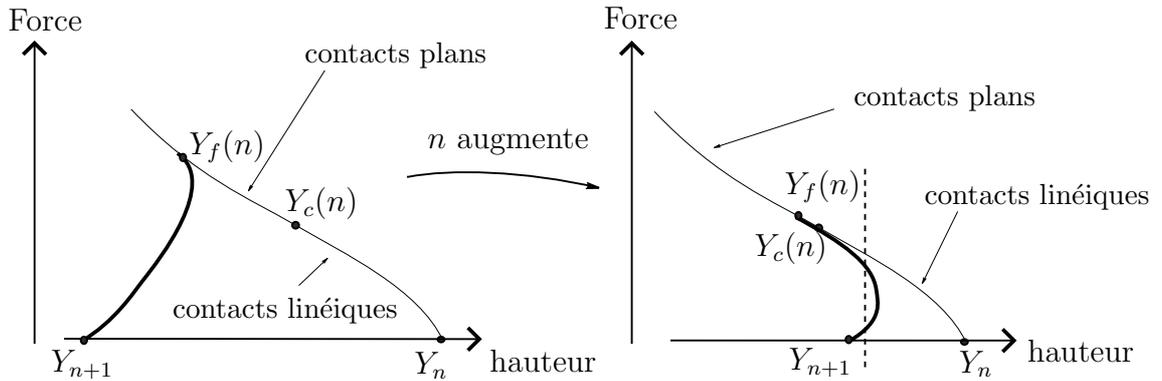


Fig. 3.12 – Schéma de l'évolution de la branche du pli en suspens (trait gras) quand le nombre n de plis augmente. Cette branche joint les points $(Y_0/(n+1), Y_f(n))$ dont on peut montrer que leur position relative s'inverse lorsque n est assez grand. Cela implique que cette branche se replie sous celle des contacts plans et linéiques. Il y a donc multistabilité.

Notons que ce “repliement” progressif de la branche des contacts plans sur celle des contacts linéiques est tout-à-fait lié au processus d'écrasement du cycle sur lui-même vu au § 3.3.3 page 88.

Ainsi les propriétés d'invariance d'échelle imposent au système des régimes admettant une multiplicité de plis pour une hauteur donnée, du moins lorsque le nombre de plis devient grand. De cette existence multiple de solutions découle la possibilité de sauts de branches, et d'hystérésis.

Sur la figure 3.13 page suivante sont représentées les mêmes données que sur la figure 3.2 page 75, mais le diagramme est centré autour du passage de 4 à 5 puis 6 plis. La transition qui fait apparaître un pli en suspens est du premier ordre, le saut dans les valeurs de la force étant bien visible. Cette expérience est réalisée en désécrasement seulement.

En réalité, comme le révèlent les simulations, cette multistabilité n'est pas une conséquence du grand nombre de plis (qui ne fait que l'amplifier). Elle est tout aussi bien présente dans le passage de 1 à 2 plis (figure 3.14 page 94), à défaut d'être véritablement mesurable expérimentalement.

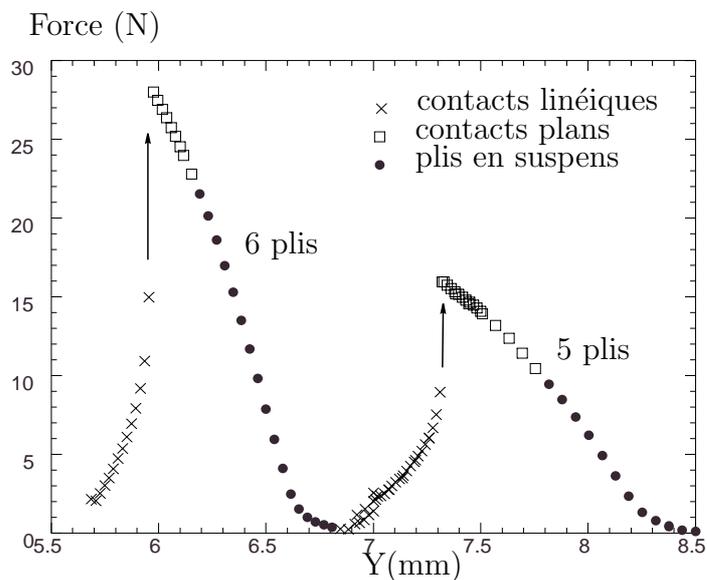


Fig. 3.13 – Mesures de force F en fonction de la hauteur Y lors d'une expérience de désécrasement (mêmes données que sur la figure 3.2 page 75). Les sauts de force, notés par des flèches, sont ici bien visibles entre la branche des contacts plans (\square) et celle contenant un pli en suspens (\times).

3.4.2 Hystérésis dû à la distribution des plats

Il existe une autre source de multistabilité dans le système, liée au mode neutre de distribution des contacts plans. La raison en est que cette distribution, certes indifférente quant aux solutions de l'*elastica*, est néanmoins essentielle pour la stabilité vis à vis du flambage.

Pour un contact plan, de longueur l , le seuil de flambage est donné par (§ 1.2.2 page 28) $pl^2 \leq 4\pi^2/EI$, où p est la force tangentielle qui, en l'absence de frottements, est la même pour chacun des contacts plans. Ainsi, lorsque l'on écrase et que p augmente, c'est le plat le plus long qui va franchir le seuil en premier et former un pli en suspens. Pour connaître la stabilité de l'état élastique considéré en fonction de la hauteur disponible Y , il faut donc connaître la distribution des longueurs de contacts en fonction de Y (en réalité, la plus grande longueur de plat). Pour une même hauteur Y , les états seront d'autant plus stables que la plus grande longueur de plat sera petite. À l'inverse, plus les plats seront répartis également, et plus l'état sera stable longtemps.

À l'écrasement, la distribution des plats n'est pas prédite par l'*elastica*,

Force F (N) calculée numériquement

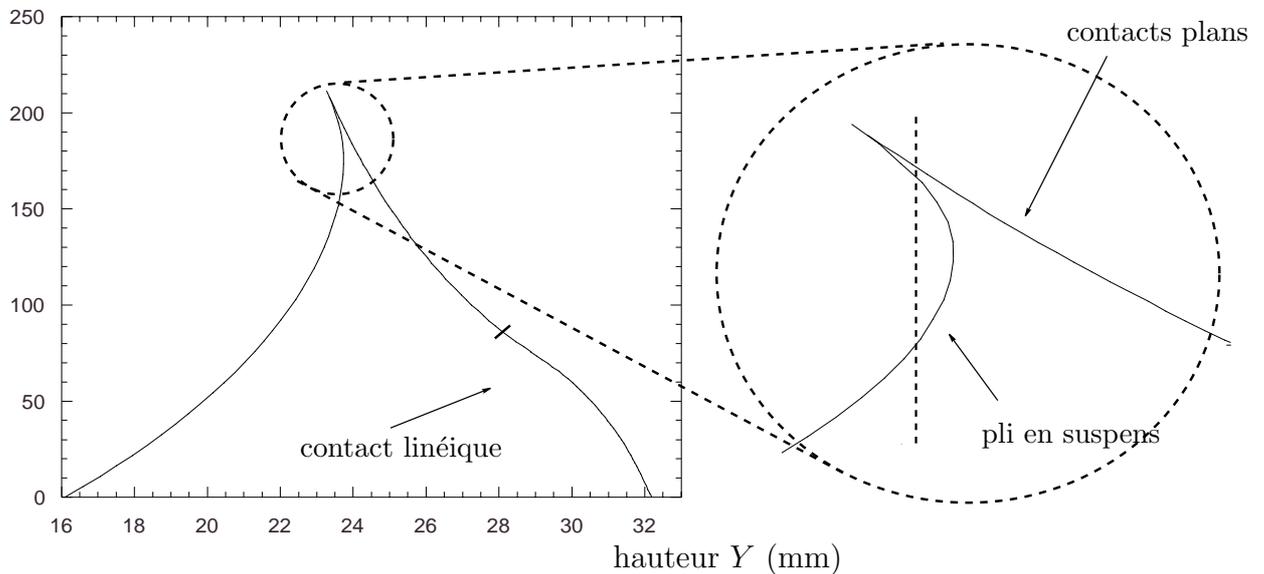


Fig. 3.14 – Calcul numérique de la force F en fonction de la hauteur Y pour le passage de 1 à 2 plis. Un léger surplomb indique un intervalle de hauteur Y que 3 états différents peuvent satisfaire, en particulier pour la valeur de la hauteur donnée par la droite en pointillés.

et peut donc être quelconque. En pratique, les plats ne sont alors jamais (ou très rarement) ramenés en un seul, de sorte que la plus grande longueur de plats est inférieure à la longueur totale des plats. Le système reste ainsi toujours plus longtemps sur la branche des contacts plans que si ceux-ci étaient rassemblés en un seul. Le moment du flambage est *variable*.

À la détente, l'évolution le long de la branche du pli en suspens est unique. En fait, si on suit cette branche en direction du point de branchement⁵, l'extension verticale du pli en suspens se réduit petit à petit jusqu'à se transformer en un seul plan : les contacts plans sont dans cet état ramenés *en un seul*.

On a donc là un mécanisme d'hystérésis lié au mode neutre de répartition des contacts plans. A l'écrasement, on reste longtemps sur la branche des

5. Ce n'est pas en toute rigueur le chemin pris par le système à cause de la multistabilité vue plus haut, mais c'est ce qui se passe expérimentalement dans la limite où le repliement de la branche des plis en suspens n'est pas trop avancé, c'est-à-dire que n n'est pas trop grand.

contacts plans avant que de devenir instable et de sauter brutalement vers la branche qui correspond au pli en suspens (voir figure 3.15).

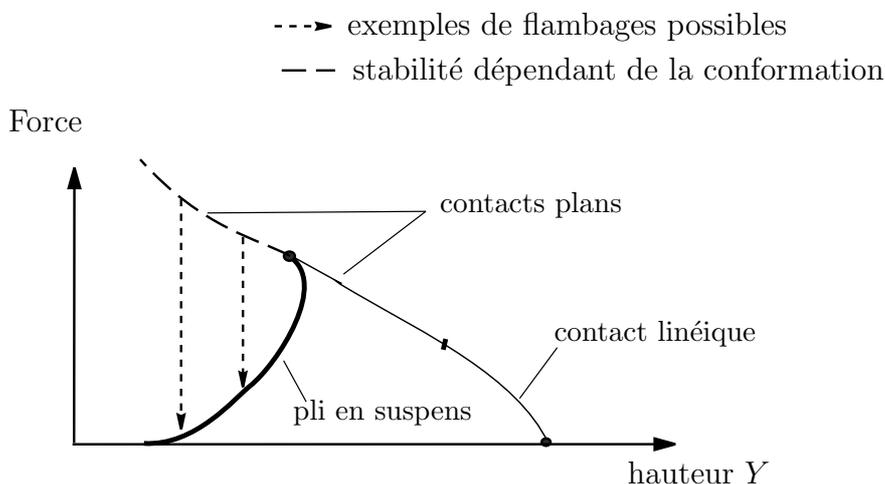


Fig. 3.15 – Lors de l'écrasement, la stabilité des états à contacts plans dépend de leur répartition, qui n'est pas prédite par l'elastica. Ils peuvent se déstabiliser indifféremment dans une plage de hauteur, en fonction de la conformation adoptée. A la remontée, au contraire, le système suit un chemin unique bien défini.

Le moment du saut devrait même être aléatoire, puisqu'il ne dépend que de la longueur du plus grand contact plan, dont toutes les valeurs possibles sont équivalentes du point de vue énergétique. De même que la répartition des plats, la stabilité du système est indifférente du point de vue de l'elastica. En fait l'expérience montre qu'en général une certaine distribution est préférée par la feuille : certaines conformations sont plus avantageuses que d'autres, suite aux imperfections de la feuille elle-même. Par exemple pour une feuille initialement non parfaitement plane, mais légèrement courbée par endroits, la distribution des plats n'est pas neutre car elle détermine la distribution des courbures plus ou moins énergétiquement coûteuses selon les endroits. D'où l'intérêt de faire les expériences en augmentant la hauteur à partir d'un état écrasé : on élimine l'évolution aléatoire, en suivant un chemin qui ne dépend que de \mathcal{R} et pas de particularités non mesurables de la feuille utilisée.

3.4.3 Évolution aux très grands nombres de plis

Lorsque le nombre de plis est très grand, la branche du pli en suspens se replie sous celle des contacts plans et linéiques (voir la figure 3.12 page 92).

Il existe donc un nombre n à partir duquel tous les points de cette branche correspondent à une hauteur *plus grande* que celle du point de flambage (figure 3.16a). Dans ce cas, au moment du flambage, le système ne peut plus passer sur cette branche puisqu'elle n'existe pas à cette valeur de Y . Il saute alors forcément sur une autre solution disponible : la branche des contacts linéiques pour $n + 1$ plis. Le système a ainsi complètement évité les solutions à pli en suspens, en passant *brutalement* de n plis à $n + 1$ plis.

Ce phénomène devient plus aigu lorsque le nombre de plis augmente : il est alors possible au moment du flambage de sauter sur des branches correspondant à $n + m$ plis. En réalité (voir figure 3.16) un grand nombre de solutions stables comportant de $n + 1$ à $n + m$ plis sont alors possibles pour une même hauteur.

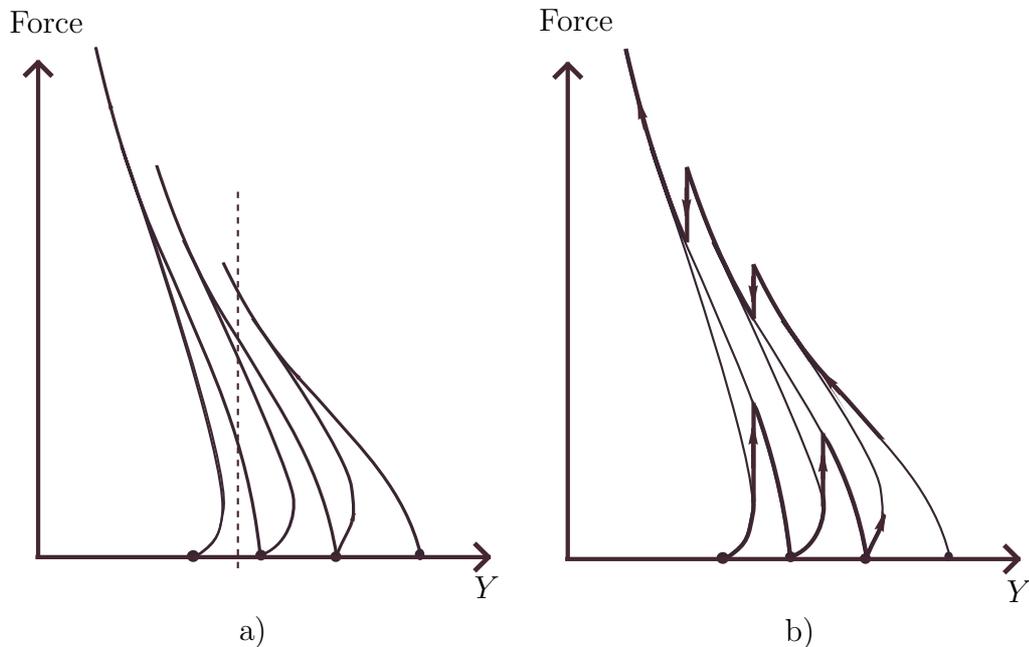


Fig. 3.16 – a) Lorsque le nombre de plis est grand, la multiplicité des solutions augmente (4 sur la ligne verticale en pointillés). b) En gras une évolution possible du système à la remontée et à l'écrasement.

A la remontée, partant de $n + m + 1$ plis, le système suit la branche correspondant à $n + m$ plis plus un pli en suspens jusqu'à arriver au point de tangente verticale, où il doit sauter vers une autre branche (figure 3.16). Pour de très grands nombres de plis, il y a dans ce cas aussi plusieurs branches possibles, comportant entre n et $n + m$ plis, plus éventuellement un pli en

suspens. Il est difficile de dire quelle branche sera choisie. Cependant, si c'est une branche qui ne contient pas de pli en suspens, elle sera alors suivie jusqu'au point de force nulle.

Il devient maintenant délicat de suivre l'évolution du système à partir de l'équation d'équilibre de l'*elastica*. Nous touchons ici à la limite de cette approche essentiellement statique. On sait seulement que si l'on fait un cycle d'écrasement puis de remontée, l'aire de la courbe dans ce diagramme (F, Y) devra être positive : c'est l'énergie dissipée lors des sauts d'états sous forme acoustique ou sous les effets du frottement. Nous ne pouvons que proposer (voir figure 3.16) une route plausible à l'écrasement et à la remontée. De façon générale, à l'écrasement, on a de moins en moins de chance d'observer un état à force nulle. À la remontée, par contre, ce sont les états à contacts plans qui ont peu de chance d'être visités. Et finalement, on peut penser que ce sont les états à contacts linéiques qui seront les plus fréquents dans le système.

Il faut ici préciser que les frottements peuvent certainement modifier cette description dans la limite d'un grand nombre de plis. En effet, nous avons montré qu'on pouvait les tenir pour nuls lors du passage de 1 à 2 plis, sauf dans la phase de plis en suspens. Ce résultat est dû au mode particulier d'écrasement, et tombe vraisemblablement en défaut lors des réarrangements globaux au moment de sauts d'un état à l'autre. Expérimentalement, la limite d'un très grand nombre de plis n'est pas facile à atteindre avec précision. Le système sonde alors des échelles de grandeur de plus en plus petites, de sorte que les imprécisions sur la hauteur ou sur les conditions aux limites sont amplifiées. Néanmoins, il nous a paru stimulant de pousser le raisonnement jusqu'à ces domaines pour montrer les très nombreuses conséquences autres qu'une simple loi d'échelle (3.2 page 78) que pouvaient induire la similarité discrète dans ce système.

3.5 CONCLUSION

Nous avons montré expérimentalement que le système emprunte pendant une partie de l'écrasement des états que l'on peut construire géométriquement à partir de ceux rencontrés lors de l'apparition du premier pli. En conséquence, la loi d'échelle

$$F(Y/n) = n^3 F(Y)$$

s'est trouvée vérifiée pour ces états présentant des contacts linéiques et plans. En revanche, elle est mise en défaut pour les branches correspondant à des plis en suspens. Le système obéit ainsi certes à une auto-similarité, mais de façon *partielle et discrète*.

Ce type de relation est extrêmement contraignant pour le système. En particulier, nous avons montré au §3.2.3 qu'étant discrète, elle était forcément partielle (la rupture de similarité enregistrée sur les branches de plis en suspens était donc prévisible). D'autre part, elle contraint la réponse mécanique du système de telle sorte qu'au fur et à mesure que le nombre de plis augmente, la branche des plis en suspens se replie progressivement dans le diagramme force-hauteur sous celle vérifiant l'auto-similarité (voir figure 3.12 page 92). L'évolution cyclique du système (au sens où il repasse par des états similaires) se réduit alors de plus en plus à une évolution selon une ligne : on parcourt des états proches dans un sens puis dans l'autre au cours de l'écrasement.

Enfin, pour des grands nombres de plis, la multiplicité des états augmente. Un état à n plis peut, au moment du flambage, sauter directement sur une branche contenant $n + p$ plis par exemple. Ces sauts sont d'autant plus fréquents que le système a la possibilité de rester plus loin sur la branche des contacts plans lorsque le mode neutre de répartition des plats est exprimé : les états sont plus stables vis-à-vis de l'instabilité de flambage si les contacts plans sont bien répartis. À l'écrasement, on peut donc voir apparaître d'un seul coup m nouveaux plis à travers des réarrangements importants, (le nombre m devenant de plus en plus grand). Il y a peu de chance de rencontrer alors des états à force nulle. À la remontée, par contre, le chemin peut être très différent.

Il est étonnant de voir comment la simple relation de similarité vue plus haut peut permettre, bien au delà d'une simple loi d'échelle, d'expliquer un grand nombre de phénomènes apparaissant au cours de l'écrasement. Il faut bien voir qu'une étude analytique exacte serait bien difficile en raison du nombre croissant de degrés de liberté du système. Enfin notons que même si cette similarité extrêmement puissante est spécifique à notre procédure d'écrasement, les phénomènes mis en lumière (alternance de croissance et

de décroissance de la force, hystérésis, multiplicité d'états d'équilibre) sont communs à bien d'autres systèmes de compression de plis [13, 24, 31, 39].

4. AU DELÀ DES PLIS DROITS

Résumé

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des plis ayant une direction d'invariance. En particulier nous avons vérifié que leur état pouvait s'interpréter comme ceux d'une tige, ramenant ainsi le problème à deux dimensions.

Dans ce chapitre, nous avons regroupé deux études qui vont au delà de cette hypothèse, en faisant intervenir des phénomènes physiques liés à la direction jusqu'ici muette.

Dans une première partie, il s'agit de jouer avec l'invariance d'échelle des états pour faire apparaître des plissements à des échelles différentes sur une même feuille. Cette question amènera naturellement une généralisation de l'*elastica* à des feuilles de largeur variable.

Dans une seconde partie, nous présentons une expérience qui permet d'étudier des états non développables de la plaque, pour lesquels l'énergie d'extension est donc non nulle.

4.1 UNE INVARIANCE D'ÉCHELLE SPATIALE ?

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'une feuille comprimée peut avoir un comportement partiellement auto-similaire. Ainsi certains états rencontrés au fur et à mesure de l'écrasement se trouvent composés d'un nombre n de répliques d'un pli initial, mais à des échelles différentes.

Dans cette section, on se pose la question suivante : existe-t-il des systèmes élastiques ayant un comportement auto-similaire non plus *au cours* de l'écrasement mais *spatialement* pour un même écrasement ? Cela revient à se demander si, par suite de l'invariance d'échelle sous-jacente à l'*elastica*, il serait possible d'observer sur la même feuille les *mêmes* formes de plis, mais à des échelles différentes. Pour répondre à cette question, nous allons procéder par étape.

4.1.1 Écrasement entre deux plaques non parallèles

D'après l'étude précédente, pour observer des plis à des échelles différentes, il faut évidemment faire varier ce qui fixe l'échelle du pli : la hauteur disponible Y . On s'intéresse donc naturellement à une situation d'écrasement "en coin", dans laquelle la feuille flambée est placée entre deux plaques rigides, non plus parallèles, mais formant un angle variable A .

L'expérience consiste alors à encastrier comme précédemment une feuille sur une plaque à l'aide de réglettes. Cependant, sur un des côtés de la plaque est placée une charnière supportant une deuxième plaque rigide de compression (voir figure 4.1 page ci-contre). Cette charnière est réalisée de telle sorte que son axe de rotation soit confondu avec la ligne où la condition aux limites d'encastrement est imposée. L'angle entre les deux plaques est contrôlé grâce à une vis sans fin montée sur des écrous articulés.

Nous nous limiterons dans cette partie à l'étude de la géométrie des états, sans mesure de forces.

Pour obtenir un nombre croissant de plis, il suffit donc de réduire l'angle A . D'après l'expérience, on constate cependant que les états obtenus ne sont pas alors composés de plis similaires. Ainsi, la figure 4.2 page suivante montre que dans une telle configuration, la taille x et la longueur l des plis ne diminuent pas aussi rapidement que leur hauteur lorsque l'on se rapproche de la charnière. Ainsi les plis présentent un excès de surface de plus en plus faible à mesure qu'on se rapproche de la singularité.

Nous n'obtenons donc pas d'état auto-similaire spatialement. La raison en est très simple. Nous avons déjà noté qu'un changement d'échelle de longueur imposait un changement d'échelle des forces mises en jeu (transformation 3.1 page 77). Ainsi un pli existe sous des forces p/EI inversement proportion-

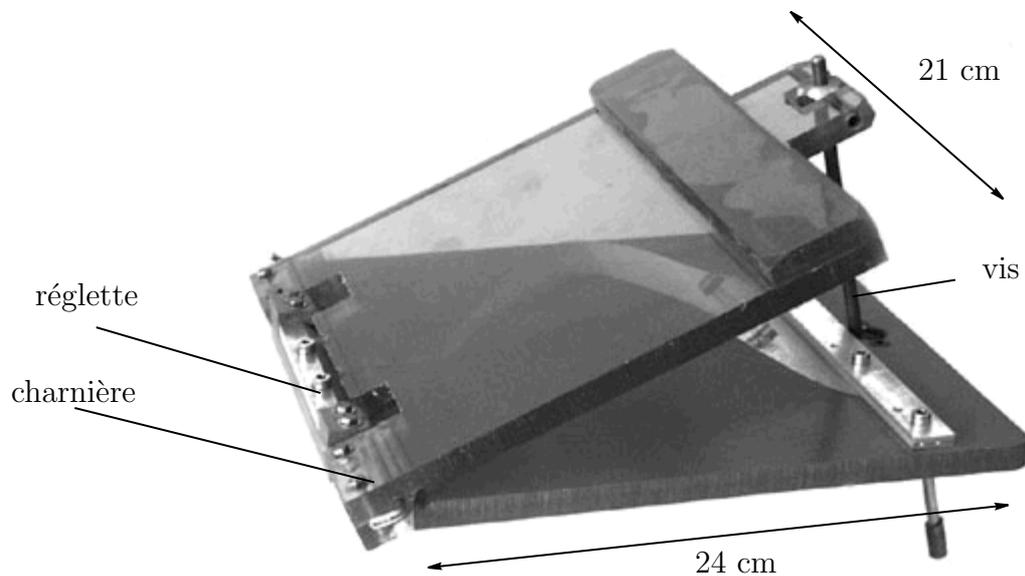


Fig. 4.1 – Photographie du dispositif expérimental d'écrasement en coin.

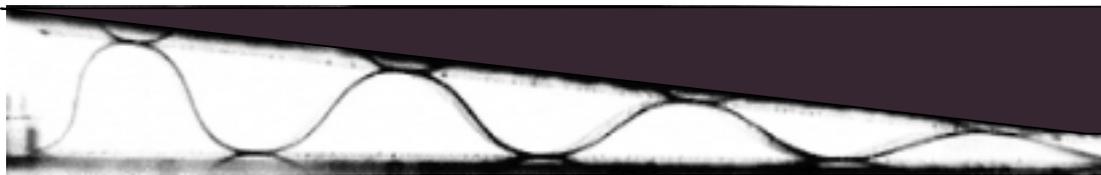


Fig. 4.2 – Forme prise par une feuille de polycarbonate dans un coin. Les plis n'ont pas la même forme lorsqu'on se rapproche de la singularité : leur excès de surface relatif diminue nettement.

nelles au carré de l'échelle considérée. Or la force p doit être constante le long de la feuille pour un état d'équilibre en l'absence de frottements¹.

L'astuce pour observer des plis d'échelles différentes sur une même feuille consiste à rendre le paramètre EI variable, de manière à imposer l'évolution souhaitée de p/EI , tout en gardant une force p constante. Pour y parvenir, on peut par exemple faire varier le paramètre $I = h^3l/12$ spatialement en modifiant l'épaisseur ou la largeur l le long de la feuille.

1. En toute rigueur ce n'est vrai que pour les contacts qui se font sur une plaque horizontale. Ici nous nous plaçons dans la limite où l'angle du coin est faible.

4.1.2 Une généralisation de l'*elastica*

On aboutit donc naturellement à s'intéresser aux états d'équilibre de feuilles de largeur l variable. Le module de flexion EI intégré dans la direction de la largeur est donc cette fois fonction de s . En ce sens, ce problème constitue un pas vers l'élasticité des plaques, puisque l'on prend en compte des variations de largeur.

Les formes prises par des tiges de sections variables ont apparemment été étudiées très tôt, et même par Euler en ce qui concerne des tiges de forme conique [66]. Lagrange s'est ensuite intéressé à la recherche des formes de section telles que, pour un seuil de flambage donné, leur poids soit minimal. Ceci revient à la recherche, pour un poids fixé, de la tige dont le seuil de flambage est maximal².

Pour déterminer le seuil, les équations d'équilibre linéarisées sont suffisantes [66]. Mais nous aurons besoin de l'équation non-linéaire complète, généralisation de l'*elastica*, pour déterminer les formes exactes.

La densité d'énergie de courbure reste $EI\dot{\theta}$ où I est cette fois fonction de s . Elle conduit à une énergie de courbure totale de la forme $\int EI\dot{\theta}ds$. Sa variation par rapport à $\theta(s)$ s'écrit

$$\Delta = \delta \int EI\dot{\theta}/2ds = E \int I\dot{\theta}\delta\dot{\theta}ds.$$

Elle conduit cependant ici, par intégration par partie, à

$$\Delta = - \int E \frac{d(I\dot{\theta})}{ds} \delta\theta ds.$$

L'équation d'équilibre obtenue par minimisation de l'énergie avec les multiplicateurs de Lagrange p et q doit donc être modifiée en

$$E \frac{d(I\dot{\theta})}{ds} = -p \sin(\theta) + q \cos(\theta). \quad (4.1)$$

Ceci correspond à une généralisation de l'*elastica*, que l'on peut aussi obtenir directement par écriture de l'équilibre des moments.

Sur cette base, cherchons une fonction $I(s)$ autorisant des solutions auto-similaires.

2. On peut effectivement augmenter la résistance au flambage en répartissant différemment la masse de la tige, par exemple en augmentant le module de flexion aux endroits où le mode de flambage attendu va produire une courbure maximale.

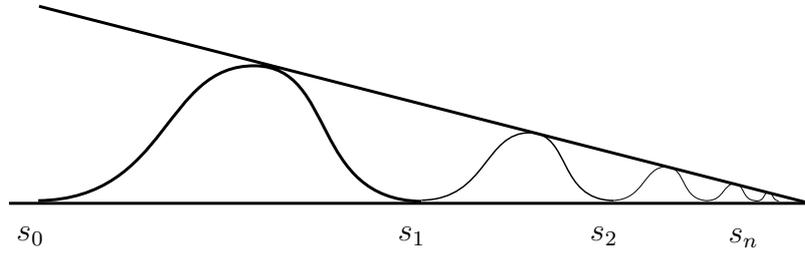


Fig. 4.3 – Une invariance d'échelle spatiale

4.1.3 Écrasement en coin et similarité géométrique

Supposons que les plis soient tous similaires au pli de gauche dans un rapport de réduction d'échelle λ constant. Définissons pour une origine pour l'instant arbitraire s_n, s_{n+1} les abscisses des points de contact de chaque pli P_n avec la plaque du bas (voir figure 4.3). L'hypothèse précédente implique que $s_{n+1} - s_n = \lambda(s_n - s_{n-1})$ soit $s_n = \lambda^n s_0$ pour une origine O des abscisses curvilignes bien choisie.

En effet, $s_n = s_0 + \sum \lambda^n l_0$ si l_0 est la longueur du premier pli. Ainsi $s_n = l_0(\lambda^n - 1)/(\lambda - 1) + s_0$, que l'on peut réécrire $s_n = \lambda^n s_0$ si $s_0 = l_0/(\lambda - 1)$, par un choix convenable de référence des abscisses curvilignes.

Comme, pour $n \rightarrow \infty$, les plis convergent vers le sommet du coin, O apparaît comme le point d'intersection des plaques.

Exprimons une condition nécessaire sur la fonction $I(s)$ pour que l'équation (4.1) soit invariante par la transformation géométrique faisant passer d'un pli à l'autre. Une telle transformation (composition d'une translation et d'une homothétie) ne modifie pas les angles θ , mais change les abscisses curvilignes, et le coefficient I . Cette transformation affine faisant passer s_n à s_{n+1} et s_{n+1} à s_{n+2} s'écrit

$$s \longrightarrow s' = (s - s_{n+1}) \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n} + s_{n+1} = \lambda s.$$

Il s'agit donc tout simplement d'une homothétie de centre O , qui transforme l'équation (4.1) en

$$E \frac{d[I(s')\dot{\theta}]}{ds} \lambda^{-2} = -p \sin(\theta) + q \cos(\theta). \quad (4.2)$$

L'équation est donc invariante à force constante p si

$$\forall s, I(\lambda s) = \lambda^2 I(s),$$

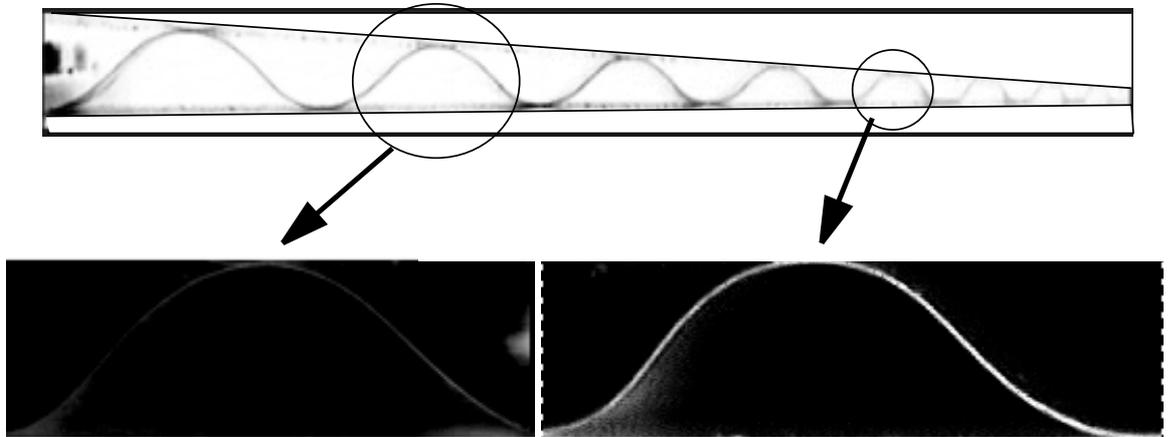


Fig. 4.4 – Photographie d'un état d'une feuille dont la largeur varie comme le carré de la distance au coin.

condition qui est automatiquement vérifiée si I suit la loi de puissance $I(s) = \beta s^2$.

Ainsi une solution $\theta(s)$ pour un pli n est-elle transportable au pli suivant puisque la même équation (y compris le même p) régit l'équilibre de ces plis, à un facteur d'échelle près. Il reste alors à trouver le rapport d'échelle λ et la forme $\theta(s)$ du pli qui convient. Ils sont choisis de manière à satisfaire les conditions géométriques : la taille de la feuille, sa longueur totale, la condition liée à la plaque supérieure, mais aussi les conditions de raccordement, dont il est question plus loin.

Sur la figure 4.4 est photographié un état comprimé pour une feuille découpée de telle sorte que sa largeur varie comme le carré de l'abscisse curviligne. Il semble bien y avoir une succession auto-similaire de plis, dont la longueur caractéristique croît avec la distance au coin. Ceci est confirmé par la superposition de différents plis agrandis chacun de façon à compenser le facteur de réduction (figure 4.5 page suivante). Notons sur cette figure que les deux brins formant chaque pli sont alors dissymétriques, ce qui n'est pas surprenant puisque l'évolution de I en fonction de s brise l'invariance de translation $s \rightarrow s + s_0$. Contrairement au chapitres précédents, la position du pli sur la feuille n'est plus indifférente.

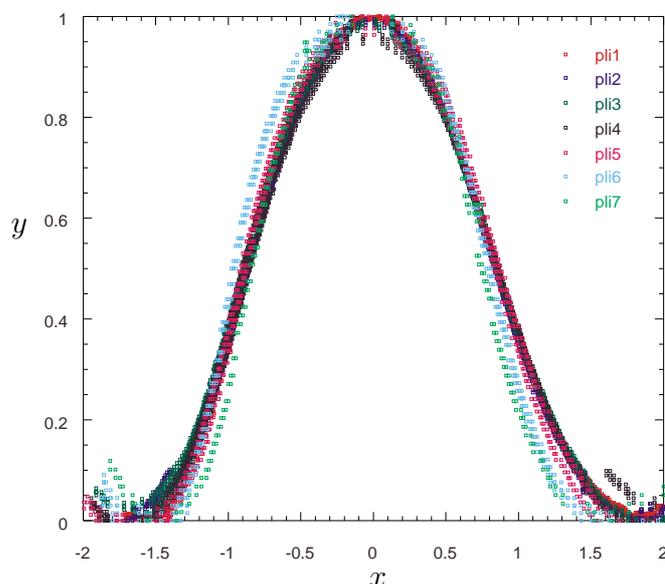


Fig. 4.5 – *Superposition de plis de différentes échelles sur une même feuille, tous ramenés à une même hauteur fixée. Notons l'asymétrie entre les deux branches.*

4.1.4 Conditions de raccordement

Jusqu'à présent, nous avons raisonné par conditions nécessaires. Ainsi nous avons imposé une forme de feuille laissant invariante l'équation (4.1) par les homothéties de centre O . En réalité cela imposait simplement que l'ensemble des solutions possède cette symétrie.

Pour que la construction soit complète, il faut s'assurer que les différents plis obtenus par dilatation soient bien mécaniquement connectables au sens exposé plus haut (page 31). La continuité de p étant assurée par construction, il suffit donc de vérifier que chaque pli finit bien au point de contact avec une courbure égale à celle du pli suivant.

Une légère dérive des formes est visible en figure 4.5. Montrons que, au delà des précisions expérimentales, elle résulte de la structure même du problème qui interdit des solutions rigoureusement auto-similaires. Pour cela, prenons l'exemple de plis sous force verticale nulle $q = 0$. L'équation de l'*elastica* généralisée prend la forme

$$\frac{d}{ds}(s^2\dot{\theta}) = -\omega^2 \sin(\theta). \quad (4.3)$$

où s est l'abscisse curviligne adimensionnée par la longueur totale de la feuille

l , I_0 la valeur maximale de I et $\omega^2 = pl^2/EI_0$.

Pour l'elastica classique, ce cas $q = 0$ est analogue aux trajectoires d'un pendule avec une gravité non inclinée. Dans le cadre de cette analogie, on considère ici que la longueur l du pendule (et donc son moment d'inertie) est variable au cours du temps. L'analogie n'est pas parfaite, mais $md(l^2\dot{\theta})/dt = -mgl \sin(\theta)$ revient à un problème voisin de (4.1) si $l(t) \propto t^2$.

Avec le changement de variable $u = \ln(s)$, motivé par la recherche de solutions auto-similaires, l'équation (4.3) se simplifie en

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{d\theta}{du} = -\omega^2 \sin(\theta).$$

Dans cette nouvelle variable, les transformations homothétiques $s \rightarrow \lambda s$ se traduisent maintenant par des translations $u \rightarrow u + \ln(\lambda)$. Une particularité importante de cette équation est d'être autonome en u . Ceci montre directement l'invariance par ces translations et donc l'invariance d'échelle initiale (c'est le choix judicieux de $I(s)$ qui l'a permis). Les solutions auto-similaires sont alors représentées par des solutions $\theta(u)$ périodiques en u , puisque l'on cherche des formes qui se répètent à l'identique à des échelles différentes : $\theta(u + \ln(\lambda^n)) = \theta(u)$.

Or par la présence du terme dissipatif³, l'équation précédente représente l'évolution d'un oscillateur *amorti*. De ce fait, elle ne peut admettre de solution périodique, de sorte que les états observés (figures 4.4 et 4.5) ne peuvent être stricto sensu auto-similaires. Ceci explique la dérive de forme apparente en figure 4.5. Le fait qu'elle soit faible signifie dans cette analogie que la "dissipation" est faible en comparaison du terme de rappel en ω^2 .

En revenant au pendule dont on réduit le fil au cours du temps, le même argument s'applique aussi et montre que les solutions ne sont pas auto-similaires au sens que l'on a défini. En réalité, dans la classe de problèmes $d(s^\gamma\dot{\theta})/ds = -s^{\gamma-2} \sin(\theta)$ possédant l'invariance par dilatation, le changement de variable fait apparaître un terme dissipatif en $(\gamma - 1)d\theta/du$, qui n'est nul que si $\gamma = 1$, seul problème conduisant à de véritables solutions auto-similaires.

4.1.5 Conclusion

Nous avons montré que pour espérer observer des plis d'échelles différentes sur une même feuille, il faut faire varier son module de flexion de façon à rendre l'équation d'état invariante par homothétie. Nous observons ainsi des

3. Notons que cette "dissipation" n'a aucune interprétation physique pour le système étudié, cette terminologie n'est pertinente qu'à travers cette analogie.

états formés de plis qui semblent bien se déduire les uns des autres par simple changement d'échelle. Cependant les solutions ne sont pas rigoureusement auto-similaires, comme nous l'avons explicité dans un cas particulier.

4.2 PLIS COURBÉS

Cette section est dédiée à l'étude de feuilles comprimées dans des états qui ne sont plus invariants selon la direction z . Cette étude est encore en cours, et devra être complétée. Néanmoins elle apporte sur les travaux des chapitres précédents un éclairage que nous avons jugé assez intéressant pour qu'elle soit exposée en l'état.

On est en effet en droit de se demander si les succès de la description par l'*elastica* montrés plus haut restent pertinents pour une faible courbure⁴ de ces plis. Celle-ci introduit en effet un changement radical dans la description de la plaque en induisant une forme d'énergie élastique précédemment absente : l'énergie d'extension. Celle-ci apparaît lorsque la surface médiane de la feuille n'est pas isométrique au plan de départ, c'est-à-dire lorsque la feuille est étirée (ou comprimée) *en moyenne* dans son épaisseur.

Dans la limite d'épaisseur h tendant vers zéro, l'énergie de courbure varie comme h^3 (voir §25) tandis que l'énergie d'extension évolue comme h . Cette dernière est donc relativement très coûteuse, de sorte que, dans la limite des feuilles minces, le système tendra à la minimiser en premier, en tentant de se restreindre à des surfaces développables [56].

Cependant l'existence de telles surfaces peut être compromise lorsque l'on impose des conditions aux limites trop contraignantes. Celles-ci peuvent en effet interdire des formes de surface développables et par conséquent imposer la présence d'énergie d'extension. Dès lors celle-ci ne peut être négligée, d'autant que son préfacteur en h est bien plus grand que celui de l'énergie de courbure. Dans la limite $h \rightarrow 0$, des études récentes ont montré [5, 57] que la surface développe alors des singularités (d-cones [8, 11, 12, 14, 15] ou plis [40, 41, 42]) concentrant l'énergie d'extension, et en dehors desquelles la feuille est développable. C'est ce qui se produit lorsque l'on froisse une feuille de papier, par exemple.

On peut donc à juste titre craindre que les résultats présentés plus haut ne tombent en défaut dès que les conditions aux limites n'autorisent plus de solution cylindrique⁵. Notamment il se pourrait qu'une faible courbure suffise à induire des comportements entièrement différents dès lors que l'élasticité se trouve dominée par une énergie qui était nulle dans le cas cylindrique.

Pour juger des implications d'une courbure de Gauss dans ce système, nous étudions ci dessous une configuration "perturbée", où des conditions aux limites de faible courbure interdisent l'existence de solutions développables.

4. Dans ce chapitre, on appellera plis "courbés" des plis qui ne sont plus invariants selon $0z$: leur ligne de contact ne sont plus des droites, mais des courbes.

5. On sait, depuis Gauss et son *Theorema Egregium*, que les surfaces développables ont une courbure de Gauss nulle, et ce n'est pas le cas de plis courbés.

4.2.1 Dispositif expérimental

Il s'agit de "courber" les conditions aux limites droites que nous avons utilisées précédemment. Nous procédons comme schématisé sur la figure 4.6. La feuille est encastrée selon deux portions de cercle sur un cylindre de rayon R et d'axe parallèle à Ox . Ici aussi, ces lignes d'encastrement sont cependant trop proches pour que la feuille puisse prendre simplement la forme du cylindre : la feuille présente un excédent de surface. L'expérience consiste alors

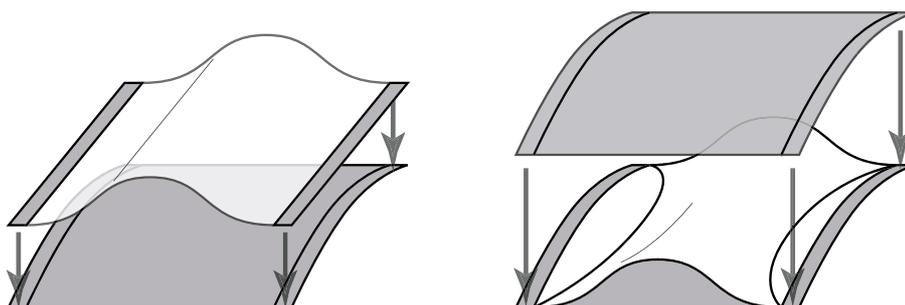


Fig. 4.6 – *Écrasement entre deux cylindres.*

à écraser l'état obtenu avec un deuxième cylindre de même rayon parallèle au premier.

Les états de la feuille ne peuvent plus alors être développables, car ils doivent être courbés dans deux directions différentes, d'une part pour satisfaire la courbure des conditions aux limites, et d'autre part pour satisfaire comme précédemment l'excès de surface.

Déjà, l'état de départ de la feuille non encore comprimée n'est pas simple, comme on peut le voir sur la figure 4.7 page suivante. À chaque extrémité de la feuille, une région reste en contact avec le cylindre, tandis que la partie médiane est décollée et prend une forme cylindrique, mais avec un axe perpendiculaire. Ainsi même l'état de départ (figure 4.7) n'est pas développable⁶.

Dispositif de compression

En pratique, nous avons modifié le dispositif de presse précédent. Désormais la plaque de compression en verre est remplacée par une plaque de PVC transparente, courbée grâce à deux arceaux en métal usinés selon un rayon de 50cm (figure 4.8 page suivante). Sur la plaque mobile est placée une autre plaque courbée, fixée sur des arceaux de forme complémentaire,

6. Dans la limite d'épaisseur nulle, il serait cependant obtenu par recollement de trois régions développables.

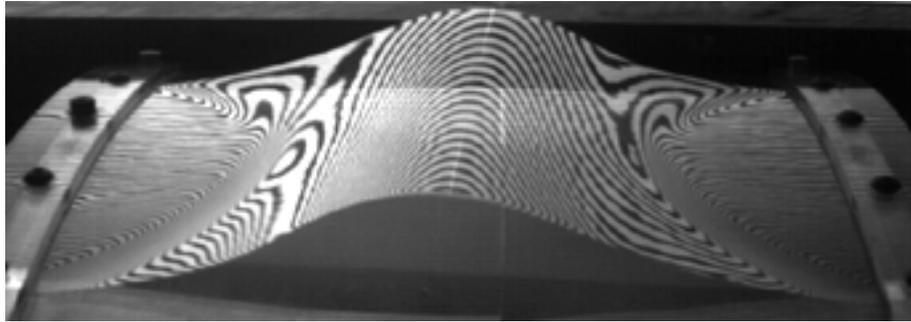


Fig. 4.7 – État de départ non comprimé de la feuille, visualisé par réflexion d'un motif de lignes sur la feuille. On distingue trois régions distinctes.

et sur laquelle on peut fixer deux réglettes à l'aide de vis. Ces réglettes permettent d'imposer les conditions aux limites d'encastrement distantes de $X = 180$ mm. Le dispositif permet donc comme précédemment de contrôler

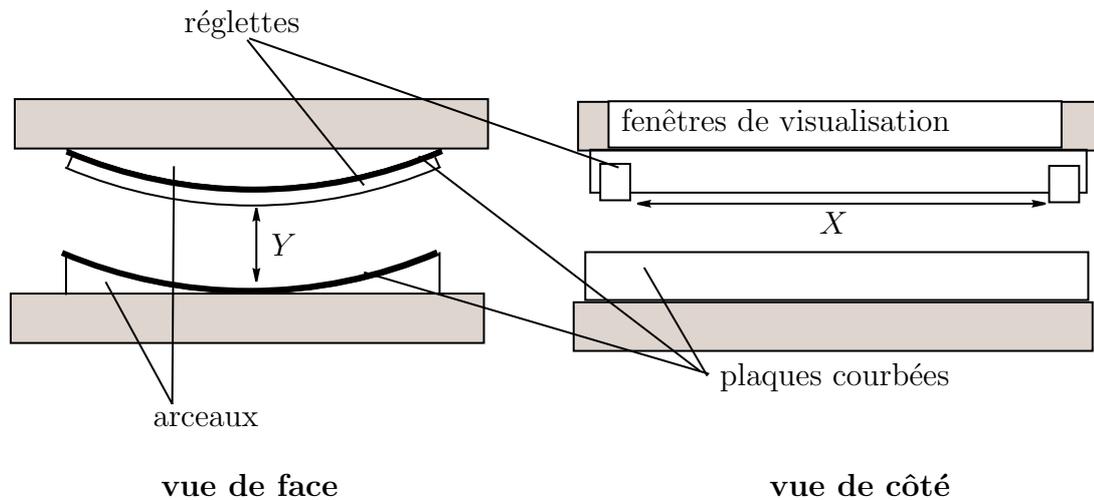


Fig. 4.8 – Dispositif expérimental. Sur les plaques mobiles sont fixées les portions de cylindre qui jouent maintenant le rôle des plaques de compression.

la distance Y entre les deux surfaces de compression désormais courbes, et de mesurer la force de réaction élastique verticale.

Les feuilles utilisées sont des feuilles de polycarbonate de différentes épaisseurs, et de longueur $L = 190$ mm, ce qui correspond à un excès relatif de surface $\mathcal{R} = 5,5\%$.

Dispositif de visualisation

Une caméra est placée au dessus du dispositif, la plaque courbe supérieure étant transparente. Pour bien visualiser les plis, un éclairage de couleurs spécifiques est utilisé sur chaque côté. De ce fait, les flancs de chaque pli réfléchissent une lumière de couleur différente.

4.2.2 Une transition de régularisation

Lorsque l'on comprime le système, le nombre de plis augmente. Différents motifs peuvent apparaître, les plus frappants étant ceux que l'on obtient pour une feuille assez large. On observe alors un réseau de singularités, comme sur la figure 4.9 page suivante et dont le nombre augmente avec le nombre de plis.

Lorsque l'on atteint un nombre de plis critique n_c , le système change brusquement d'état en éliminant toute singularité. Pour cette raison, nous l'appellerons transition de régularisation. Le nouveau type d'états d'équilibre est formé de n plis parallèles dont les lignes de contact suivent la courbure imposée par les conditions aux limites (voir le schéma 4.12 page 117). Vue de haut, cette courbure est masquée, et l'on ne distingue plus que des plis parallèles (voir figure 4.10 page suivante).

Énergie d'extension et transition

Pour comprendre cette transition, nous allons évaluer les ordres de grandeur des énergies de courbure et d'extension pour des plis courbés selon un rayon R .

On peut écrire formellement la densité d'énergie élastique par unité de surface de la façon suivante [5, 51]

$$\mathcal{E} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(1/r_1 + 1/r_2)^2 + Eh\frac{1}{8}\left(\Delta^{-1}\left(\frac{1}{r_1r_2}\right)\right)^2. \quad (4.4)$$

Le premier terme représente la densité d'énergie de courbure et fait intervenir la courbure moyenne, tandis que le second (énergie d'extension) est fonction de la courbure de Gauss⁷ de la feuille.

Évaluons ces termes pour un pli courbé supposé régulier. Nous considérons que l'une des deux courbures $r_1 = r$ est typique du pli lui-même, tandis que l'autre est donnée par la courbure des plaques de compression $r_2 = R$ (voir

7. Celle-ci agit en effet comme un terme source dans une équation en laplacien pour les contraintes tangentielles dans les équations de Föppl-Von Kármán (5.2 page 144).

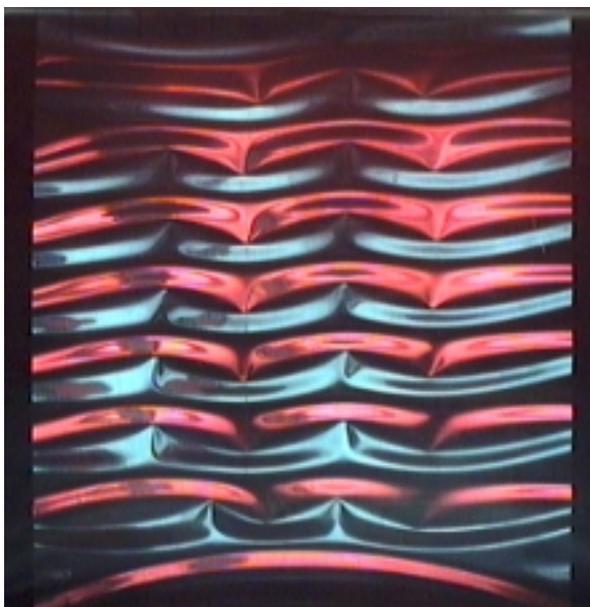


Fig. 4.9 – Photographie d'un état présentant un réseau de singularités. Feuille d'épaisseur $h = 0,05$ mm pour un écrasement $Y = 3$ mm.

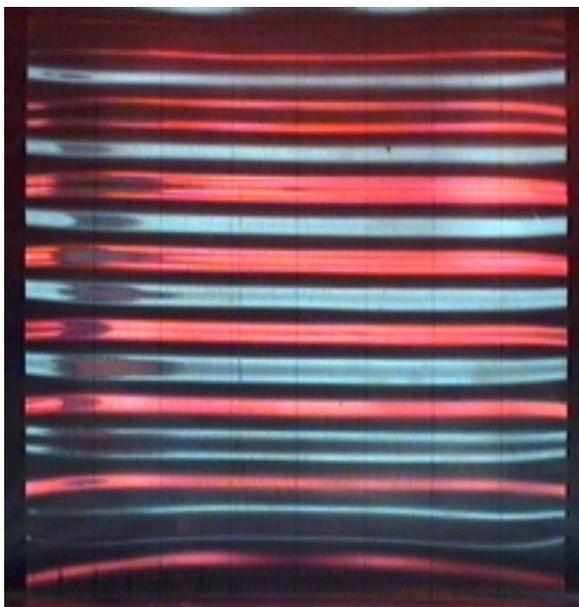


Fig. 4.10 – Photographie d'un état régularisé. Feuille d'épaisseur $h = 0,2$ mm pour un écrasement $Y = 3$ mm.

figure 4.12 page 117). D'autre part, nous prenons pour simplifier $(1 - \nu^2) = 1$, approximation valable à 10% près.

Construisons le rapport $\gamma = E_e/E_c$ de l'énergie d'extension à celle de courbure dans des états réguliers à plis parallèles. Pour cela, utilisons le fait que la courbure typique d'un pli est bien plus grande que la courbure des cylindres $r \ll R$, et introduisons la longueur typique de variation λ de la courbure de Gauss sur la surface. En utilisant l'estimation $\Delta^{-1} \sim \lambda^2$, nous obtenons

$$\gamma = \frac{E_e}{E_c} \sim 3 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{hR}} \right)^4. \quad (4.5)$$

Pour un état à n plis, on peut estimer la longueur λ comme étant de l'ordre de la taille d'un brin, soit $\lambda = \alpha L/n$, avec un α voisin de 1/2. Le rapport des énergies de courbure varie alors comme $\gamma \propto n^{-4}(hR)^{-2}L^4$, c'est-à-dire comme l'inverse de la puissance quatrième du nombre de pli. On peut ainsi passer *très rapidement* d'un régime $\gamma \gg 1$ à un régime $\gamma \ll 1$: d'un pli initial à une dizaine de plis, ce rapport varie sur *quatre* ordres de grandeur.

Dans le premier cas, $\gamma \gg 1$, l'énergie élastique d'un état régulier est donc entièrement dominée par l'énergie d'extension. Il est alors raisonnable de penser que l'on peut trouver des états d'énergie inférieure en répartissant autrement la courbure de Gauss : le système a intérêt à former des singularités et l'état régulier est vraisemblablement instable.

Dans le second cas $\gamma \ll 1$, au contraire, l'énergie étant principalement distribuée sous forme de courbure, on ne gagnerait sans doute pas à concentrer l'extension dans des zones réduites.

La transition apparaît donc lorsque les deux énergies sont du même ordre, pour une certaine valeur de γ d'ordre 1 que l'on notera γ_c . Ceci se produit pour un nombre de plis

$$n_c = \left(\frac{3}{\gamma_c} \right)^{1/4} \frac{\alpha L}{\sqrt{hR}}.$$

Dans ce dispositif, le rayon de courbure R est fixé. Pour vérifier cette loi d'échelle, nous avons plutôt fait varier l'épaisseur de la feuille entre $h = 0,05$ mm, (valeur en dessous de laquelle les feuilles de deviennent très fragiles) et 0,5 mm (valeur pour laquelle les forces en jeu deviennent importantes). Ceci nécessite l'utilisation de plusieurs matériaux plastiques (Lexan, mylar), mais les propriétés mécaniques (E, ν) ne jouent pas, ou peu, dans cette transition. Sur la figure 4.11 page suivante sont représentés les nombres de plis critiques en fonction de l'épaisseur. Les mesures sont réalisées pour une meilleure répétabilité à la remontée : la feuille est écrasée jusqu'à la régularisation, puis la hauteur disponible est augmentée jusqu'à l'apparition

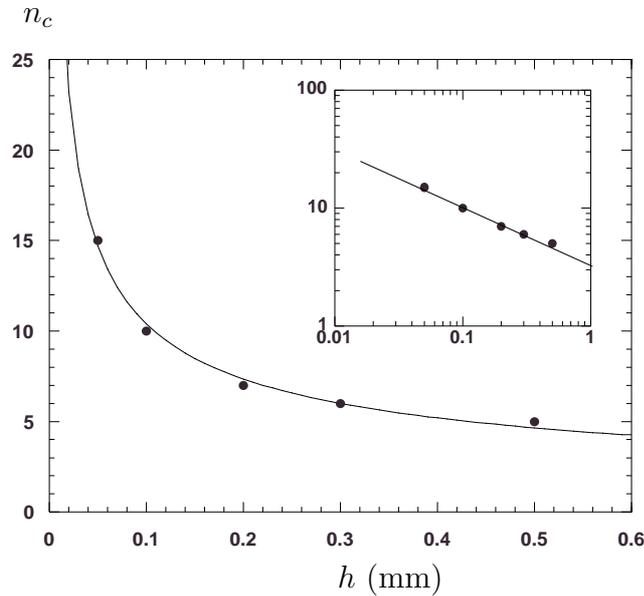


Fig. 4.11 – Nombre de plis à la transition de régularisation en fonction de l'épaisseur (●). En traits continus est représentée la meilleure fonction $(h/h_0)^{-1/2}$. Elle est obtenue pour $h_0 = 10,8$ mm et donne un bon accord avec les mesures.

de singularités. La variation de n_c en $h^{-1/2}$ est bien vérifiée, même si l'on ne dispose que d'une décade de variation de l'épaisseur.

Pour évaluer le rapport γ_c , le coefficient $h_0 = 10,8$ mm de la meilleure loi $n_c = (h_0/h)^{1/2}$, est injecté dans la relation précédente. Cela conduit à $\gamma_c = 8,4$ si $\alpha = 1/2$, ce qui est bien d'ordre unité, par rapport à sa valeur initiale avant compression (de l'ordre de 10^5 pour $h = 0,1$ mm).

4.2.3 Comportement mécanique des états régularisés

Que peut-on attendre de la réponse élastique à la compression de ces états réguliers? En particulier, subsiste-t-il un lien avec l'*elastica*?

Puisque les états sont réguliers, on peut les décrire par une courbe : leur intersection avec un plan vertical (figure 4.12 page ci-contre). Celle-ci permet de définir, comme précédemment (chapitre 1), l'angle θ et l'abscisse curviligne s . D'autre part, on peut attacher à chaque point de cette courbe l'énergie de la ligne qu'elle représente. En posant $r_1 = R$ et ⁸ $r_2 = \hat{\theta}$, on est conduit à une

8. En réalité on n'a pas exactement $r_1 = R$ car le rayon de courbure doit être projeté en $R/\cos(\theta)$, mais nous ferons l'approximation $\cos(\theta) \sim 1$

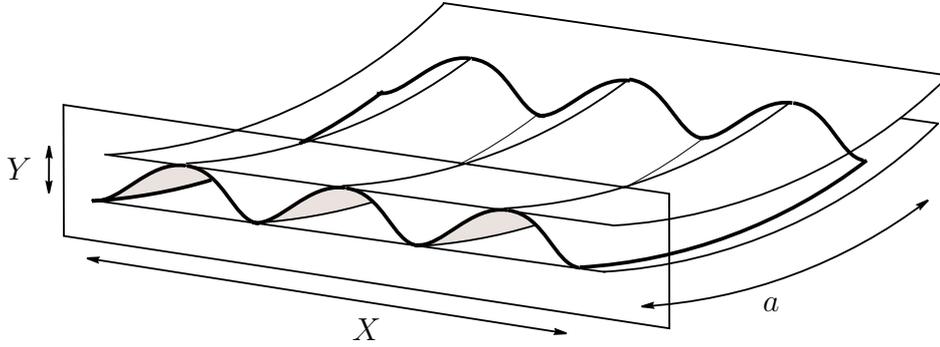


Fig. 4.12 – Les états réguliers peuvent être simplement décrits par une courbe. Ce problème est alors très proche de celui de l'*elastica*

densité linéique d'énergie de la forme

$$\mathcal{E} = \frac{Eh^3a}{12(1-\nu^2)}(\dot{\theta} + 1/R)^2 + Eh\frac{a\lambda^4}{8R^2}\dot{\theta}^2. \quad (4.6)$$

Développons $(\dot{\theta} + 1/R)^2 = \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}/R + 1/R^2$. Le second terme de cette expression peut être oublié car son intégration $\int \dot{\theta}/R ds = [\theta/R] = 0$ ne contribuera pas à la variation d'énergie si les angles des extrémités sont, comme ici, fixés. Le troisième étant constant, on peut remplacer l'énergie linéique par l'expression équivalente

$$\mathcal{E} = Eha \left[\frac{h^2}{24(1-\nu^2)} + \frac{\lambda^4}{8R^2} \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}EI'\dot{\theta}^2. \quad (4.7)$$

L'énergie élastique *totale* prend ainsi une forme *similaire* à celle de l'*elastica* (page 23), mais avec un module effectif de flexion I' *différent* et qui dépend de la longueur caractéristique λ . Avec $\lambda = \alpha L/n$, il vient $I' = I_c + I_e$ avec

$$I_c = \frac{Eh^3a}{12(1-\nu^2)}, \text{ module de flexion habituel}$$

$$I_e = \frac{Eha\alpha^4L^4}{4n^4R}, \text{ module supplémentaire,}$$

ou encore $I' = I_c[1 + \gamma(n)]$.

Dans le régime des états réguliers, l'énergie de la feuille prend ainsi une forme tout à fait similaire, à un facteur près, à celle de l'*elastica*. Or les conditions globales sur cette courbe sont les mêmes : taille X , hauteur maximale Y imposés. D'autre part, les variations de la longueur L sont du même ordre

que dans l'écrasement plan, puisque les énergies élastiques en jeu sont du même ordre. Elle peut donc être considérée comme quasiment constante, par rapport aux autres variations de longueur (X, Y) .

Considérons alors l'expérience de référence qui consiste à écraser la même feuille entre deux plaques planes ($R = \infty$) avec le même excès de surface. Les quantités ayant trait à cette expérience seront notées avec un ∞ en indice.

Le problème de minimisation étant identique dans les deux cas, il va conduire à des états d'équilibres identiques $\theta = \theta_\infty$. Il s'ensuit que le comportement mécanique sera lui aussi comparable. En particulier, les forces en jeu dans le cas courbé se déduisent du cas plan par un facteur multiplicatif I'/I_∞ , fonction du nombre de pli par l'intermédiaire de γ :

$$F(Y) = \frac{I'}{I_\infty} F_\infty(Y) = [1 + \gamma(n)] F_\infty(Y)$$

Test expérimental

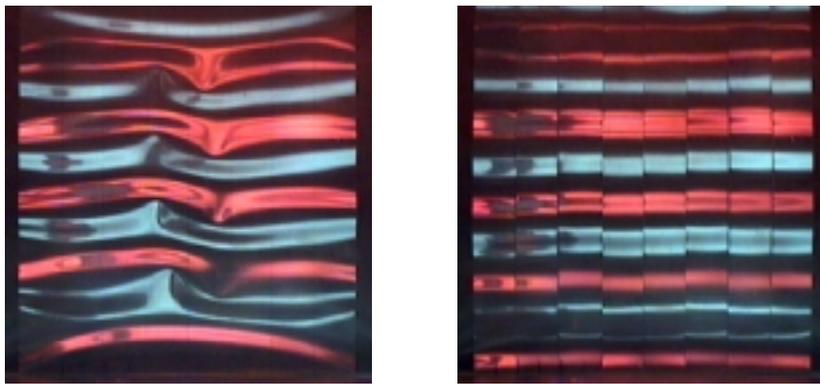
Pour tester expérimentalement cette proposition, mesurons la réponse mécanique dans le régime régularisé d'une feuille de largeur $a = 15,5$ cm, d'épaisseur h et d'excès de surface relatif 4,5%.

Intéressons nous tout d'abord à une hypothèse implicite : l'extensivité de l'énergie avec la largeur. La feuille encadrée est progressivement découpée dans sa largeur en 2 puis en 4, en 8 et finalement en 16 lamelles identiques. La réponse mécanique de la collection de lamelles est enregistrée à chaque étape. On fait ainsi varier la largeur a de 155 mm jusqu'à 9,5 mm. L'astuce de la découpe in situ de la feuille est de ne pas modifier les conditions aux limites, dont on sait par ailleurs combien elles peuvent influencer sur l'état du système notamment par une variation de l'excès de surface. De surcroît, en découpant la même feuille, on garde les mêmes échelles de forces, ce qui facilite les comparaisons de réponse mécanique et conserve la même rétroaction des feuilles sur les plaques de compression.

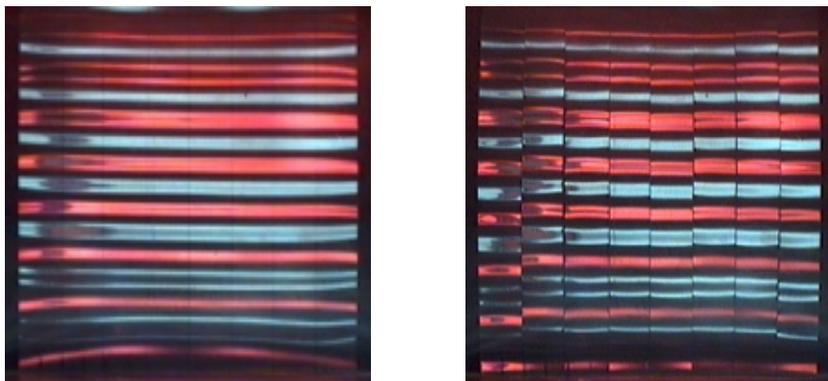
Au delà de la transition de régularisation, les états que l'on observe pour la collection de tiges et pour la feuille elle-même sont tout à fait semblables. Les mesures de forces l'attestent avec une très bonne précision en se retrouvant sur une réponse unique (figure 4.14 page 120). Ceci prouve que l'énergie est bien répartie de façon *uniforme* selon la direction courbe, et montre que l'on peut ramener le système à l'une de ses tranches.

Cette réponse mécanique présente d'autre part des propriétés frappantes qui rappellent fortement celles de l'*elastica* :

- elle est composée de plusieurs branches, chacune correspondant à un



$Y = 5 \text{ mm}$



$Y = 3 \text{ mm}$

Fig. 4.13 – *La collection de lamelles (à droite) et la feuille entière (à gauche) ne sont dans le même état qu'au delà de la transition de régularisation, pour $Y < 3 \text{ mm}$*

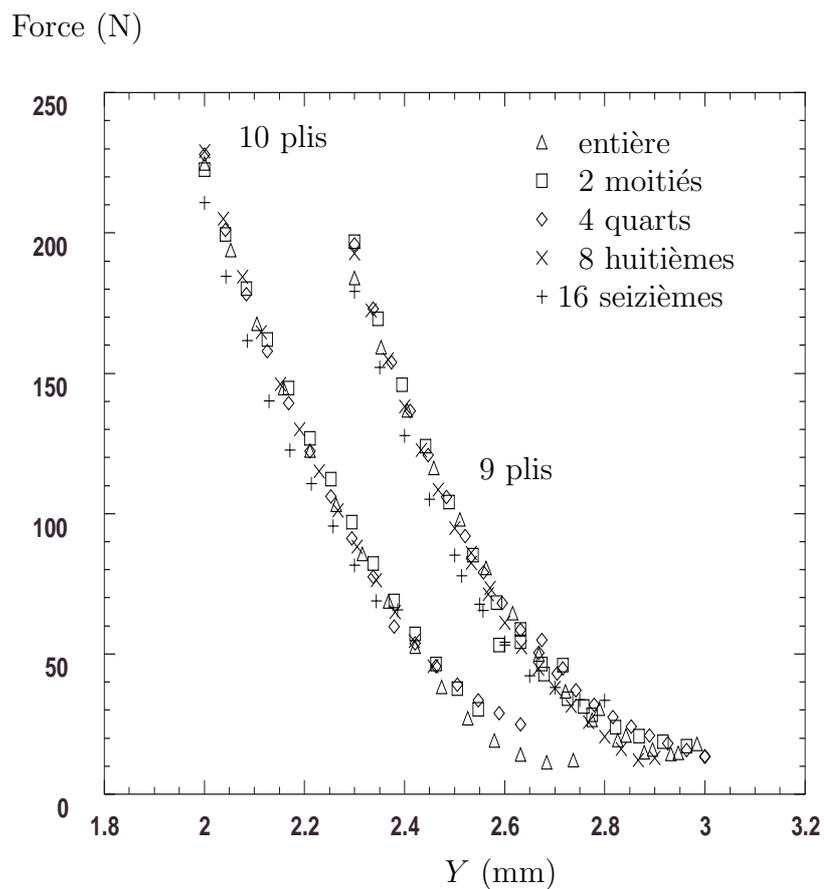


Fig. 4.14 – *Les différentes réponses mécaniques se recourent avec une excellente précision, ce qui montre que la force est une fonction extensive de la largeur a . Notons que l'on obtient un diagramme rappelant la réponse de l'elastica (figure 3.2 page 75)*

nombre de plis fixé⁹;

- chaque branche fait apparaître des états où la réponse mécanique de la feuille est nulle (ou très faible), comme dans le cas d'écrasement plan.

Lors de notre étude de plis écrasés entre deux plans, nous avons montré que le système obéit à la loi d'échelle partielle et discrète $F_\infty(Y/n) = n^3 F_\infty(Y)$. Dans le problème qui nous occupe, il faut noter que le module de flexion effectif I' est une fonction de n , de sorte que la loi d'échelle que l'on attend est de la forme

$$F(Y/n) = n^3 \frac{I'(n)}{I'(1)} F(Y). \quad (4.8)$$

Cette fonction $F(Y)$, qui correspondait aux états de la feuille formés d'un *seul* pli, ne peut plus prendre ce sens ici, car en dessous d'un nombre de plis n_c , la feuille n'est plus dans le régime régularisé pour lequel (4.8) est valable.

La variation en n de $F(Y/n)$ est précisée à l'aide des expressions de I_c et I_e :

$$\frac{F(Y/n)}{n^3 + b/n} = F_\infty(Y) \quad (4.9)$$

où $b = \gamma n^4 = 3(1 - \nu^2)(\alpha L)^4 (Rh)^2$ est un paramètre adimensionné constant. Notons que F_∞ est indépendant non seulement du nombre de plis, mais aussi du rayon de courbure R . Enfin, le seul paramètre ajustable de la loi d'échelle se trouve être le coefficient α qui relie la longueur typique λ à la longueur du pli.

Sur la figure 4.15 page suivante, les mesures de forces sont représentées pour un nombre n de plis compris entre le seuil de régularisation $n_c = 7$ à cette épaisseur et $n = 10$. Le tracé de ces mêmes données dans un diagramme $(nY, F/n^3)$ montre que la loi d'échelle du cas plan $F \sim n^3$ (voir 78) n'est plus valable ici.

En revanche les mêmes mesures reportées (figure 4.16 page 123) dans un diagramme $[nY, F/(n^3 + b/n)]$ montrent un bon recouvrement des données. Ceci légitime la loi d'échelle (4.9) pour $\alpha = 0.35$, valeur¹⁰ qui est bien proche de $1/2$ (i.e. $b=5600$ pour cette épaisseur). À titre de comparaison, nous avons déduit par simulation numérique¹¹ la réponse mécanique pour $n = 1$ de la

9. Le passage de l'une à l'autre se fait assez brutalement, sans que l'on n'observe en général de pli en suspens.

10. Avec cette meilleure estimation de α , la transition de régularisation intervient pour γ_c de l'ordre de 2.

11. Pour dimensionner ces calculs, nous devons mesurer le module d'Young des feuilles. Ceci a été réalisé par la mesure de la flèche de feuilles de différentes longueurs encastées horizontalement à une de leur extrémité et libres de l'autre. Ceci, comparé à une simulation tenant compte de la gravité, donne après pesage de la feuille $E = 1,9$ GPa.

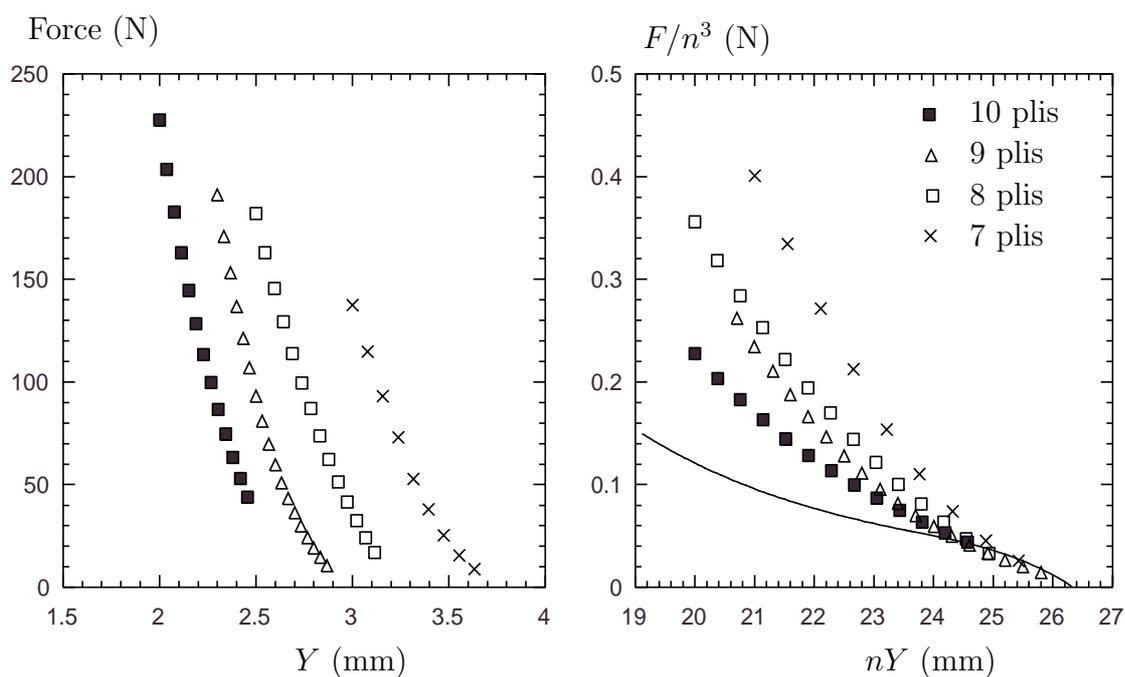


Fig. 4.15 – Mesures de forces de 7 à 10 plis. À droite on a compensé par le facteur en n^3 utilisé au chapitre 3 pour les plis droits. Mais ceci ne donne pas ici un bon recouvrement des données. À titre de comparaison, la ligne continue représente les valeurs calculées pour une plaque similaire écrasée entre deux plans.

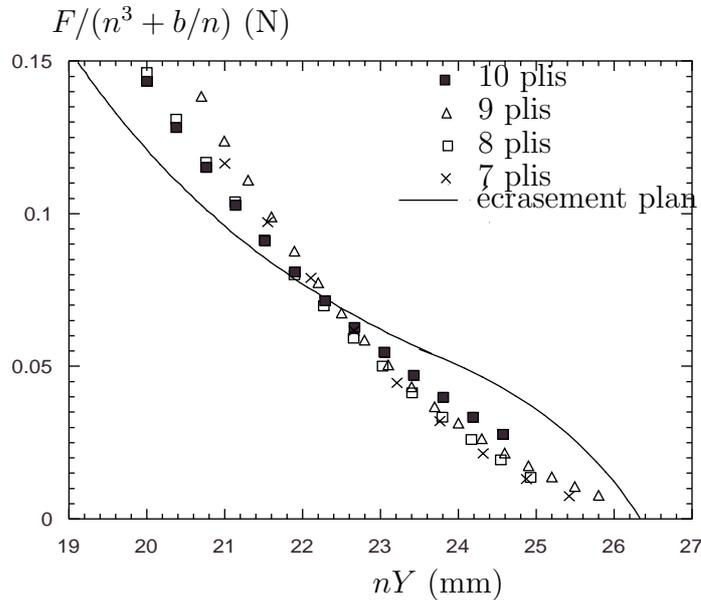


Fig. 4.16 – Mesures adimensionnées par le facteur $n^3(1 + b/n^4)$ où $b = 5600$ est le meilleur facteur. Ceci revient à tenir compte du module de flexion effectif pour $\alpha = 0,35$ (la longueur typique de variation de la courbure est $\lambda = \alpha L/n$). Le bon recouvrement des mesures atteste que la loi d'échelle (4.9) est bien vérifiée. En ligne continue est représentée l'intégration de l'elastica dans des conditions similaires. L'accord n'est que qualitatif.

même feuille écrasée entre deux plans (en ligne continue sur la figure 4.9) pour $n = 1$, obtenue par simulation numérique. On retrouve une réponse d'ordre de grandeur très comparable, mais le recouvrement n'est pas parfait.

La présence du terme en $bn^{-4} = \gamma$ est la signature de l'énergie d'extension dans le système. Notons qu'il est d'autant plus petit que la courbure est faible, ou que l'épaisseur de la feuille augmente. Comme prévu par l'argument de régularisation, son influence décroît très rapidement avec le nombre de plis. Ceci est visible sur la figure 4.15 par le fait qu'à mesure que le nombre de plis augmente, les branches se rapprochent de la ligne continue représentant la réponse mécanique de l'elastica ($b = 0$ car $R = \infty$). Pour un nombre de plis croissant on doit donc se rapprocher non seulement de la loi d'échelle de l'elastica mais aussi de la réponse mécanique du cas plan elle-même.

Ainsi c'est dans la limite des forts écrasements que l'on peut oublier le rayon de courbure R , l'énergie d'extension associée devenant négligeable. Cela paraît peu intuitif par rapport au froissement du papier, car le nombre de

singularités, et donc les effets de l'extension semblent dans ce cas augmenter avec le taux de compression. Il nous reste à comprendre pourquoi le nombre de singularité augmente au cours de la compression alors que le rapport d'énergie d'extension sur énergie de courbure leur est de moins en moins favorable.

4.2.4 Réseau de d-cônes et cascade transverse

Étudions maintenant la répartition des singularités dans les états non régularisés.

Scénario de répartition de singularités : une cascade transverse

Bien avant la transition de régularisation ($\gamma \gg 1$), une répartition uniforme de l'énergie d'extension s'avère très coûteuse par rapport à l'énergie de courbure. Nous sommes typiquement dans la configuration du papier froissé, et dans la limite $\gamma \rightarrow \infty$ (équivalente à $h \rightarrow 0$), nous devons minimiser l'énergie d'extension et donc, si possible, trouver une surface isométrique à la feuille plane satisfaisant les conditions aux limites, quitte à autoriser localement des singularités. Notons que ce problème purement géométrique ne fait plus intervenir l'épaisseur h , de sorte que toutes les feuilles satisfaisant à $\gamma \gg 1$ prendront la même forme.

L'expérience montre que les états sont formés de "brins" qui connectent les deux plaques de compression. Ceux-ci peuvent être divisés en deux zones (figure 4.17 page ci-contre) : l'une où la feuille est en contact avec l'une des deux plaques courbées (zones A et C), et l'autre réalisant la jonction entre les plaques (notée B). Les zones de contact sont des portions de cylindres de rayon R , par conséquent isométriques au plan de départ.

Sachant cela, quelle peut être la portion de jonction B ? Suivant [56, 57], nous remarquons que les réflexions sur un plan permettent de conserver les distances [51, 52]. Cette zone de jonction pourrait ainsi consister en une portion d'un autre cylindre (de même rayon R) obtenu par réflexion plane du cylindre qui supporte la zone de contact (figure 4.18 page 126). Cette proposition conduit ainsi à un découpage de la feuille en cylindres de rayon R , qui se coupent selon des ellipses¹², dont les caractéristiques ne dépendent que du rayon R et de l'inclinaison du plan de réflexion. Celui-ci est tel que les conditions géométriques d'excès de surfaces et de hauteur soient respectées, il ne dépend donc que de $(l - x)/x$, et de y/x , où x, y et l sont définis sur les

12. L'intersection de deux cylindres de même rayon est une ellipse, car c'est également l'intersection de chaque cylindre avec le plan de symétrie du problème.

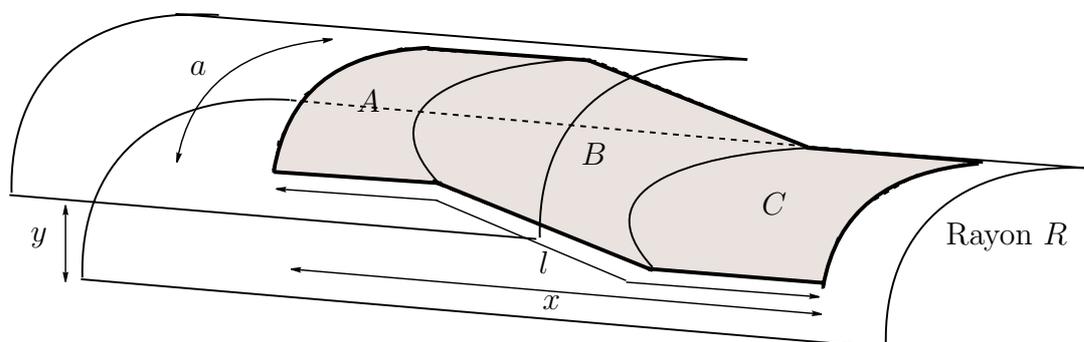


Fig. 4.17 – Les “brins” peuvent être divisés en deux zones de contact avec l’une des deux plaques de compression (A,C) et une zone de jonction B.

figure 4.17 et 4.19. Au total, les caractéristiques des ellipses d’intersection ne dépendent donc que de R et des rapports de longueurs $(l - x)/x$ et y/x .

Dans la limite $\gamma \rightarrow \infty$, un calcul très simple permet de se rendre compte que l’angle u est donné par $\tan(u) = y/(l - x)$. En effet, si l et x sont les grandeurs relatives à la portion de jonction, alors $l - x = y(1/\sin 2u - \cot 2u) = y \tan(u)$.

Remarquons que pour des plis similaires, obtenus à différents écrasements, les rapports $(l - x)/x$ et y/x sont les mêmes. On en déduit que leurs ellipses d’intersection introduites précédemment sont identiques : elles sont invariantes par $n \rightarrow n + 1$.

Cette propriété devient problématique si l’on réalise que ces portions d’ellipses, occupent ainsi une place donnée x alors que la taille de leur domaine d’occupation diminue en $1/n$ comme le nombre de plis. Il vient donc un moment où ces ellipses sont trop grandes devant le domaine qui leur est disponible. La frustration géométrique est telle que le système choisit de remplacer la part d’ellipse initiale par deux de ses portions (figure 4.20 page 128). Ce faisant, les caractéristiques propres de l’ellipse sont encore les mêmes, mais l’amplitude selon x est diminuée : la frustration est résolue, au prix de l’introduction d’une singularité, vraisemblablement en d-cône [5, 11]. Le nombre de singularités augmente ainsi avec le nombre de plis, de sorte que l’on assiste à une *cascade transverse* de générations de singularités. Celles-ci se positionnent alors naturellement en réseau pour une raison *purement géométrique* : les d-cônes sont séparés par *la même portion d’ellipse*.

Estimons le nombre de singularités en approximant l’ellipse par son cercle

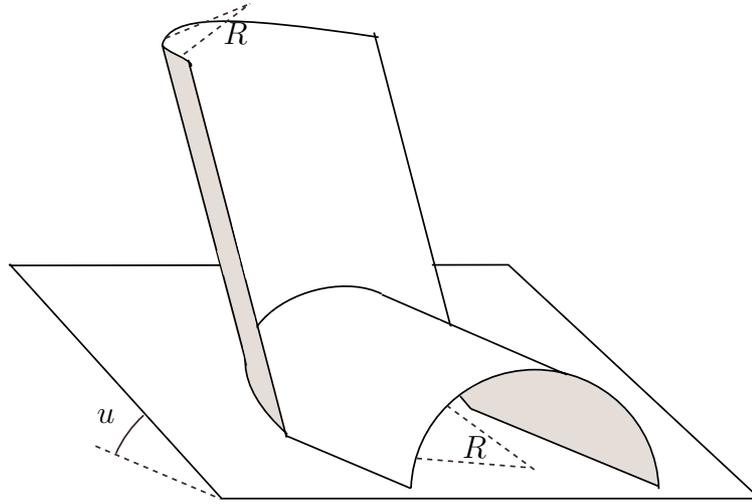


Fig. 4.18 – La réflexion plane est une transformation isométrique.

osculateur¹³ de rayon R_e . Sa flèche x_e dans la direction x est reliée à son envergure par $x_e \sim a_e^2/8R_e$, avec $a_e = a/n_s$ où a est la largeur de la feuille, et n_s le nombre de singularités par plis. Comme x_e est borné par la taille $x = X/n$, des plis, on en déduit que $n_s \sim (nR_e)^{1/2}X/a$. Le nombre total de singularités sur la feuille vaut donc $nn_s \sim n^{3/2}$.

Il n'est pas évident de tester ce modèle extrêmement simplifié, car le nombre de singularités par ligne n'augmente que comme \sqrt{n} , alors que le régime de singularités se limite à un faible nombre de plis. On ne dispose donc malheureusement pas ici d'une assez grande gamme pour pouvoir tester cette loi en fonction de n . Cependant certains éléments semblent être en accord avec cette analyse :

- Loin de la transition, la répartition des singularités est indépendante de l'épaisseur h de la feuille.
- On aurait pu s'attendre, au moment de la transition de régularisation, à un nombre de singularités tendant vers zéro. Or celles-ci sont au contraire nombreuses, ce qui montre que leur répartition obéit à un autre type de loi que celle issue de la comparaison des deux types d'énergies. Ici il s'agit d'une répartition *purement géométrique*, ne faisant pas intervenir l'épaisseur h de la plaque.
- Lorsque l'on augmente la largeur a , le nombre de singularités augmente sans que la forme de l'intersection (limite des zones colorées sur la figure 4.9) ne change beaucoup.

13. Cette approximation sera d'autant meilleure que le nombre de plis est plus grand

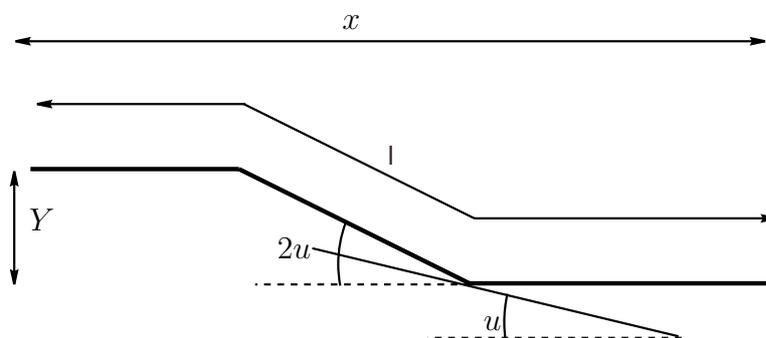


Fig. 4.19 – Dans la limite $\gamma \rightarrow \infty$, une coupe dans un plan xy est composée de segments de droites. On détermine aisément l'angle u .

- La courbure de ces motifs entre les singularités est relativement homogène sur un écrasement donné, et ne varie pas de façon très notable au cours de l'écrasement.

Comportement mécanique

De façon surprenante, le comportement mécanique des plis continue cependant à obéir à une loi d'échelle simple malgré la présence de singularités. Si l'on note n le nombre de plis, on retrouve en effet une loi de type *elastica*, $F(Y) = n^3 F(Y)$, avec ici aussi des annulations répétées de la force de réaction (figure 4.21 page 129). Nous n'avons pas pour l'instant d'argument qui permette de comprendre pourquoi cette loi d'échelle est satisfaite dans ce cas complexe dominé par une énergie élastique concentrée au voisinage des lignes elliptiques d'intersection et dans le cœur des singularités. Ce régime paraît très intéressant car il comporte un réseau régulier et reproductible de singularités. En ce sens, il présente un cadre prometteur d'étude de la formation de ces singularités, leur interaction et de leur impact sur le comportement mécanique global.

4.2.5 Conclusion

Nous avons montré que des feuilles écrasées entre deux cylindres présentent des états très intéressants formés de réseaux réguliers de d-cônes de plus en plus serrés. Nous avons donné des raisons plausibles purement géométriques de cet arrangement surprenant.

D'autre part, les feuilles subissent au cours de l'écrasement une transition de régularisation éliminant toute singularité pour conduire à des états où

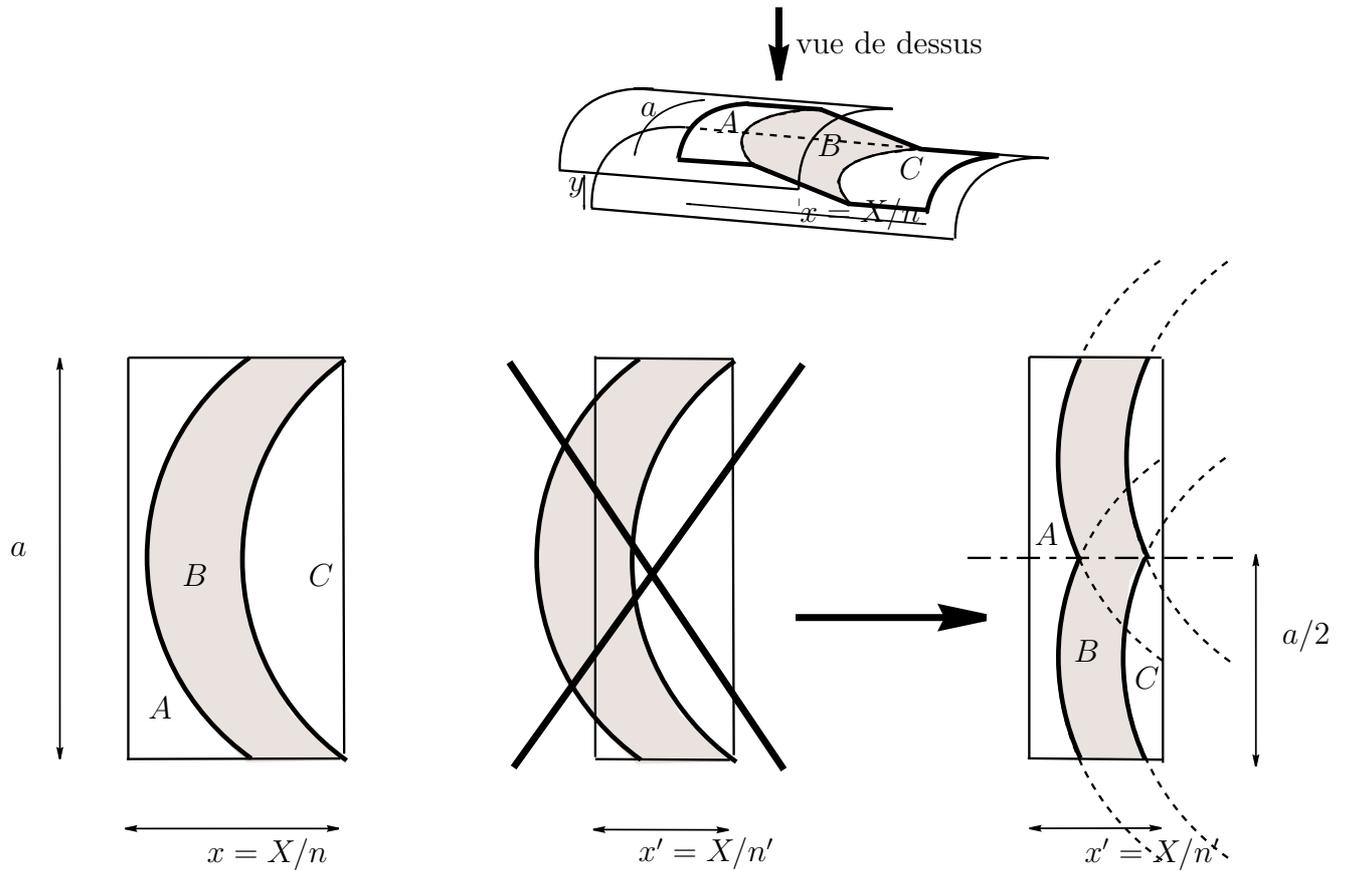


Fig. 4.20 – Mécanisme d'apparition de singularité. Les intersections bordant les zones en grisé sont des portions d'une même ellipse, invariante par $n \rightarrow n + 1$. Lorsque la taille $x = X/n$ du pli qui doit les abriter diminue, le système résout le conflit en scindant la portion d'ellipse en deux de ses moitiés.

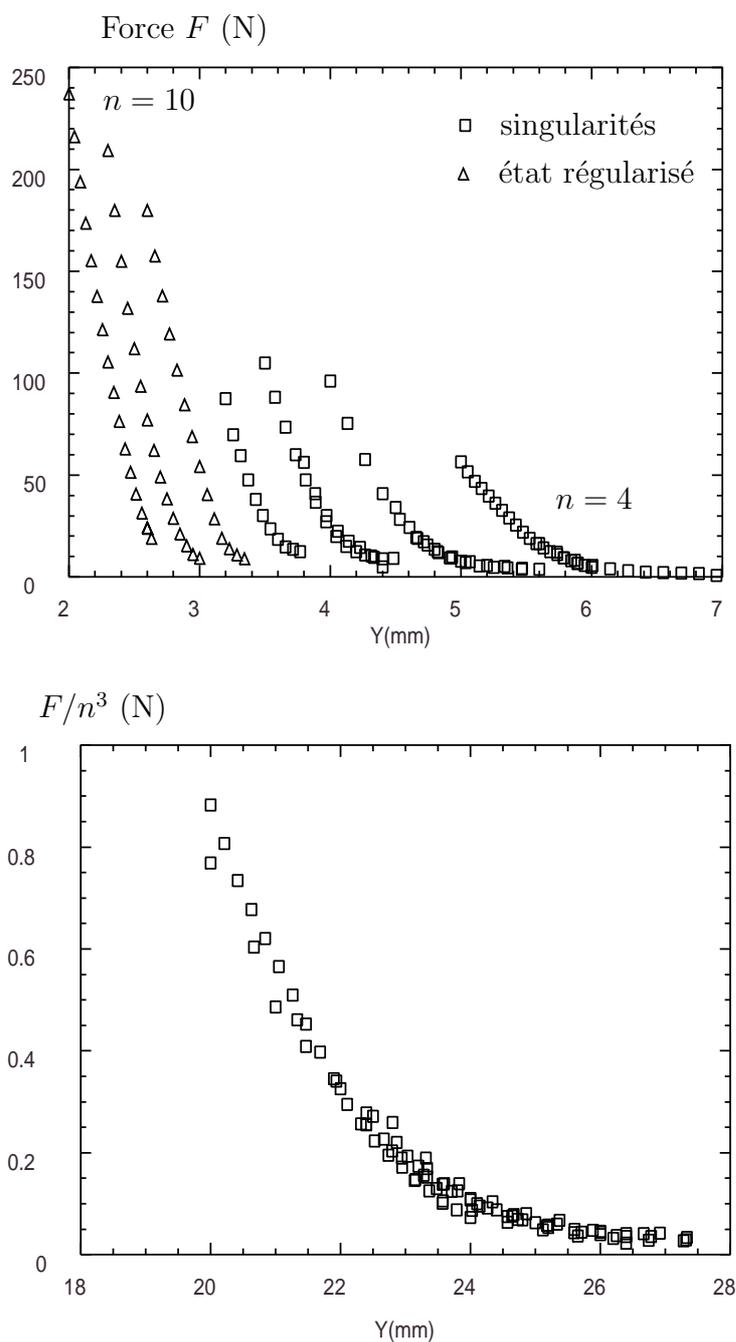


Fig. 4.21 – Réponse mécanique pour une plaque de largeur 15,5 cm, d'épaisseur $h = 0,2$ mm. En bas, un excellent recouvrement des mêmes données est obtenu pour la zone non régularisée dans un diagramme $(nY, F/n^3)$. Ces états complexes suivent donc la même loi d'échelle que l'elastica !

la courbure de Gauss est répartie de façon homogène sur la feuille. Nous avons montré que cette transition était associée à un changement d'ordre de grandeur relatif des énergies d'extension et de courbure¹⁴. Ces nouveaux états peuvent alors être traités avec un formalisme de type *elastica* à un coefficient de renormalisation près, fonction de l'énergie d'extension et des échelles des plis. La réponse mécanique de ces états est ainsi très similaire à celle des chapitres précédents.

Ces résultats démontrent la généralité de l'*elastica* : celle-ci ne saurait être cantonnée à la description de tiges, mais décrit bel et bien tout état assez régulier pour être décrit par une courbe, et dont l'énergie est proportionnelle au carré de la courbure de celle-ci. Or ces états réguliers ne sont pas forcément rares, comme nous l'avons constaté ici.

Soulignons que la limite habituelle de la théorie des plaques minces, qui consiste à faire tendre l'épaisseur de la plaque vers zéro, peut faire oublier un fait physique important et général : lorsque les longueurs caractéristiques diminuent, l'énergie de courbure devient dominante sur l'énergie d'extension.

14. La transition observée ici est donc de nature très différente de celle rapportée dans [8] où une colonne d'Euler est comprimée ponctuellement. En effet, dans ce cas les singularités s'éloignent les unes des autres pour atteindre les bords de la plaque et disparaître. C'est donc la taille finie du système qui contrôle alors le moment de la régularisation.

4.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre une variation de largeur de la feuille, ou d'orientation du substrat (courbure) a été introduite le long de la direction qui était invariante pour les plis des études précédentes. Ceci nous a permis de démontrer la robustesse des propriétés de l'*elastica*, et donc son intérêt en tant que modèle pour la compréhension de ces situations plus complexes.

En particulier, la cascade spatiale de plis dans un écrasement en coin ne peut être observée qu'en découpant la feuille selon les enseignements de l'*elastica* (chapitre 3) sur la loi d'échelle de la force.

D'un autre côté, nous avons pu observer qu'une faible courbure des conditions aux limites ne modifie pas l'allure générale de la réponse mécanique dans le régime où les plis sont réguliers. Mieux : on trouve une loi d'échelle déduite de celle de l'*elastica* grâce à une renormalisation du module de flexion tenant compte de l'énergie d'extension.

5. INSTABILITÉS SECONDAIRES DE FLAMBAGE ET DÉLAMINAGE

Comme dans la première partie de cette thèse, partons d'une feuille plane initialement horizontale. Lorsque l'on exerce une contrainte uniaxiale suffisante dans son plan, elle flambe. Une augmentation de cette force ne conduit cependant pas à de nouvelles bifurcations alors que des évolutions plus intéressantes sont obtenues lorsque l'on rajoute une contrainte supplémentaire.

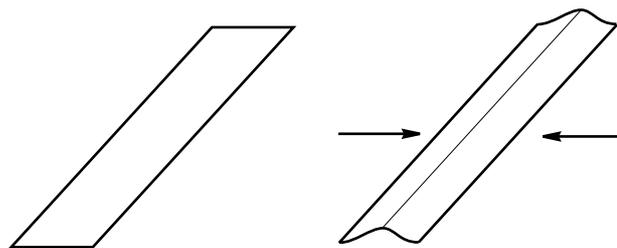
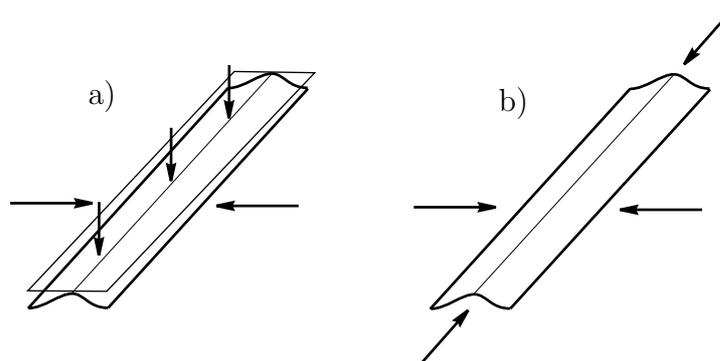


Fig. 5.1 – Après avoir étudié la cascade de bifurcations générée par une compression verticale (a), nous nous intéressons à une contrainte dans le plan initial de la feuille (b).



Nous avons étudié dans les chapitres précédents (1 à 4) les effets d'une compression de cet état flambé entre deux plaques rigides horizontales. Il s'agissait ainsi de limiter l'extension verticale du système (figure 5.1-a).

Cette contrainte supplémentaire perpendiculaire à la contrainte initiale a alors donné lieu à une cascade de bifurcations.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une compression toujours perpendiculaire à la direction de flambage, mais cette fois dans le plan de la plaque initiale (figure 5.1-b). Nous allons voir que cette contrainte donne lieu à des bifurcations secondaires, et à un riche diagramme de stabilité. De façon étonnante, il ne semble pas avoir été rapporté dans la littérature, bien que l'instabilité primaire de flambage soit très bien connue sous des répartitions de contraintes très variées [66].

Il est à noter d'autre part que ce problème académique comporte des applications importantes dans le domaine du délaminage de films minces. Après les avoir exposées, nous détaillerons le dispositif expérimental et le calcul du diagramme de stabilité, que nous comparerons pour finir aux expériences.

5.1 LIEN AVEC LE DÉLAMINAGE

Le dépôt de couches minces présente de nombreuses applications pratiques. Leur intérêt provient du fait que l'objet composite obtenu après dépôt allie les propriétés *volumiques* du substrat (densité, module d'élasticité...) aux propriétés de *surface* du film déposé (résistance chimique, résistance mécanique, isolation thermique, conduction électrique...).

Les techniques de dépôt sont variées, mais toutes laissent généralement des contraintes résiduelles importantes dans le film. Par exemple, un film obtenu par évaporation puis condensation, est préparé à haute température. Lors du refroidissement, la différence de coefficient de dilatation thermique entre substrat et film crée alors des contraintes. Selon son signe, on peut ainsi observer des fractures (le film est étiré), ou des cloques (contraintes compressives).

La mécanique de ces cloques est difficile, car elle résulte d'un couplage entre deux phénomènes eux-mêmes complexes : l'élasticité du film décollé, et la fracture des liaisons chimiques entre film et substrat. En particulier, un modèle de fracture réaliste est nécessaire pour expliquer le fait que le film ne se décolle pas totalement [3, 35, 36]. Cette interaction donne lieu à des phénomènes surprenants, comme le délaminage en "fil de téléphone" [27, 29, 32, 45], où les cloques prennent la forme de doigts qui se propagent en oscillant avec une longueur d'onde bien définie (figure 5.2).

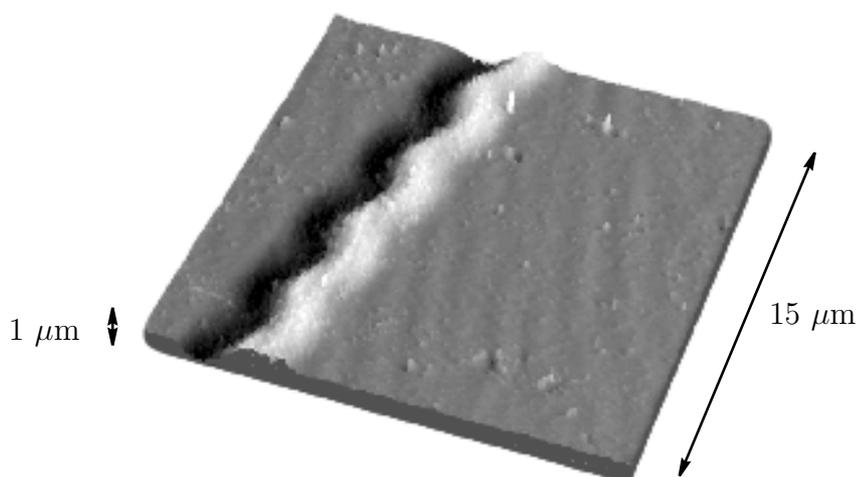


Fig. 5.2 – Image obtenue par AFM d'un délaminage en fil de téléphone. (Nous remercions C. Coupeau pour le prêt de cette figure)

Une étude récente [3] a montré que si l'on fixe les limites de la cloque,

l'élasticité du film seule pourrait expliquer ces motifs. En effet une cloque droite infinie soumise à une contrainte isotrope assez forte subit une instabilité élastique selon un mode très semblable à celui de la cloque en fil de téléphone [2]. Ce raisonnement statique ne prétend pas expliquer l'évolution dynamique d'une cloque, mais montre que ce mode oscillant est un moyen réellement choisi pour relâcher des contraintes autant longitudinales que transverses.

Nous avons élargi le problème en étudiant les états d'équilibre d'une bande initialement plane soumise à des contraintes bi-axiales quelconques et à des conditions aux limites d'encastrement.

5.2 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Il s'agit d'exercer sur une bande de largeur $2b$, d'épaisseur h et de grande longueur, des contraintes longitudinales et transverses.

5.2.1 Quelques ordres de grandeur

Nous présentons ici les nombreuses difficultés expérimentales auxquelles nous avons été confrontés pendant la mise au point de cette expérience.

Imposer une compression bi-axiale

La difficulté essentielle consiste à générer de façon contrôlée deux compressions d'amplitudes différentes selon des axes orthogonaux. En effet, s'il est relativement facile de rapprocher les deux côtés opposés d'une plaque, il s'agit ici ensuite que ces côtés soient *eux-mêmes* comprimés longitudinalement. C'est la réalisation simultanée de ces deux conditions qui est très ardue, lorsque l'on désire, comme ici, s'aventurer au delà des compressions isotropes [17, 68].

Ordre de grandeur des contraintes

Les contraintes que l'on veut imposer à la feuille sont de l'ordre de quelques fois celles nécessaires au flambage de la colonne d'Euler – voir (5.6). Pour une longueur b de 10 mm et une épaisseur h de 0,1 mm, la diminution relative de longueur associée à une telle contrainte est de l'ordre de 10^{-4} . Soit, sur notre feuille de largeur $2b = 20$ mm, une variation de longueur de l'ordre de $2 \mu\text{m}$. Cela est bien en dessous de la précision des pièces couramment usinées sur de grandes plages au laboratoire.

Les forces compressives en jeu, par exemple sur la grande longueur l , sont également faibles. Pour une feuille de polycarbonate, avec une longueur $l = 300$ mm, $F = \sigma hl \sim 6$ N.

Conditions d'encastrement

Dans la première partie (chapitres 1 à 4), nous avons réalisé des conditions aux limites d'encastrement grâce à des mâchoires qui plaquait la feuille sur le bâti. Cela est en effet un moyen efficace d'imposer l'angle et la position de la feuille à *condition d'exercer une force de serrage importante pour maintenir la feuille en place*. La raison en est que le maintien du positionnement de la feuille se fait par frottement sur les mâchoires. C'est pourquoi la force de

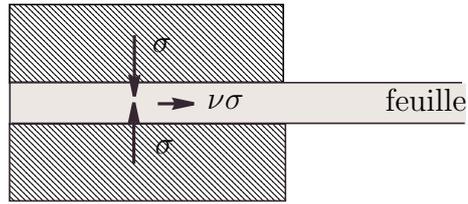


Fig. 5.3 – *La compression dans des mâchoires résulte en une compression dans l'axe de la feuille*

serrage devra être importante afin de s'opposer au glissement provoqué par une contrainte latérale notable.

Cependant l'expérience montre qu'il ne faut pas trop serrer ces mâchoires sur la feuille, sous peine de la faire flamber spontanément. On peut interpréter ce phénomène grâce au coefficient de Poisson qui couple les déformations dans différentes directions. La compression entre les mâchoires va en effet entraîner une compression dans le plan de la feuille (figure 5.3) à laquelle celle-ci, d'après la remarque précédente, est très sensible. Il nous faut donc éviter ici cette méthode, pourtant pratique, d'encastrement par serrage entre mâchoires.

5.2.2 Dispositif expérimental

Pour satisfaire toutes ces contraintes expérimentales, nous avons choisi de coller la feuille sur un substrat plus épais et plus grand, qui subira les compressions pour les transmettre à la feuille (voir figure 5.5 page 140). Il est en effet plus facile d'imposer une compression à une plaque de grande dimension (le substrat) car les variations de longueur associées sont, pour un même taux de variation relative des distances, plus grandes (on gagne un ordre de grandeur). Une photographie de l'ensemble du dispositif expérimental est représentée en figure 5.4 page suivante.

La plaque qui sert de substrat est ainsi placée dans un dispositif de compression qui doit être beaucoup plus raide. Nous avons choisi d'utiliser la différence de deux ordres de grandeur de module d'Young entre les matières plastiques et les métaux.

Le substrat est donc une plaque de PVC, d'épaisseur 1 cm, et de dimensions 30×30 cm. Son épaisseur est assez importante pour ne pas risquer de flamber dans notre plage d'étude des instabilités compressives de la feuille. En effet, d'après la formule (5.6 page 149), son taux de compression critique est 40 fois plus élevé que celui de la feuille étudiée. On pourra donc comprimer la bande étudiée largement au delà de son seuil sans craindre un

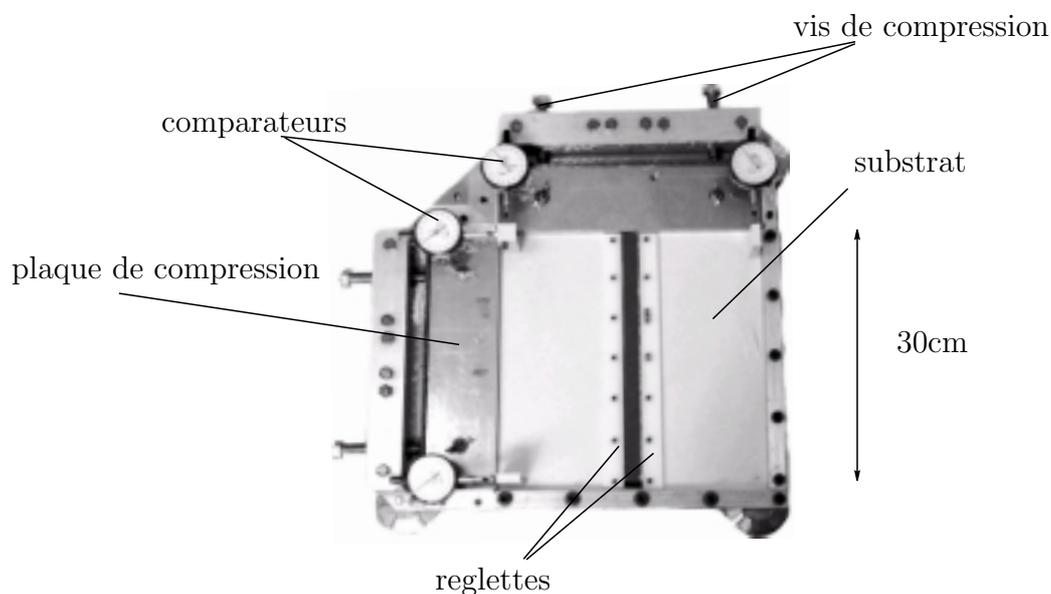


Fig. 5.4 – Photographie du montage expérimental.

flambage du substrat.

Dispositif de compression

Le bâti de compression est réalisé en Dural. Il se compose d'une plaque support (voir figure 5.5 page suivante), sur laquelle est fixée une équerre, contre laquelle le substrat va se positionner. Il est comprimé sur chacune de ses deux autres faces par une plaque d'acier (épaisseur 1 cm) poussée par deux vis. Ces deux vis permettent une compression bien uniforme en donnant la possibilité de régler le parallélisme de la plaque d'acier et de la partie de l'équerre en regard.

Mesures de distances

Nous mesurons la compression du substrat par la variation de différentes distances. Pour cela, nous utilisons des comparateurs permettant de mesurer des déplacements jusqu'à 1 mm, avec une précision de $3 \mu\text{m}$. Ils sont montés sur le bâti, en regard de butées fixées sur le substrat. Ils permettent ainsi de mesurer le taux de déformation du substrat selon une direction. Quatre déplacements, selon D_1 , D_2 , D_3 , D_4 sont mesurés comme indiqué sur la figure 5.6 page suivante.

Lors de la compression, on serre les vis de telle façon que les longueurs D_1

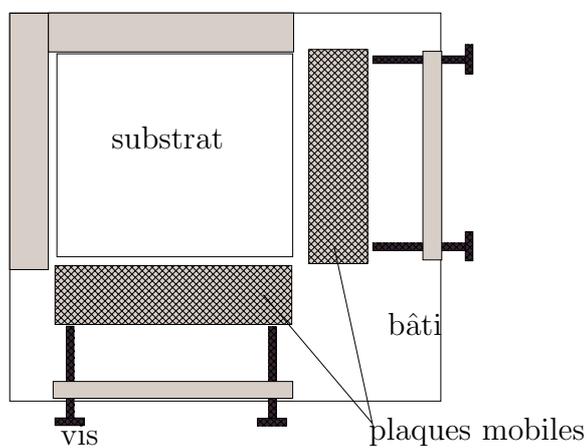


Fig. 5.5 – *Le dispositif mécanique de compression du substrat permet de le déformer indépendamment selon deux directions perpendiculaires.*

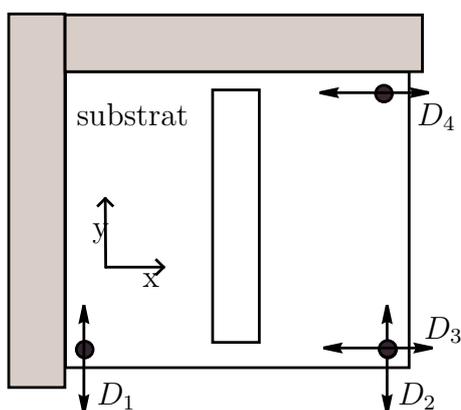


Fig. 5.6 – *Les quatre déplacements de points du substrat que nous avons mesurés par rapport au bâti.*

et D_2 soient réduites de la même quantité notée δ_y . La déformation u_{yy} est ainsi uniforme dans toute la plaque et donnée par $u_{yy} = -\epsilon_y = -\delta_y/l$, où l est la longueur entre le bord de la plaque et le point de mesure ($l \sim 295$ mm). On opère de la même façon sur l'autre direction.

L'expérience est effectuée dans une pièce dont la température est contrôlée (par climatisation) à 25 degrés. En effet la dilatation due à une élévation de température d'1 degré modifie les distances mesurées de $15 \mu\text{m}$, si le coefficient de dilatation est de $5.10^{-5} K^{-1}$. Une variation de température diurne d'une dizaine de degrés suffirait donc à fausser totalement les mesures.

Pour une bonne précision des mesures, une dépression entre le substrat et le bâti oblige le substrat à être plaqué contre lui. En effet, le substrat n'étant pas parfaitement plan¹ il subit de petites modifications de forme lors de la compression. Ces variations peuvent d'une part modifier l'état de la feuille qui se trouve comprimée ou étirée, mais aussi perturber la mesure de longueur en faisant varier l'angle de la butée, ce qui perturbe les mesures de façon importante. Au pire, le substrat pourrait sortir de son plan par glissement le long des arêtes des plaques mobiles. Pour éviter tout cela, une pompe à vide reliée à un trou et des rainures dans la surface d'appui, assure un placage uniforme du substrat sur le bâti.

À cette force d'aspiration est malheureusement associée une force de frottement qui peut perturber la compression mais surtout le retour à l'équilibre du substrat. Ainsi, après une forte compression, le substrat ne revient à la position d'équilibre initial que lorsque l'on a supprimé (puis remis) l'aspiration. Ceci est cependant un pis aller en comparaison de l'absence de précision que nous aurions eu sans placage du substrat.

D'autre part, la mesure de longueur n'est effective que si le substrat est bien en contact avec l'équerre opposée. Il convient de s'en assurer au début de l'expérience en comprimant assez fortement le substrat avant de le relâcher. D'autant que c'est cette position qui constitue la référence par rapport à laquelle on effectue les mesures.

Malgré toutes ces précautions, le système ne revient pas toujours à sa position d'équilibre après de fortes compressions. Il apparaît des décalages de l'ordre 10 à 30 μm sur la mesure de la position de référence. Ainsi les mesures effectuées ne pourront être plus précises que cette valeur, qui correspond à un taux de compression d'environ 10^{-4} , malheureusement de l'ordre de grandeur de la déformation nécessaire au flambage de la bande étudiée. On ne pourra donc prétendre étudier précisément l'instabilité primaire de flambage avec ce dispositif.

1. Il est difficile d'obtenir une face plane sur ce type de matériau pour une telle épaisseur car il se déforme à l'usinage.

Conditions d'encastrement par collage

Pour éviter d'imposer des conditions d'encastrement par serrage dans des mâchoires, on désire coller les feuilles sur le substrat. Mais soit les adhésifs (double face) se faisaient cisailer, soit les colles endommageaient le substrat qu'il fallait pourtant pouvoir réutiliser.

Pour pallier ces problèmes, nous avons choisi de coller la feuille avec une colle cyanoacrylate très puissante (qui endommage donc les surfaces) mais sur des réglettes de PVC (épaisseur 2 mm) préalablement vissées sur le substrat. Une difficulté a été de bien visser ces réglettes sur le substrat pour qu'elles enregistrent sa compression, tout en les gardant fines pour qu'elles ne perturbent pas son homogénéité.

Une solution aux problèmes de précision de mesure de longueur évoqués plus haut consisterait à modifier les paramètres de départ, l'épaisseur de la feuille, éventuellement la taille b et peut-être la longueur l , de manière à augmenter le taux de compression auquel on s'attend à observer des phénomènes intéressants. Celui-ci, donné par l'équation (5.6 page 149) est augmenté si l'on diminue b ou si l'on augmente h . Mais ces deux possibilités se heurtent à des problèmes spécifiques.

Réduire trop b va rendre les longueurs caractéristiques des modes d'autant plus petites et donc les imperfections du collage plus sensibles. On se heurte ici à la précision des conditions aux limites.

L'augmentation de l'épaisseur de la feuille est aussi problématique. L'expérience montre qu'une feuille d'épaisseur $h = 0,3$ mm ou 0,2 mm réussit à déformer légèrement les réglettes. La colonne d'Euler n'est alors plus invariante dans la direction y , son amplitude étant modulée longitudinalement en phase avec la présence des vis. Pour contrer cette tendance, on peut augmenter la résistance des réglettes en augmentant leur épaisseur. Mais pour des réglettes de 4 mm d'épaisseur, la compression du substrat devient non uniforme car la rigidification locale induite par celles-ci est alors trop importante.

Le collage de la feuille est une opération très délicate. Il s'agit de placer les bords d'une feuille dans son état le plus proche de l'équilibre, sur une couche de colle appliquée sur les réglettes.

À la suite de nombreux essais, la technique utilisée est la suivante : les deux réglettes sont fixées sur le substrat, lui-même plaqué par aspiration sur le bâti. Entre les réglettes est placée une plaque de même épaisseur, sur laquelle la feuille va s'appuyer. Celle-ci est positionnée une première fois, puis collée à l'une de ses extrémités, sur les deux réglettes. Il est utile de nettoyer soigneusement la feuille, les réglettes et la plaque d'appui pour éviter qu'un grain de poussière ne déforme la feuille. La colle est ensuite appliquée le plus régulièrement possible sur les deux réglettes, alors que la feuille est

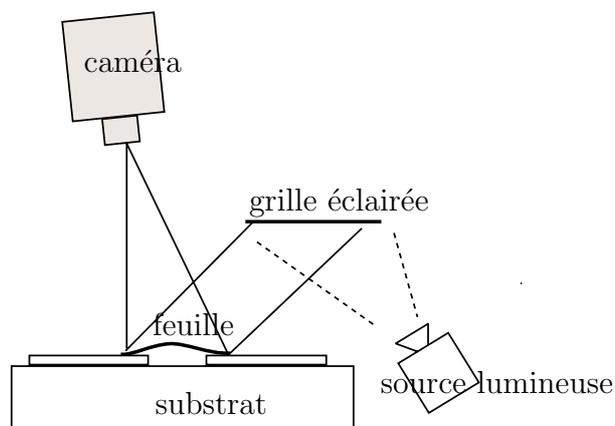


Fig. 5.7 – *Dispositif de visualisation, par réflexion d'une grille sur le miroir déformé qui constitue la surface.*

maintenue soulevée. Puis celle-ci est déposée petit à petit en partant de ses points initiaux de collage, et appuyée uniformément sur l'ensemble formé par les réglettes et la plaque intermédiaire. La prise de la colle est presque immédiate. La plaquette d'appui est ensuite retirée et la qualité de la planéité de la feuille est contrôlée par visualisation. Plusieurs essais sont nécessaires pour obtenir un état initial satisfaisant.

Visualisation

Les visualisations des déformations sont obtenues en observant l'image d'une grille réfléchi sur la surface de la feuille. Les variations d'orientation du plan tangent à la feuille étant très amplifiées, elles deviennent nettement visibles dès que la grille dont on fait l'image ou bien la caméra sont placées suffisamment loin de la feuille. On pourrait en principe remonter à l'orientation du plan tangent, et de là, à la forme exacte de la feuille, mais nous nous contenterons des prises de vue, qui permettent d'identifier assez clairement les modes de déformation de la feuille, et leurs caractéristiques.

Pour réduire les effets de perspective, la caméra est placée presque au dessus du dispositif, sous un petit angle latéral nécessaire pour observer la réflexion d'une grille éclairée par en dessous (voir figure 5.7).

5.3 CALCULS DE STABILITÉ

Le dispositif expérimental permet ainsi d'imposer un taux de déformation $\epsilon_x = \delta_x/l$ et $\epsilon_y = \delta_y/l$ à une feuille, de longueur $2b$, d'épaisseur h , que nous supposons infinie dans la direction y . Nous présentons maintenant le calcul du diagramme de stabilité de ce système, obtenu en collaboration avec B. Audoly.

Le problème consiste à déterminer, en fonction des paramètres de contrôle (ϵ_x, ϵ_y) les modes de flambage du plan. Nous noterons

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^0 &= -E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/(1 - \nu^2), \\ \sigma_{yy}^0 &= -E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/(1 - \nu^2), \\ \text{et } \sigma_{xy}^0 &= 0,\end{aligned}$$

les contraintes qui s'exerceraient sur la bande si elle ne subissait pas d'instabilité.

Pour l'un de ces modes de flambage, la colonne d'Euler, on dispose d'une solution non-linéaire exacte² représentant une cloque délaminée droite. C'est cela qui nous permet de réaliser une étude perturbative de stabilité, afin d'en déterminer les modes instables.

Une plaque mince est décrite par sa surface médiane, dont on note $z = \zeta(x, y)$ la hauteur au point (x, y) . Lorsque la plaque est proche de sa position plane de référence, ses états d'équilibre sont décrits par les équations de Föppl-Von Kármán [37, 43]:

$$D\Delta^2\zeta - h\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right] = 0 \quad (5.1)$$

$$\Delta^2\chi + E\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)^2\right] = 0 \quad (5.2)$$

Ici $D = Eh^3/(1 - \nu^2)$ est le module de flexion et $\chi(x, y)$ est la fonction d'Airy qui décrit, par l'intermédiaire de ses dérivées secondes, les contraintes qui ont été éliminées de la description:

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x}.$$

5.3.1 Flambage d'un plan sous compression non-isotrope

Dans cette partie, nous recalculons le diagramme de stabilité d'une feuille plane soumise à des forces dans son plan. Ces résultats ne sont pas nouveaux, et la technique de calcul est décrite dans [66].

². Notons cependant qu'il s'agit certes d'une solution exacte, mais d'un système d'équations approchées: les équations de Föppl-Von Kármán.

La feuille est soumise à un champ de contrainte $(\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0)$, dont la fonction d'Airy correspondante s'écrit $\chi(x, y) = (\sigma_{xx}^0 y^2 + \sigma_{yy}^0 x^2)/2$. Nous recherchons un mode neutre³ sous la forme $\zeta(x, y) = h\hat{\zeta}(x/b) \sin(k\pi y/b)$, la plaque étant supposée infinie dans la direction y . Celui-ci correspond aux solutions $(\hat{\zeta}, k)$ de l'équation linéarisée⁴

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{x}^2} - k^2\pi^2\right)^2 \hat{\zeta} - \left[k^2\pi^2\bar{\sigma}_{yy}\hat{\zeta} - \bar{\sigma}_{xx}\frac{d^2\hat{\zeta}}{d\bar{x}^2}\right] = 0 \quad (5.3)$$

avec ses conditions aux limites. Dans cette équation, les distances sont adimensionnées selon $\bar{x} = x/b$ et les contraintes selon $\bar{\sigma} = -\sigma^0 hb^2/D$.

Pour commencer, étudions le cas de conditions aux limites de type rotule pour lesquelles une solution exacte peut être déterminée analytiquement (comme pour les instabilités de Rayleigh-Bénard où les conditions aux limites de surface libre sont plus faciles à traiter que celles, plus réalistes, solide-solide). Puis nous décrirons le cas de conditions d'encastrement pour lesquels une étude numérique est nécessaire.

Conditions aux limites de type rotule

Elles consistent à imposer une flèche et une courbure nulle aux bords : $\zeta(x, y) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$ pour $x = \pm b$ donc $\bar{x} = \pm 1$. c'est à dire une courbure nulle sur les bords. Ce type de condition est simple à traiter analytiquement, car on peut alors projeter simplement $\hat{\zeta}(x)$ sur la base des $[\cos(\pi p\bar{x}/2), \sin(\pi p\bar{x})]$, p étant un entier, qui satisfont ses conditions aux limites. Notons que cette base peut s'écrire plus généralement sous la forme d'une seule famille $[\cos(\pi n\bar{x}/2 + (n-1)\pi/2)]$: si $n = 2p$ est pair, on retrouve le mode antisymétrique, tandis que s'il est impair, c'est le mode symétrique qui est décrit. L'équation précédente devient alors

$$\pi^2(k^2 + (n/2)^2)^2 - (k^2\bar{\sigma}_{yy} + (n/2)^2\bar{\sigma}_{xx}) = 0$$

Il s'agit, pour déterminer le domaine de validité du plan, de trouver le mode (k, n) qui va apparaître en premier à mesure que l'on augmente la compression. Pour cela, on peut fixer l'angle de compression $\alpha = \bar{\sigma}_{yy}/\bar{\sigma}_{xx}$, et noter la contrainte critique $\sigma_c = \bar{\sigma}_{xx}$ associée au mode symétrique (k, n)

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 (4k^2 + n^2)^2}{4 (4\alpha k^2 + n^2)}$$

3. Il est destiné à devenir, au delà du seuil, la solution stable flambée

4. La deuxième équation (5.2 page précédente) n'apporte rien ici, puisque l'on néglige les termes non-linéaires.

On cherche alors, pour α fixé, le mode k rendant minimale la contrainte critique σ_c . Pour cela, considérons la dérivée

$$\frac{d\sigma_c}{dk} = 2\pi^2 k \left(\alpha 4k^2 + (2 - \alpha)n^2 \right) \frac{n^2 + 4k^2}{(4\alpha k^2 + n^2)^2}.$$

Si $\alpha < 2$, $d\sigma_c/dk$ reste positif, et le minimum de σ_c est atteint en $k = 0$, pour $\sigma_c = \pi^2 n^2 / 4$. En revanche, si $\alpha > 2$, le minimum est atteint en $k^2 = n^2(\alpha - 2) / 4\alpha$ pour $\sigma_c = \pi^2 n^2 (\alpha - 1) / \alpha^2$. Si l'on note que les contraintes critiques obtenues sont croissantes avec n , on en déduit que les modes les plus dangereux sont les modes de n minimal.

Ainsi, le mode critique rencontré en premier lors de la compression d'un plan, est toujours le mode $n = 1$ symétrique. Deux cas se présentent cependant.

- Pour $\sigma_{xx}^0 > 2\sigma_{yy}^0$, il s'agit du mode $k = 0$, invariant dans la direction y . Il apparaît lorsque $\sigma_{xx}^0 = \sigma_r^E = \pi^2 D / 4hb^2 = E\pi^2 (h/2b)^2 / 12$. Ce mode est appelé colonne d'Euler parce qu'il est identique au flambage d'une tige sous ces mêmes conditions aux limites de type rotule.
- pour $\sigma_{xx}^0 < 2\sigma_{yy}^0$, il s'agit d'un mode de longueur d'onde finie $4b\sqrt{\alpha/(2 - \alpha)}$.

Il est intéressant de noter que la longueur d'onde du mode de flambage longitudinal tend vers l'infini lorsque l'on se rapproche du cas $\sigma_{yy}^0 = 2\sigma_{xx}^0 = \sigma_r^E$. Les résultats sont résumés sur la figure 5.8.

Bien que cette résolution ait le mérite d'être explicite, ces conditions aux limites de type rotule sont difficile à réaliser, et moins intéressantes du point de vue du délaminage que l'encastrement que nous considérons maintenant. Citons ici les études de l'évolution au voisinage du seuil et dans le régime très non-linéaire avec ces conditions de type rotule mais sous compression uniquement longitudinale [7, 57, 58, 74].

Conditions d'encastrement

Dans le cas de conditions aux limites d'encastrement, on impose $\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ en $\bar{x} = \pm 1$. Comme pour les conditions rigides en convection, le problème est plus complexe, car la base des fonctions sinusoïdales n'est plus adaptée. Celles-ci ne vérifient plus en effet les conditions aux limites.

Il faut alors résoudre l'équation différentielle linéaire (5.3 page précédente) à coefficients constants qui peut se réécrire avec les mêmes notations

$$\hat{\zeta}^{(4)} + (\sigma_c - 2k^2\pi^2)\hat{\zeta}^{(2)} + \pi^2(\pi^2 k^4 - \alpha\sigma_c k^2)\hat{\zeta} = 0 \quad (5.4)$$

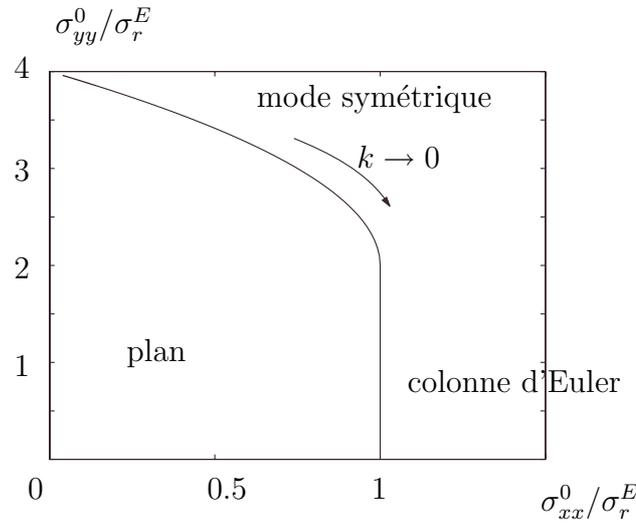


Fig. 5.8 – Diagramme de stabilité du plan calculé dans le cas de conditions aux limites de type “rotule”.

Le polynôme caractéristique $u^4 + (\sigma_c - 2k^2\pi^2)u^2 + \pi^2(\pi^2k^4 - \alpha\sigma_ck^2)$ de cette équation est bicarré. Plusieurs cas peuvent se poser selon le signe du discriminant $\Delta = \sigma_c(\sigma_c + 4\pi^2(\alpha - 1)k^2)$ de l'équation du second degré obtenue en posant $v = u^2$.

- Le polynôme possède deux racines réelles distinctes u_1, u_2 , si $\Delta > 0$. Dans ce cas, les solutions de l'équation différentielle sont des combinaisons linéaires des quatre fonctions $[\exp(\pm\sqrt{u_1}x), \exp(\pm\sqrt{u_2}x)]$. Si l'on commence par rechercher des solutions symétriques, on n'autorise que les combinaisons linéaires de $[\cosh(\sqrt{u_1}\bar{x}), \cosh(\sqrt{u_2}\bar{x})]$. Parmi ces solutions, on ne retient que celles qui vérifient les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent sous la forme d'un déterminant que l'on doit annuler

$$\begin{vmatrix} \cosh(\sqrt{u_1}) & \cosh(\sqrt{u_2}) \\ \sqrt{u_1} \sinh(\sqrt{u_1}) & \sqrt{u_2} \sinh(\sqrt{u_2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

Elle conduit⁵ à $\sqrt{u_1} \tanh(\sqrt{u_1}) = \sqrt{u_2} \tanh(\sqrt{u_2})$.

- Si le polynôme a deux racines complexes-conjuguées, le même type de raisonnement s'applique, en donnant lieu à un autre critère d'existence, mais qui n'est vérifié par aucun mode.

Il est difficile de résoudre exactement la condition⁶(5.5), mais

5. Si l'une des racine est négative, il faut remplacer dans ce critère $\sqrt{u_i} \tanh(\sqrt{u_i})$ par $-\sqrt{|u_i|} \tan(\sqrt{|u_i|})$.

6. analogue à celle des instabilités convectives en hydrodynamique.

il est possible de le faire numériquement. On obtient ici aussi une relation entre σ_c, k et α .

Comme pour le cas précédent de conditions aux limites de type rotule, on peut distinguer deux régimes toujours en rapport avec le mode symétrique (les modes antisymétriques apparaissent pour des contraintes critiques plus élevées). Pour $\alpha < 0,66$, le mode le plus instable est celui de nombre d'onde nul $k = 0$. Il correspond à la colonne d'Euler et se produit pour $\sigma_{xx}^0 = \sigma^E$ d'après l'appendice D page 177. Pour $\alpha > 0,66$, le flambage apparaît par un mode de longueur d'onde longitudinale finie.

Notons que la compression isotrope qui correspond à $\alpha = 1$, donne lieu à un mode de nombre d'onde non nul. Cela signifie en particulier que la colonne d'Euler n'apparaît pas spontanément quand on comprime de façon isotrope une bande encadrée infinie.

Conclusion

Le mode le plus instable dépend ainsi du mode de compression. En particulier il est bien intuitif qu'une compression seulement transversale ($\alpha = 0$) crée une colonne d'Euler, tandis qu'une compression longitudinale ($\alpha = \infty$) génère des modes longitudinaux.

Cependant, ce mode dépend aussi fortement du type de conditions aux limites. Il est alors moins évident de se rendre compte qu'une compression uniforme, comme celle générée par une dilatation thermique, donne lieu à l'un ou l'autre type de mode, selon que les conditions aux limites sont encadrées ou libres.

5.3.2 Stabilité de la colonne d'Euler

Nous disposons d'une solution exacte des équations de Föppl-Von Kármán pour le mode de longueur d'onde infinie. Cela permet de faire une étude de stabilité de ce mode. Déjà résolue dans le cas de compressions uniformes [2], nous l'étendons ici aux compressions bi-axiales quelconques.

Une solution exacte des équations de Föppl-Von Kármán

La résolution des équations de Föppl-Von Kármán amenant à la colonne d'Euler est détaillée dans l'Appendice D page 177. Nous en notons ici les principaux résultats.

La flèche de la colonne est donnée par

$$\zeta(x) = \zeta_m \frac{1 + \cos(\pi x/b)}{2},$$

où ζ_m est la hauteur maximale de la colonne, obtenue en exprimant les conditions aux limites qui seules contiennent les non-linéarités⁷ nécessaires pour parvenir à la saturation, puisque le motif est développable et que les non-linéarités n'apparaissent que via la courbure de Gauss dans les équations de Föppl-Von Kármán. On trouve alors

$$\zeta_m = h \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{\sigma_{xx}^0}{\sigma^E} \right) - 1 \right]^{1/2}.$$

où l'on a noté le seuil de flambage

$$\sigma^E = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2}. \quad (5.6)$$

Conformément au flambage d'une tige (§ 1.2.2 page 28), cette instabilité est supercritique, comme le confirme la variation de la hauteur en racine carrée du paramètre de contrôle. Pour ce mode, les contraintes sont uniformes mais non isotropes dans le film, quelle que soit l'amplitude du flambage. Leurs valeurs sont en effet données au delà du seuil par

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^E &= -\sigma^E \\ \sigma_{yy}^E &= \sigma_{yy}^0 - \nu(\sigma_{xx}^0 + \sigma^E) \\ \sigma_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Si on augmente $\epsilon_x = \delta_x/l$ progressivement, la contrainte σ_{xx} augmente linéairement jusqu'au moment du flambage puisque la feuille plane a, jusque là, une raideur constante $\sigma_{xx}/\delta_x = E/2b$. Au delà du flambage, $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^E$ est alors constante, et par conséquent la raideur est nulle⁸. Les contraintes sont donc bien relâchées par rapport à l'état non flambé sous les mêmes conditions géométriques. Mais il reste des contraintes longitudinales σ_{yy}^E qui peuvent être importantes.

Perturbation et stabilité

Soit une colonne d'Euler (ζ_E, χ_E) soumise à une compression longitudinale ϵ_y et transversale ϵ_x , et faiblement perturbée en flèche et en contrainte (ζ, χ) .

7. Elles jouent ici le même rôle que les conditions globales de longueur dans l'*elastica* contrainte.

8. Nous avons remarqué au chapitre 2 que le flambage de l'*elastica* (incompressible), prédit une raideur infinie pendant la première phase, où l'état non flambé est stable, puis une raideur finie. Ces deux visions sont donc cohérentes, puisqu'elles prédisent une diminution très brutale de la raideur au cours du flambage.

On recherche des solutions sous la forme de modes $\zeta(x,y) = \hat{\zeta}(x) \cos(qy)$ et $\chi(x,y) = \hat{\chi}(x) \cos(qy)$. Les équations de Föppl-Von Kármán linéarisées deviennent alors

$$\begin{aligned} D \left(-q^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right)^2 \hat{\zeta} - h \left[-q^2 \hat{\chi} \frac{d^2 \zeta_E}{dx^2} + \sigma_{xx}^E \hat{\zeta}'' - q^2 \sigma_{yy}^E \hat{\zeta} \right] &= 0, \\ \left(-q^2 + \frac{d^2}{dx^2} \right)^2 \hat{\chi} - q^2 h \frac{d^2 \zeta_E}{dx^2} \hat{\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

C'est un système de deux équations différentielles ordinaires couplées du second ordre. Il faut donc huit conditions aux limites dont six correspondent à $\zeta = \zeta' = 0$ en $x = \pm b$, et deux aux conditions $u_x = u_y = 0$. Ces dernières signifient qu'il n'y a pas de déplacement des conditions aux limites par rapport à la solution de la colonne d'Euler. L'expression de ces conditions est plus technique, car les déplacements tangentiels ont été éliminés des équations de Föppl-Von Kármán [2].

Une méthode de tir permet ensuite de trouver les modes neutres. En pratique, on fixe q , et l'angle de contraintes α , tel que $\alpha = \sigma_{yy}^0 / \sigma_{xx}^0$. La compression nécessaire à l'apparition d'un mode neutre est alors calculée. En faisant varier q on peut trouver le premier mode dans cette direction au cours de la compression. Le diagramme de stabilité est ainsi tracé sur la figure 5.9 page ci-contre.

Sur cette figure on reconnaît les modes de flambage du plan selon un mode symétrique de longueur d'onde finie (région β) et selon la colonne d'Euler (région γ). Cet état peut se déstabiliser selon un mode symétrique (région δ) ou selon un mode antisymétrique (région ϵ). Cette dernière région est particulièrement intéressante dans la mesure où ce mode pourrait expliquer les oscillations de cloques en fil de téléphone.

À partir de ces zones de stabilité, on peut déduire l'existence de nouvelles lignes de bifurcation : entre la région δ et β , et entre la région δ et ϵ . La description de ces phénomènes est cependant hors de portée de cette approche analytique mais sera exposée dans [60].

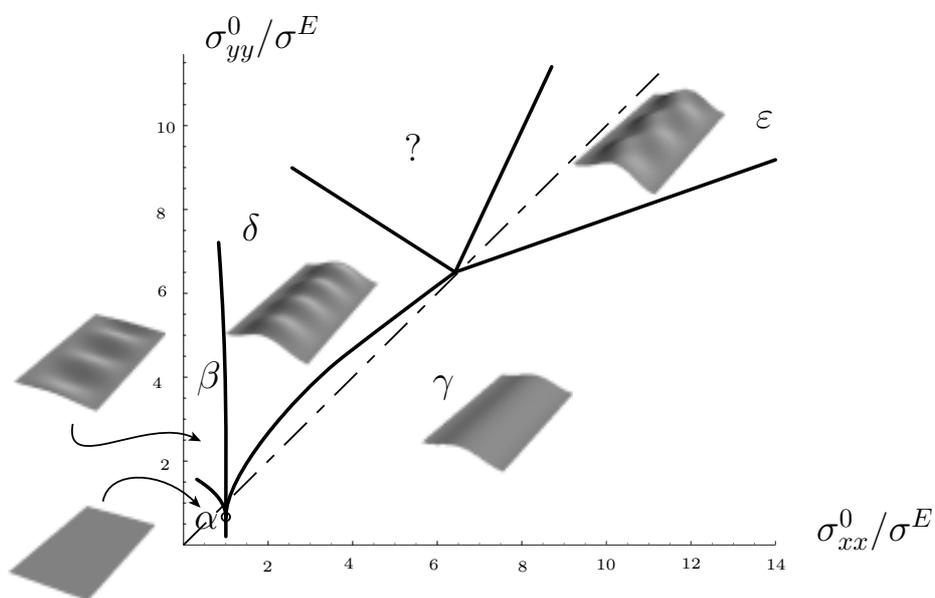


Fig. 5.9 – Diagramme de stabilité de la colonne d'Euler. Les formes β et δ résultent de l'instabilité primaire du plan α . La forme δ est appelée colonne d'Euler. Les formes δ et ϵ résultent de l'instabilité secondaire du plan α , soit encore de l'instabilité de la colonne d'Euler γ .

5.4 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

L'étude expérimentale complète ici les arguments théoriques. En effet, les modes d'instabilité ne peuvent être identifiés que si l'on se trouve assez loin de la bifurcation. Trop près de celles-ci, les imperfections expérimentales sont amplifiées, et la visualisation des modes délicate. C'est pourquoi, l'approche expérimentale vise à révéler, dans le diagramme de stabilité, les parties au moins faiblement éloignées des lignes neutres, tandis que l'analyse théorique se restreint à leur toute proximité.

De ce point de vue, l'étude expérimentale présentée ci-dessus va consister à compléter dans le domaine non-linéaire le diagramme théorique des lignes de transition autant qu'à vérifier sa compatibilité avec les observations expérimentales.

5.4.1 Différents modes observés

Passons en revue les différents modes observés lorsque l'on fait varier les paramètres de contrôle (δ_x, δ_y) . À titre de comparaison, on se référera à une image de l'état initial présentée en figure 5.10.

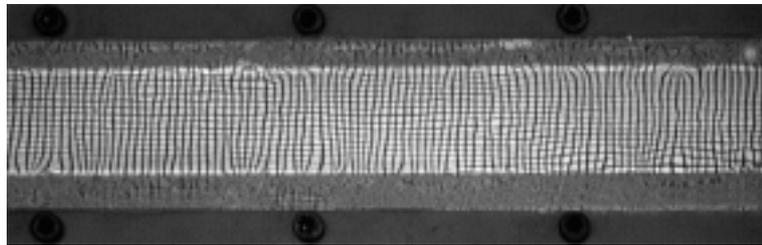


Fig. 5.10 – Photographie de l'état initial, non comprimé (représenté au point A en figure 5.15). Le quadrillage n'est pas parfaitement régulier à cause d'imperfections du collage ou de la feuille elle-même.

Partant de l'état plan initial et augmentant la compression transverse, on observe au delà d'un seuil un mode de longueur d'onde infinie. C'est la colonne d'Euler (figure 5.11 page ci-contre et 5.9 γ)

Au contraire, lorsque la compression est majoritairement transverse, le mode de flambage du plan que l'on observe est bien différent (figure 5.12 page suivante). Il correspond au mode symétrique β ou δ . D'après le diagramme de stabilité, la longueur d'onde de ce mode est variable, fonction de la compression transverse. Cependant, notre expérience ne nous a pas permis de visualiser la divergence de longueur d'onde prédite par la théorie à l'ap-

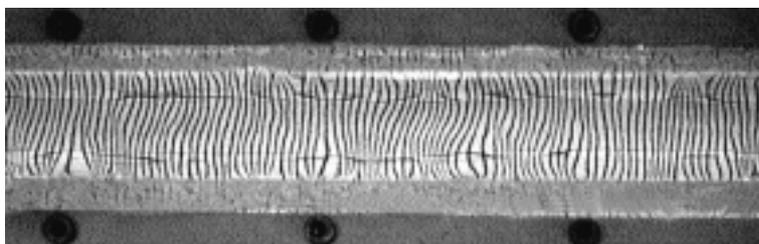


Fig. 5.11 – Photographie d'une colonne d'Euler, sous compression transverse seule (point B sur le diagramme 5.15). Cette visualisation n'est pas très bien adaptée à ce type de mode de longueur d'onde infinie, mais par rapport à la figure 5.10 page ci-contre, les lignes horizontales ont disparu. C'est qu'elles sont trop serrées sur une bande centrale, et trop éloignées sur les côtés.

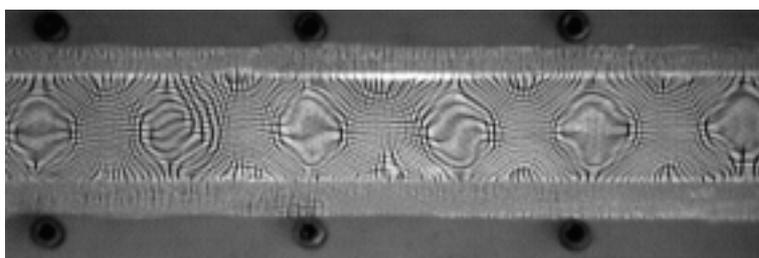


Fig. 5.12 – État flambé sous compression longitudinale (point C sur le diagramme 5.15). C'est un mode symétrique, de longueur d'onde proche de la largeur de la bande. Les creux (régions de courbure positive) correspondent à des zones où les lignes sont éloignées, tandis que les bosses sont des zones où les lignes sont très rapprochées.

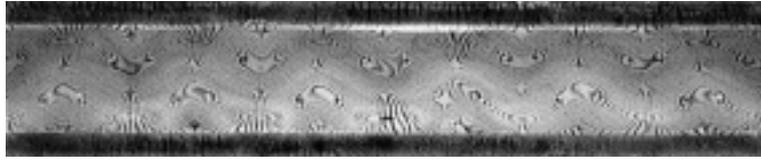


Fig. 5.13 – Photographie de la colonne d’Euler devenue instable vis-à-vis d’un mode oscillant antisymétrique à cause d’une compression longitudinale. Sur le diagramme 5.15, il est représenté en D .

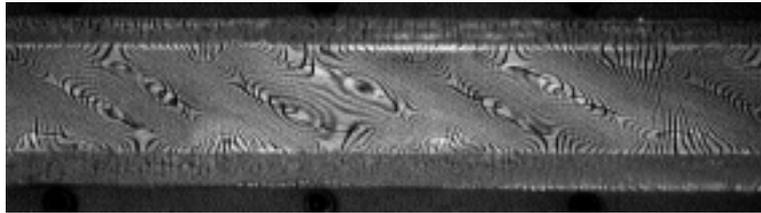


Fig. 5.14 – Photographie d’un mode non prévu par l’analyse de perturbations. Sur le diagramme 5.15, c’est le point E .

proche du seuil de la colonne d’Euler. Loin du seuil nous observons cependant bien deux modes différents.

Par ailleurs, la colonne d’Euler, loin de son seuil et sous forte compression longitudinale, se déstabilise selon un mode antisymétrique lorsque l’on augmente la compression longitudinale (figure 5.13). Cela correspond au mode ϵ de la figure 5.9.

On observe également des états (qui ne sont pas directement prédits par l’étude linéaire) dans une zone assez vaste, et que l’on peut peut-être interpréter comme une superposition de mode symétrique et asymétrique (figure 5.14).

Remarquons enfin que lorsque la colonne est proche de son seuil, une compression longitudinale peut avoir des effets divers, qui dépendent beaucoup de perturbations. De plus, il est difficile, avec la visualisation utilisée, de distinguer les deux états δ et β sur le diagramme 5.9. Il est ainsi difficile de confronter théorie et expérience dans cette zone.

5.4.2 Diagramme de stabilité

Les domaines approximatifs de stabilité des différents modes sont représentés sur la figure 5.15 page suivante. On constate un accord qualitatif global avec le diagramme (figure 5.9 page 151) prédit par l’analyse linéaire. Les différents modes de flambage du plan (colonne d’Euler ou mode

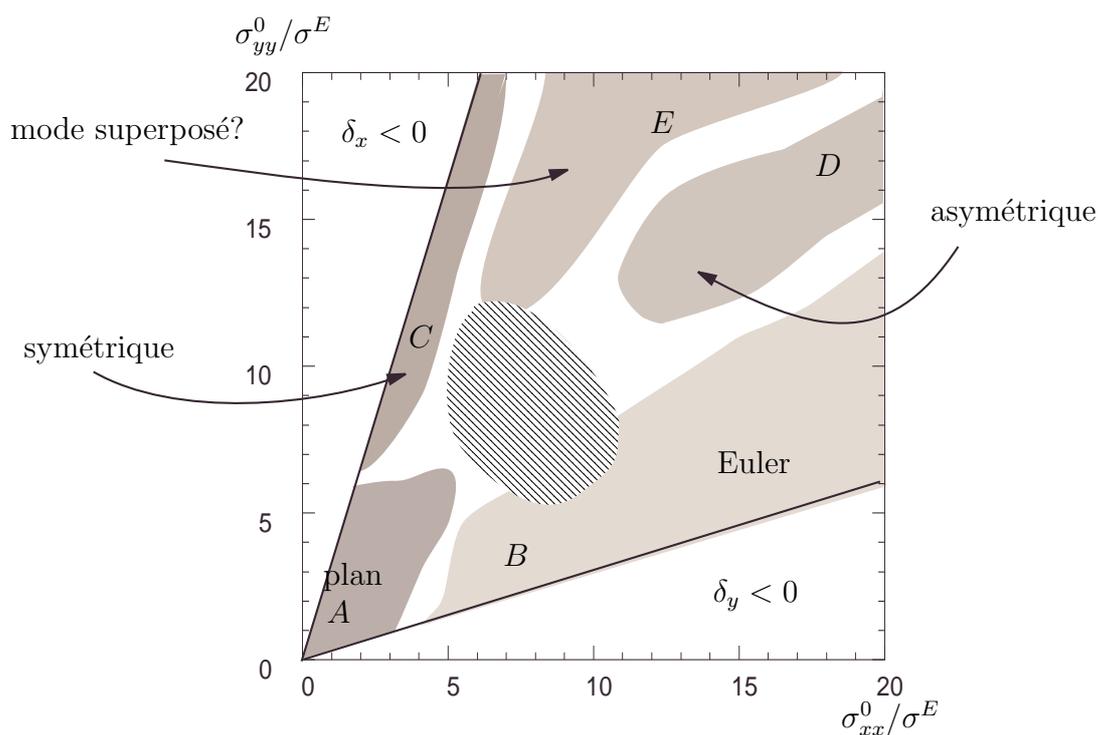


Fig. 5.15 – Diagramme de stabilité des différents modes. Les lettres renvoient aux figures 5.10 à 5.14. À cause du coefficient de Poisson, la zone accessible à l'expérience ($\delta_{x,y} > 0$) est un secteur angulaire délimité par deux droites. Dans la zone hachurée on ne peut pas savoir quel mode est présent, car aucun n'est assez développé.

symétrique de longueur d'onde finie), ainsi que le mode “en fil de téléphone,” se retrouvent bien, qualitativement, dans les zones attendues. Cependant il faut noter un facteur d'erreur important (de l'ordre de 3) dans les valeurs des seuils. On peut certainement l'attribuer au manque de précision expérimentale.

Dans la partie non prédite par le calcul, on observe un mode en cellules étirées qui pourrait être une superposition d'un mode symétrique et asymétrique.

La destabilisation de la colonne d'Euler à travers un mode symétrique n'est pas confirmée par les expériences pour deux raisons simples. D'une part, les visualisations ne permettent pas de distinguer clairement cet état δ du flambage transverse du plan β . D'autre part, l'expérience ne permet pas de sonder avec précision le voisinage de cette zone où plusieurs lignes critiques sont proches les unes des autres.

5.4.3 Retour sur le délaminage

Nos expériences ont confirmé la destabilisation de la colonne d'Euler selon un mode antisymétrique pour de grandes contraintes compressives bi-axiales. Même si ces cloques oscillent en même temps qu'elles se propagent, il est tentant de rapprocher ceci du délaminage en fil de téléphone pour lequel le film subit là aussi de telles contraintes. D'autres expériences soutiennent d'ailleurs également cette idée selon laquelle les instabilités du film joueraient un rôle important dans ce processus.

Ainsi, dans [18, 19], un substrat sur lequel est déposé un film mince est comprimé selon une seule direction. Cette compression, ajoutée à la compression résiduelle du film, est suffisante pour vaincre l'énergie d'adhésion, et créer des cloques droites, perpendiculaires à la direction de compression. Lorsque la compression est relâchée, les cloques évoluent dans certains cas vers des cloques en fil de téléphone (figure 5.2 page 135) mais aussi dans d'autres cas vers des motifs “en gouttes” (figure 5.16 page ci-contre).

Ces observations récentes sont très intéressantes, car elles peuvent être rapprochées du mode symétrique que nous avons décrit plus haut. En effet, ces auteurs ont montré qu'entre les “gouttes”, le film est simplement posé sur le substrat, et peut revenir vers la colonne d'Euler de façon réversible. Il s'agit alors clairement d'un mode de déformation du film sans modification de ses conditions aux limites par la fracture. Ces gouttes peuvent ainsi être vues comme un mode symétrique très développé.

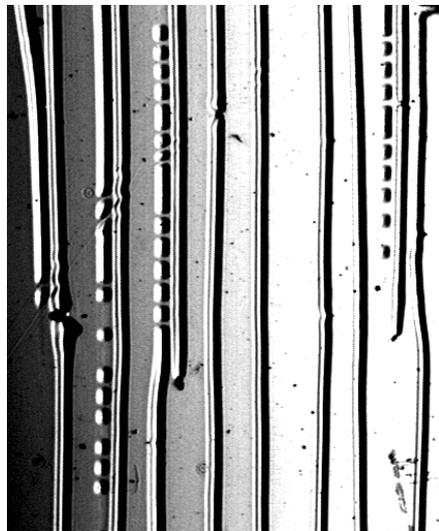


Fig. 5.16 – Photographie d'une figure de délamination "en gouttes", observée par F.Cleymand, C.Coupeau, J.Colin et J.Grilhé. Nous les remercions pour cette figure.

5.5 CONCLUSION

Nous avons étudié le diagramme de stabilité d'une bande infinie plane soumise à des compressions bi-axiales dans son plan. Ce problème académique ne semble pas avoir fait l'objet d'études antérieures, malgré la simplicité de la question posée : qu'arrive-t-il à la structure élastique la plus simple – le plan – lorsqu'il est comprimé au delà de son seuil de flambage ? Cela s'explique peut-être par les difficultés expérimentales rencontrées lorsqu'il s'agit d'exercer deux contraintes simultanées sur un système élastique, ainsi que par la complexité intrinsèque des équations de Föppl-Von Kármán.

Plusieurs modes de flambage secondaires sont observés, produisant ainsi un riche diagramme de stabilité. Celui-ci inclut notamment les instabilités secondaires de la colonne d'Euler, accessibles à une analyse de stabilité du fait qu'une solution exacte de la colonne est disponible. Ces instabilités présentent des modes symétriques ou antisymétriques. Ce dernier est bien observé expérimentalement dans une zone en accord qualitatif avec la théorie. D'autre part, un autre mode de flambage secondaire du plan est observé, dans une zone non accessible à l'analyse.

D'un autre point de vue, cette étude présente un lien direct avec l'étude du délaminage de films minces. Ainsi, le mode de délaminage "en fil de téléphone" pourrait s'expliquer grâce à ces ingrédients d'instabilité élastique des films. On observe aussi, dans certaines conditions de préparation, des motifs de délaminage "en goutte" (figure 5.16 page précédente) qui pourraient être liés à l'apparition d'un post-flambage selon un mode symétrique. Cela semble indiquer que l'élasticité du film et ses instabilités jouent un rôle important dans la propagation de cloques de délaminage.

CONCLUSION

Dans cette étude sur le plissement de plaques minces, nous avons été conduits à considérer d'abord le cas de plis ayant une direction d'invariance.

Bien que le modèle de l'*elastica* ne soit justifié que pour des tiges ou des plaques infinies, nous avons montré qu'il s'appliquait avec une remarquable précision à ces états cylindriques de plaques pourtant quasi-carrées, et ce même dans le régime non-linéaire des grands excès de surface, et dans celui des grands écrasements, où un grand nombre de bifurcations éloignent considérablement le système de son état au repos. La résolution analytique de ce modèle revient à un problème non-linéaire aux valeurs propres qui seul permet de relier force de réaction et géométrie d'écrasement. À notre connaissance, sa résolution explicite est impossible. Pour résoudre cette difficulté, nous avons utilisé plusieurs approches.

Les propriétés de symétrie et des lois de conservation (intégrales premières) nous ont conduit à une loi approchée de la force de réaction verticale en fonction de l'écrasement dans un régime donné. En raisonnant dans l'espace des solutions nous avons démontré l'unicité de la solution correspondant à un brin dans une boîte donnée. Enfin nous avons montré, grâce à cette propriété d'unicité, pourquoi les contacts pouvaient être considérés comme sans frottement, et pourquoi les plis sont symétriques: en réalité la présence de frottement aiguille au cours de l'écrasement le système dans des états symétriques, donc paradoxalement sous force de frottement nulle.

L'étude de la cascade de bifurcation de flambage nous a ensuite conduit à une loi d'échelle *discrète*, et forcément *partielle*, bien différente d'un simple comportement en loi de puissance. En particulier, les zones de rupture répétées de cette relation se sont révélées nécessaires à son existence. Cette loi nous a permis de comprendre le comportement mécanique complexe du système, en suivant l'arrangement relatif des différentes branches de solutions au cours de l'écrasement. Ces résultats nous ont conduits à rechercher un autre type d'invariance d'échelle, spatial⁹, lors de l'écrasement en coin de feuilles dont la largeur est variable.

Tournant notre attention vers des situations représentant une faible cour-

9. Il sera seulement approché cette fois.

bure de Gauss, nous avons alors modifié la configuration d'écrasement de feuilles pour introduire une faible courbure du bâti. Ainsi les feuilles sont elles placées entre deux cylindre de grand rayon R , et encastrées selon la direction perpendiculaire à leurs axes. Pour de grands écrasement, nous avons alors observé que les états d'une feuille d'épaisseur h se régularisent pour former des plis courbés, lorsque l'énergie d'extension et de courbure sont ramenées au même ordre en raison des petites¹⁰ dimensions des structures étudiées. Le comportement mécanique à l'écrasement de ces plis courbés est alors très semblable à celui des plis droits. Nous avons en effet montré qu'ils obéissent à un formalisme très proche de l'*elastica* dès lors que le module de flexion est renormalisé pour tenir compte de l'énergie d'extension : Dans cette limite des grands écrasements (qui nous semble plus physique que celle qui consiste à faire tendre $h \rightarrow 0$ à forme fixée), tiges et plaques comportant des plis faiblement courbés obéissent à des équations de type *elastica*, même si l'énergie d'extension de ces dernières n'est pas nulle, car elle n'est plus focalisée dans des singularités. Ceci rend plus optimiste pour la compréhension de la situation générique de plaques comprimées entre deux plans sans direction privilégiée imposée par les conditions aux limites (figure 0.2, page 3). En effet, il est maintenant tout à fait envisageable de modéliser les régions courbées (zones A) de cette figure par une *elastica* renormalisée. Restent alors les défauts d'orientation (zones B) dont il faudra préciser la nature.

L'étude de l'écrasement entre deux plaques courbées devrait aussi permettre de mieux comprendre les premières étapes du froissement de plaques minces. En effet, nous avons ici accès à un réseau plan remarquablement régulier (cristallin) des singularités considérées comme génériques de l'écrasement, les d-cones. Nous avons donné une raison plausible à cette régularité dans l'espacement des singularités, mais qui devra être testée précisément. D'autre part, la loi d'échelle discrète à laquelle semble obéir la réponse mécanique expérimentale de ces états reste pour l'instant, malgré sa ressemblance avec celle de l'*elastica*, incomprise et pique notre curiosité.

Nous avons également montré la richesse des instabilités secondaires d'un plan soumis à des contraintes bi-axiales. Au delà de son intérêt académique propre et pour notre problème de plissement, l'étude de ces différents modes présente un intérêt direct dans la physique du délaminage, dont les applications sont nombreuses. Il serait intéressant de pousser cette comparaison plus loin et de les confronter précisément avec des expériences in situ, pour mieux comprendre les interactions entre les déformations du film et la propagation par fracture de la cloque.

Il ressort aussi de cette étude que la physique de la courbure élastique peut

10. Elles se trouvent alors du même ordre que \sqrt{hR} .

être non seulement robuste vis à vis des imperfections expérimentales, du frottement, et des multiples bifurcations éloignant de l'équilibre, mais que la réponse mécanique qu'elle prédit apparaît également, de manière étonnante, proche de celle des états à faible extension, et peut-être même de ceux incluant des singularités. Le modèle de l'*elastica* d'Euler, souvent considéré confiné à des configurations particulières d'extension nulle, se trouve donc encore plein d'enseignements dans des domaines où sa validité n'était pas attendue. Ceci est très prometteur pour la compréhension de situations plus générales d'élasticité de plaques minces très déformées pour lesquelles même les équations de Föppl-Von Kármán ne sont plus valables.

ANNEXE

A. SOLUTIONS FORMELLES DE L'ELASTICA ET INTÉGRALES ELLIPTIQUES

Nous exprimons les solutions de l'équation de l'*elastica* adimensionnée

$$\ddot{\theta} = -p \sin(\theta) + q \cos(\theta)$$

à l'aide d'intégrales elliptiques, par analogie avec leur utilisation pour les oscillateurs (chapitre 2). Nous cherchons une solution qui satisfasse les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(\theta) ds &= X \\ \int_0^1 \sin(\theta) ds &= Y \\ \theta(0) = \theta(1) &= 0. \end{aligned}$$

Cas général

La première étape consiste à ramener la gravité à un angle nul par le changement de variable $\alpha = \theta - \bar{\theta}$, tel que $\tan(\bar{\theta}) = q/p$. Ainsi $p = \omega^2 \cos(\bar{\theta})$, $q = \omega^2 \sin(\bar{\theta})$ pour $\omega^4 = p^2 + q^2$, et l'on se ramène simplement à l'équation du pendule non-linéaire

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin(\alpha) = 0.$$

Les conditions aux limites sont désormais $\alpha(s = 0,1) = -\bar{\theta}$. Les conditions globales

$$X = \int \cos(\alpha + \bar{\theta}) ds = \cos(\bar{\theta})\mathcal{X} - \sin(\bar{\theta})\mathcal{Y} \quad (\text{A.1})$$

$$Y = \int \sin(\alpha + \bar{\theta}) ds = \cos(\bar{\theta})\mathcal{Y} + \sin(\bar{\theta})\mathcal{X} \quad (\text{A.2})$$

où $\mathcal{X} = \int \cos(\alpha) ds$ et $\mathcal{Y} = \int \sin(\alpha) ds$. Pour exprimer ces deux quantités on va faire un changement de variable, et faire l'intégration sur les angles α plutôt que sur l'abscisse curviligne s . On a donc besoin d'une expression de $d\alpha/ds$.

L'intégrale première (obtenue en multipliant cette équation par $\dot{\alpha}$ puis en intégrant) montre que $\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2[\cos(\alpha) - \cos(\alpha_i)]$ entre le point d'inflexion et le point courant. Sur la partie où $\dot{\theta}$ reste positif (avant le point d'inflexion),

$$\frac{d\alpha}{ds} = \omega (2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_i)^{1/2}$$

en notant $k = \sin(\alpha_i/2)$ et en faisant le changement de variable

$$\sin(u) = \frac{\sin(\alpha/2)}{k},$$

on obtient alors $ds = du/[\omega \cos(\alpha/2)]$ valable sur la première partie de l'intégration, ce qui est suffisant par symétrie. Les bornes sont définies par le point initial $u = \phi$ donné par $\sin(\phi) = -\sin(\bar{\theta})/\sin(\alpha_i/2)$ et le point d'inflexion où $u = \pi/2$.

$$\mathcal{X} = 2 \int_{\phi}^{\pi/2} \cos(\alpha) ds = \frac{2}{\omega} (2\tilde{E} - \tilde{F})(\phi, k) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{Y} = 2 \int_{\phi}^{\pi/2} \sin(\alpha) ds = \frac{2}{\omega} 2k \cos(\phi) \quad (\text{A.4})$$

$$1 = 2 \int_{\phi}^{\pi/2} ds = \frac{2}{\omega} \tilde{F}(\phi, k) \quad (\text{A.5})$$

Cette dernière condition est devenue nécessaire puisqu'on a éliminé l'abscisse curviligne dont les bornes d'intégration imposait la longueur du brin. On a noté

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\phi, k) &= E(\pi/2, k) - E(\phi, k) \\ \tilde{F}(\phi, k) &= F(\pi/2, k) - F(\phi, k) \end{aligned}$$

où E, F sont les intégrales elliptiques incomplètes de première et seconde espèce :

$$\begin{aligned} E(\phi, k) &= \int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2} du \\ F(\phi, k) &= \int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du \end{aligned}$$

Ainsi, étant donné les triplets $(p, q, \dot{\theta}_0)$, il est facile calculer les valeurs de $(\phi, k, \omega, \bar{\theta})$. Les expressions ci-dessus permettent alors de calculer X, Y, L du pli, dans la mesure où l'on a accès à des tabulations des intégrales elliptiques *incomplètes*. En pratique, il est équivalent, et plus simple d'intégrer numériquement l'*elastica*.

Pour connaître la force de réaction (p,q) et la forme prise par une tige de longueur L quand elle est emprisonnée dans une boîte (X,Y) il faut *inverser* ces relations. C'est très difficile, dans la mesure où l'on ne dispose pas de fonction inverse de ces fonctions elliptiques incomplètes.

En pratique ces solutions formelles sont inutiles, à cause de la complexité des fonctions qu'elles mettent en jeu. Dans deux cas particuliers cependant, les intégrales elliptiques deviennent complètes, ce qui simplifie grandement le problème.

Plis libres

Le premier cas est celui des plis "libres" verticalement (il n'y a pas de restriction de la hauteur), c'est-à-dire que $q = 0$. Et donc $\omega^2 = p, \bar{\theta} = 0$ ce qui implique $\phi = 0$.

Les relations se simplifient donc en

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{\omega}[2E(k) - F(k)] \\ Y &= \frac{4k}{\omega} \\ 1 &= \frac{2}{\omega}F(k) \end{aligned}$$

où cette fois les bornes des intégrales elliptiques sont fixes. On a noté $E(k)$ pour $E(\pi/2,k)$ et $F(k)$ pour $F(\pi/2,k)$

Contact plans

Dans le cas de brins à contacts plans, la courbure initiale $\dot{\theta}_0$ est nulle. C'est-à-dire qu'entre le point initial et le point d'inflexion, une demi-période complète du pendule s'est déroulée. Les intégrales elliptiques sont donc complètes.

En fait la conservation de $\dot{\alpha}^2/2 - \omega^2 \cos(\alpha)$ entre le point initial et le point d'inflexion, où $\dot{\alpha}$ est nul à chaque fois montre que $\cos(\alpha_i) = \cos(\bar{\theta})$. Donc forcément que $\sin(\alpha_i/2) = \sin(\bar{\theta}/2)$. Finalement cela conduit à $\sin(\phi) = -1$, donc $\phi = -\pi/2$.

Incidentement, nous avons montré que $\alpha_i = \bar{\theta}$, ce qui va permettre d'éliminer $\bar{\theta}$ au profit de $k = \sin(\alpha_i/2)$. En effet $\cos(\bar{\theta}) = (1 - 2k^2)$ et $\sin(\bar{\theta}) = 2k(1 - k^2)^{1/2}$. Pour le pli lui-même, cela montre que $\theta_i = \bar{\theta} + \alpha_i = 2\bar{\theta}$. D'autre part, on sait que $\tan(\bar{\theta}) = p/q = X/Y$, ce qui montre que l'angle au point d'inflexion est le double de l'angle que fait la diagonale de la boîte avec l'horizontale.

Comme $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ sont des fonctions impaires de ϕ , on obtient finalement que

$$\begin{aligned} X &= \frac{4}{\omega} [2E(k) - F(k)] (1 - 2k^2) \\ Y &= \frac{4}{\omega} [2E(k) - F(k)] 2k(1 - k^2)^{1/2} \\ 1 &= \frac{4}{\omega} F(k) \end{aligned}$$

avec les mêmes notations que ci-dessus. Ces expressions ne font finalement intervenir que k et ω .

Conclusion

Même dans ces cas simplifiés, il est impossible d'inverser ces relations, et de trouver quel brin satisfait à des conditions globales imposées (X, Y, L) . Cependant, ces expressions analytiques seront utiles lorsqu'il s'agit de parcourir toutes les solutions possibles, par exemple pour montrer des propriétés d'unicité.

B. UNE INTÉGRALE PREMIÈRE SUPPLÉMENTAIRE?

Nous exploitons dans cet appendice l'analogie entre les formes de tige flambée et celles de ménisque (ou de gouttes) pour en déduire une nouvelle intégrale première.

Une intégrale première naturelle

Pour un ménisque, une quantité physique intéressante est le poids du liquide soulevé. Il est relié à l'aire située entre l'horizontale au point le plus bas du ménisque (figure B.1 page suivante) et la courbe qui définit celui-ci. Son calcul s'obtient par intégration en x de l'équation 2.4, l'origine des hauteurs étant prise sur l'interface loin des plaques. Celle-ci se simplifie en remarquant que $dx/ds = \cos(\theta)$:

$$\int \cos(\theta) d\theta = \frac{\rho g}{\sigma} \int y dx.$$

On en déduit la relation intégrale suivante, où A représente l'aire en grisé sur la figure B.1 page suivante :

$$2\sigma \cos(\alpha) = \rho g A.$$

Elle signifie physiquement que *la force verticale exercée par la tension de surface est égale au poids du liquide soulevé dans le ménisque*. En pratique, cette relation physique est souvent plus utile (par exemple, pour trouver la hauteur d'ascension d'un fluide dans un capillaire – loi de Jurin) que les solutions formelles de ce problème sous forme d'intégrales elliptiques.

En revenant à notre problème élastique, quel est l'apport de cette intégrale première? Partant de l'équation d'équilibre des moments (1.16), analogue à la relation d'équilibre des pressions, et intégrant par rapport à x , il vient

$$[\sin(\theta)] = [\dot{\theta}_0 x + qx^2/2] - p \int y dx \quad (\text{B.1})$$

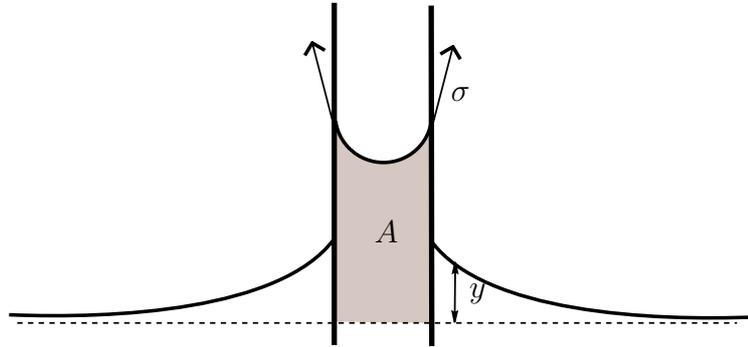


Fig. B.1 – La tension de surface est compensée par le poids du liquide soulevé au dessus de la hauteur d'équilibre (en grisé).

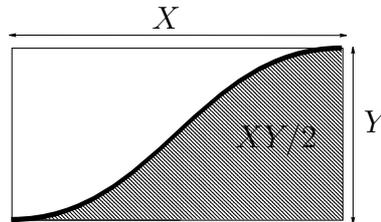


Fig. B.2 – L'aire hachurée est par symétrie égale à la moitié de celle du rectangle donc $XY/2$. Cette intégrale première n'amène cependant rien de nouveau.

Traduction à l'intégralité d'un brin

Le dernier terme, intégré entre les deux points de contacts, correspond à l'aire délimité par la courbe, dont on sait par symétrie qu'elle vaut $A = XY/2$. Ceci conduit alors à

$$pXY/2 = \dot{\theta}_0 X + qX^2/2$$

et donc finalement à $2\dot{\theta}_0 = pY - qX$, intégrale première que l'on connaissait déjà par l'équilibre global des moments.

Application aux brins à contacts plans

Considérons la relation (B-1) entre le point de contact et le point d'inflexion. Elle conduit, pour l'aire B délimitée par cette demi-courbe, à une équation qui se réduit, dans le cas des contacts plans à

$$\sin(2\bar{\theta}) = qX^2/2 - pB,$$

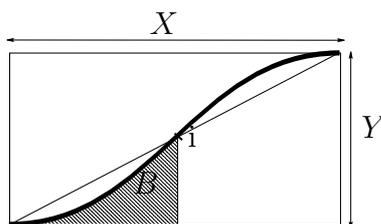


Fig. B.3 – Les force p et q peuvent s'exprimer dans le cas de contacts plans à l'aide de (X, Y) et de l'aire B hachurée.

puisque $\dot{\theta}_0 = 0$ et que $\theta_i = 2\bar{\theta}$, Comme $\tan(\bar{\theta}) = q/p = Y/X$, on en déduit l'expression de p et q en fonction des paramètres géométriques X , Y et B ,

$$p = \frac{16YX}{(X^2 + Y^2)(XY - 8B)} \quad (\text{B.2})$$

$$q = \frac{16Y^2}{(X^2 + Y^2)(XY - 8B)} \quad (\text{B.3})$$

Remarquons que puisque la courbe est concave, l'aire B est toujours inférieure à celle sous la diagonale, $XY/8$, de sorte que le dénominateur ne peut s'annuler.

Ces intégrales premières sont formellement intéressantes, car elles permettent de relier globalement géométrie et contraintes. Cependant l'aire B est un nouveau paramètre, sur lequel on dispose de peu d'information. Aussi ces équations auront peu d'intérêt pratique.

C. EXISTENCE DE PLIS ASYMÉTRIQUES SANS FROTTEMENT

Nous montrons ici qu'il existe des solutions asymétriques, même si l'on fait l'hypothèse d'un contact sans frottement, c'est-à-dire que $p_1 = p_2$

On impose donc 6 contraintes ($X_1 + X_2 = X$, $L_1 + L_2 = L$, $Y_1 = Y_2 = Y$, $p_1 = p_2$, $\theta_1 = \theta_2$), et on dispose de 6 paramètres libres (p_i , q_i , θ_i). Si le système d'équation était linéaire et non dégénéré, on aurait une solution unique : la solution symétrique. Du fait de la non-linéarité, on peut s'attendre au plus à un nombre fini de solutions supplémentaires.

Contactes ponctuels

Construction à l'aide de la simulation de telles solutions : on fixe $p, \dot{\theta}_0$. En imposant q , l'intégration de $\theta(s)$ est menée en fonction de s à partir de $\theta(0) = 0$ jusqu'au moment où $\theta(s)$ s'annule à nouveau, ce qui forme ainsi un brin. On note alors $l(q), x(q), y(q)$ la boîte du brin obtenu. Or la variation de $y(q)$ en fonction de q n'est pas monotone. Il existe donc des couples de brins indexés par (q_1, q_2) qui sont tels que $y(q_1) = y(q_2)$. Par construction ces brins satisfont donc les conditions de raccordement puisqu'ils ont le même $(p, \dot{\theta}_0)$. Ces plis sont donc compatibles et peuvent être assemblés en une solution asymétrique dans une boîte totale $(X_1 + X_2, y, L_1 + L_2)$. Cette méthode permet ainsi de construire des solutions asymétriques, mais pas de connaître leur domaine d'existence général.

contacts plans

Dans ce cas une méthode calquée sur la précédente permet d'utiliser les intégrales elliptiques complètes (voir A page 165). p étant fixé, l'étude des variations de

$$Y(\bar{\theta}) = \frac{4}{\sqrt{p}} \sqrt{\cos(\bar{\theta})} (2E(k) - F(k)) \sin(\bar{\theta}) \quad (\text{C.1})$$

en fonction de $k = \sin(\bar{\theta}/2)$ montre que Y s'annule d'une part pour $\bar{\theta} = 0$ et d'autre part pour $\bar{\theta} = \pi/2$, ce qui montre déjà que cette fonction ne peut être bijective. Sur la figure C.1 page suivante, on s'aperçoit que cette courbe

en forme de cloche atteint un maximum pour $k_a = \sin(\bar{\theta}_a/2) \sim 0.4048$. Un même y est donc associé à deux angles $\bar{\theta}_1 < \bar{\theta}_a$ et $\bar{\theta}_2 > \bar{\theta}_a$ que l'on dira conjugués.

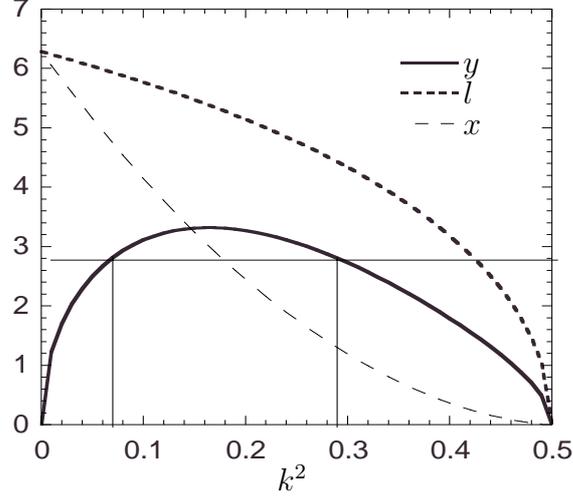


Fig. C.1 – Évolution de y en fonction de $k^2 = \sin^2(\bar{\theta}/2)$ pour $p = 1$. Quand $p > 0$, on peut toujours se ramener à $p = 1$ par adimensionnement

Une solution asymétrique est alors construite de la façon suivante : prenons deux angles $\bar{\theta}_1$ et $\bar{\theta}_2$ conjugués. En rajoutant une longueur de plat X_p arbitraire, on forme une solution asymétrique dans une boîte $X_1 + X_2 + X_p, y, L_1 + L_2 + X_p$. Cette solution peut être ramenée à $L = 1$ en adimensionnant par la longueur :

$$\begin{aligned} X/L &= (x_1 + x_2 + x_p)/(l_1 + l_2 + x_p) \\ Y/L &= y/(l_1 + l_2 + x_p) \end{aligned}$$

Inversement on peut connaître toutes les solutions asymétriques pour un X/L total donné (ce qui correspond aux contraintes expérimentales) : choisissons une hauteur y et le couple de solutions correspondantes, il reste à trouver une longueur de plat x_p qui donne le X/L désiré, ce qui fixera alors la hauteur Y/L du pli. Ceci est possible (et de façon unique) dès que $(x_1 + x_2)/(l_1 + l_2) < X/L$. Ainsi la méthode de recensement des solutions consiste à balayer les couples d'angles conjugués et de construire la solution asymétrique correspondante lorsque la contrainte ci-dessus est vérifiée (voir figure C.2 page ci-contre).

Plusieurs cas se présentent, selon le X/L de la feuille (voir figure C.3 page 176) :

- Pour $X/L > 0,72$, le flambage intervient et empêche d'atteindre

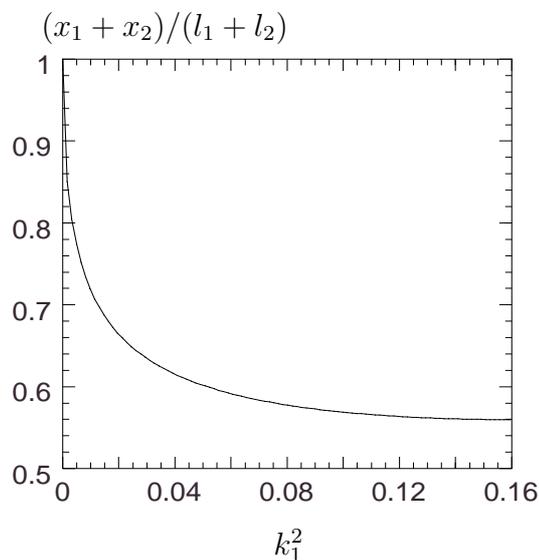


Fig. C.2 – Evolution de $(x_1 + x_2)/(l_1 + l_2)$ en fonction de $k_1^2 = \sin^2(\bar{\theta}_1/2)$, avec $p = 1$. Pour $X/L > 0,55$ il n'y a pas de solution asymétrique disponible dans le régime $p > 0$, qui peut se ramener à $p = 1$ par changement d'échelle.

$\bar{\theta}_a$, point de branchement de ces solutions. Ainsi on ne peut dans l'expérience voir apparaître de solution asymétrique à partir de solutions symétriques que grâce à des perturbations d'amplitude finie. Pourtant deux branches de solutions asymétriques existent, l'une pour $p > 0$, l'autre pour $p < 0$.

- Pour $0,57 < X/L < 0,72$, les solutions apparaissent quand on atteint $\bar{\theta}_a$, puis la longueur des plats X_p diminue avec Y , contrairement aux solutions symétriques. Lorsque finalement X_p s'annule, on a un point de connexion à une branche asymétrique contact ponctuel.
- pour $0,56 < X/L < 0,57$, il n'y a plus de solutions asymétriques dans le régime $p > 0$.
- pour $X/L < 0,56$, le flambage n'a plus lieu (champignon), on peut donc atteindre les solutions asymétriques disponibles dans le régime du champignon $p < 0$.

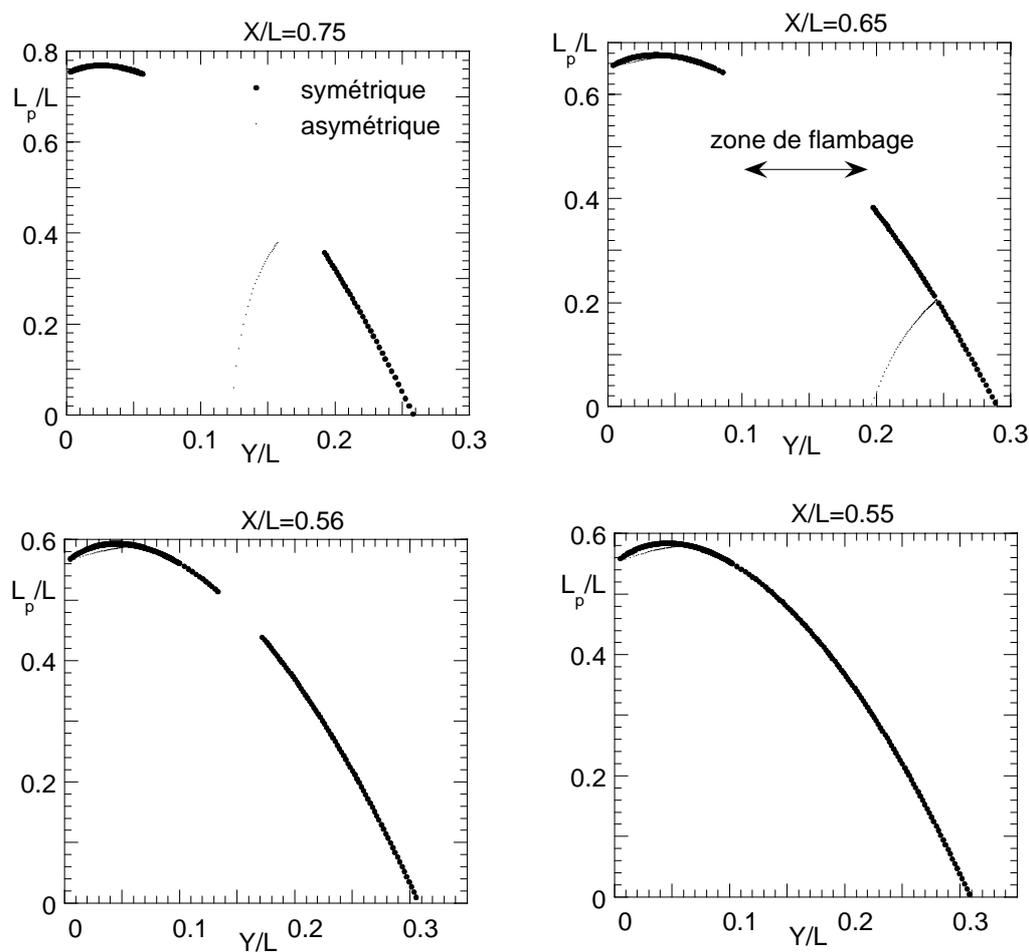


Fig. C.3 – Représentation de la longueur de plat L_p des solutions symétriques et asymétriques à contact plan, en fonction de la compression Y/L , pour différentes valeurs de l'excès de surface, paramétré par X/L . Les solutions instables vis-à-vis du flambage ne sont pas représentées.

D. LA COLONNE D'EULER, SOLUTION EXACTE DES ÉQUATIONS DE Föppl-Von Kármán

On cherche une solution des équations de Föppl-Von Kármán (χ, ζ) pour la colonne d'Euler $\zeta(x, y) = \zeta(x)$ satisfaisant la symétrie $x \rightarrow -x$, ainsi que les conditions imposées expérimentalement. Celles-ci correspondent à un rapprochement latéral δ_x des conditions d'encastrement, à un taux de compression longitudinal $u_{yy}(x = \pm b) = -\epsilon_y$, et bien sûr $\zeta(x = \pm b) = \zeta'(x = \pm b) = 0$.

La 2eme équation de Föppl-Von Kármán (5.2), page 144 donne $\Delta^2 \chi = \chi_{y^4} + 2\chi_{x^2, y^2} + \chi_{x^4} = 0$, puisque la courbure de Gauss est nulle. Mais on a aussi $\chi_{y^4} = \partial^2 \sigma_{xx} / \partial y^2 = 0$ et $\chi_{x^2, y^2} = \partial^2 \sigma_{yy} / \partial y^2 = 0$, soit $\chi_{x^4} = 0$, qui s'intègre en

$$\chi(x, y) = \chi_3(y)x^3 + \chi_2(y)x^2 + \chi_1(y)x + \chi_0(y).$$

On en déduit $\sigma_{yy} = 6\chi_3(y)x + 2\chi_2$, qui doit être indépendant de y par invariance, et paire en x . Donc $\chi_3 = 0$ et χ_2 est une constante notée $\sigma_{yy}/2$. D'autre part $\sigma_{xx} = \chi_1''x + \chi_0''$ doit vérifier les mêmes conditions, ce qui impose que χ_1 est une fonction linéaire de y et χ_0 une fonction quadratique. Finalement on obtient

$$\chi(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}y^2 + \sigma_{yy}x^2) - \sigma_{xy}xy,$$

les trois contraintes étant *uniformes* dans tout le film.

Avec ce résultat la première équation de Föppl-Von Kármán s'écrit simplement

$$D\Delta^2 \zeta - h(\sigma_{xx}\zeta'') = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation linéaire à coefficients constants. Elle ne permet de satisfaire les conditions aux limites sur ζ que si $\sigma_{xx} < 0$, c'est-à-dire pour une contrainte compressive. Dans ce cas

$$\zeta(x) = \zeta_m \frac{1 + \cos\left(\sqrt{h|\sigma_{xx}|/D}x\right)}{2}$$

avec

$$\sigma_{xx} = -\frac{D\pi^2}{b^2h} = -\frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2}$$

où b représente la demi-largeur.

Pour déterminer les autres contraintes ainsi que l'amplitude ζ_m , il faut de nouveau exploiter les conditions aux limites en revenant aux déplacements relatifs,

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ u_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ u_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \end{aligned}$$

Or $u_{yy} = -\epsilon_y$, et $u_{xy} = 0$ en $x = \pm b$, tandis que la réduction de la distance entre les conditions d'encastrement impose $u_x(-b) = \delta'_x = 2b\epsilon_x$, si ϵ_x est le taux de réduction des longueurs imposé par le substrat.

Cette dernière condition peut s'exprimer comme $\int \partial u_x / \partial x dx = -\delta'_x$, c'est-à-dire

$$\int_{-b}^b dx \left[\frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] = -2b\epsilon_x$$

Après intégration, les conditions à remplir sont

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} &= -E\epsilon_y \\ \frac{b}{E} (\sigma_{xx}(1-\nu^2) + \nu E\epsilon_y) - \frac{1}{16} \zeta_m^2 \frac{\pi^2}{b} &= b\epsilon_x \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} \\ \sigma_{yy} &= -E\epsilon_y - \nu \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} \\ \left(\frac{\zeta_m}{h} \right)^2 &= \frac{4}{3} \left[\frac{12b^2}{\pi^2 h^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - 1 \right]. \end{aligned}$$

On peut réécrire ces résultats en notant $\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0$ les contraintes qui s'exerceraient sur la plaque si elle n'était pas flambée, et en posant $\sigma^E = E\pi^2 h^2 / 12(1-\nu^2) b^2$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\sigma^E \\ \sigma_{yy} &= (\sigma_{yy}^0 - \nu\sigma_{xx}^0) - \nu\sigma^E \\ \left(\frac{\zeta_m}{h}\right)^2 &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\sigma_{xx}^0}{\sigma^E}\right) - 1 \right].\end{aligned}$$

Ceci constitue une des rares solutions exactes des équations de Föppl-Von Kármán.

180 D. La colonne d'Euler, solution exacte des équations de Föppl-Von Kármán

E. ARTICLES

E.1 NON-LINEAR CONSTRAINED ELASTICA

En préparation

**E.2 BUCKLING CASCADE OF THIN PLATES : FORMS,
CONSTRAINTS AND SIMILARITY**

Europhysics Letters, 46 (5) 1999

**E.3 CASCADE DE BIFURCATION DE FLAMBAGE :
RÉPONSE MÉCANIQUE ET SIMILARITÉ**

rencontre du non-linéaire 1999

**E.4 DE L'ANALYSE DE L'ELASTICA AUX
PROPRIÉTÉS GLOBALES DE PLAQUES
ÉCRASÉES**

rencontre du non-linéaire 2000

E.5 ENTRE L'ARBRE ET L'ÉCORCE

Pour la Science, mai 1999

Références

- [1] S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 1995. [1.2](#)
- [2] B. Audoly. Stability of straight delamination blisters. *Physical Review Letters*, 83:4124, 1999. ([document](#)), [5.1](#), [5.3.2](#), [5.3.2](#)
- [3] B. Audoly. *Élasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone*. PhD thesis, ENS, Janvier 2000. [5.1](#), [5.1](#)
- [4] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, and M. Pottier-Ferry. An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for numerical methods in engineering*, 36(8):1251–77, 1993.
- [5] M. Ben Amar and Y. Pomeau. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 453:729–755, 1997. [4.2](#), [4.2.2](#), [4.2.4](#)
- [6] D. Bernoulli. *Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, 1751. ([document](#))
- [7] M. Boucif, J. Weisfred, and E. Guyon. Experimental study of wavelength selection in the elastic buckling instability of thin plates. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 10:641, 1991. [5.3.1](#)
- [8] A. Boudaoud, P. Patricio, Y. Couder, and M. Ben Amar. Dynamics of singularities in a constrained elastic plate. *Nature*, 2000. [4.2](#), [14](#)
- [9] J. Bull, J. Martinod, and P. Davy. Buckling of the oceanic lithosphere from geophysical data and experiments. *Tectonics*, 11(3), 1992. ([document](#))
- [10] J. Cao and M.C. Boyce. Wrinkling behavior of rectangular plates under lateral constraint. *Int. J. Solids Structures*, 34(2):153–176, 1997. [1.1](#)
- [11] E. Cerda, S. Chaïeb, F. Melo, and L. Mahadevan. Conical dislocation on crumpling. *Nature*, 401, 1999. [4.2](#), [4.2.4](#)
- [12] E. Cerda and L. Mahadevan. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Physical Review Letters*, 80(11):2358, 1998. [4.2](#)
- [13] H. Chai. The post-buckling response of a bi-laterally constrained column. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(7):1155–1181, 1998. [1.1](#), [2.1](#), [3.5](#)
- [14] S. Chaïeb and F. Melo. Experimental study of crease formation in an axially compressed sheet. [?](#), [?](#) [4.2](#)
- [15] S. Chaïeb, F. Melo, and J-C. Géminard. Experimental study of developable cones. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2354, 1998. [4.2](#)
- [16] X. Chateau and Q. Nguyen. Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1:71–89, 1991. [1.1](#), [2.1](#)

- [17] S. Chou and J. Rhodes. Review and compilation of experimental results on thin-walled structures. *Computers and structures*, 65(1):47, 1997. [5.2.1](#)
- [18] F. CLeymand, C. Coupeau, J. Colin, and J. Grilhé. Interactive study of straight-sided buckling patterns in thin films under compressive stress. *Eur. Phys. J. AP*, 10, 2000. [5.4.3](#)
- [19] F. CLeymand, C. Coupeau, J. Colin, and J. Grilhé. Mechanical behaviour of thin films on substrates : debonding and buckling. *J. Phys. IV France*, 10, 2000. [5.4.3](#)
- [20] K.M. Crosby and R.M. Bradley. Pattern formation during delamination and buckling of thin films. *Phys. Rev. E*, 59(3), 1999. [\(document\)](#)
- [21] H. Deuling and W. Helfrich. The curvature elasticity of fluid membranes: a catalogue of vesicle shapes. *Journal de Physique*, 37:1335, 1976. [\(document\)](#)
- [22] G. Domokos and P. Holmes. Euler’s problem, euler’s method, and the standard map; or the discrete charm of buckling. *J. Nonlinear Sci*, 3:109–151, 1993. [2.1](#)
- [23] G. Domokos and P. Holmes. on non-inflexional solutions of non-uniform elasticae. *Int.J.Non-Linear Mechanics*, 28:677–685, 1993. [2.1](#)
- [24] G. Domokos, P. Holmes, and B. Royce. Constrained euler buckling. *J. Nonlinear Sci.*, 7:281–314, 1997. [1.1](#), [2.1](#), [2.1.2](#), [3.5](#)
- [25] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. 1744. [\(document\)](#)
- [26] L. Euler. De sono campanarum. *Nov. Comm. Acad. Petropolitanae*, 10, 1766. [\(document\)](#)
- [27] J.P. Eymery and M.F. Denanot. Blisters in as-deposited films of b.c.c. stainless steel. *Surface and Coatings Technology*, 80:251–254, 1996. [5.1](#)
- [28] G. Gille and B. Rau. Buckling instability and adhesion of carbon layers. *Thin Solid Films*, 120, 1984. [0.10](#)
- [29] G. Gioia. Delamination of compressed thin films. *Advances in applied mechanics*, 33, 1997. [5.1](#)
- [30] H. Hesmat, J.A. Walowit, and O. Pinkus. Analysis of gas lubricated compliant thrust bearings. *Journal of lubrication technology*, 642, Octobre 1983. [1.1](#)
- [31] P. Holmes, G. Domokos, J. Schmitt, and I. Szeberényi. Constrained euler buckling: an interplay of computation and analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 170:175–207, 1999. [1.1](#), [2.1](#), [3.5](#)
- [32] J.W. Hutchinson, M.D. Thouless, and E.G. Liniger. Growth and configu-

- rational stability of circular, buckling-driven film delaminations. *Acta Metall. mater*, 40(2):295–308, 1992. [5.1](#)
- [33] H. Iseki, R. Sowerby, D. Bhattacharyya, and P. Gatt. A theoretical and experimental study of a curved strip compressed by a flat plate. *J. Applied Mech.*, 56, 1989. [1.1](#), [2.1.2](#)
- [34] H. Iseki, R. Sowerby, N. Chandrasekaran, and P. Gatt. The elastic-plastic snapping-through of a curved metal strip compressed between two rigid plates. *JSME int. J.*, I.32, 1989. [2.1.2](#)
- [35] H. Jensen. Energy release rates and stability of straight-sided, thin-film delamination. *Acta metall. mater*, 41:601–607, 1993. [5.1](#)
- [36] M. Jensen and B. Cochelin. Fracture analysis of the constrained blister test. *The journal of adhesion*, 47(4):213–243, 1994. [5.1](#)
- [37] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, moscou, 1967. [\(document\)](#), [1.2](#), [1.2.2](#), [1.2.2](#), [3](#), [2.1.1](#), [5.3](#)
- [38] L. Landau and E. Lifschitz. *Mécanique des fluides*. Éditions Mir, Moscou, 1971. [2.2.3](#)
- [39] H. Link. Über den geraden knickstab mit begrenzter durchbiegung. *Ing.Arch.*, 22, 1954. [2.1](#), [3.5](#)
- [40] A. Lobkovski. Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate. *Phys. Rev. E*, 53(4), 1996. [4.2](#)
- [41] A. Lobkovski, S. Gentges, H. Li, D. Morse, and T. Witten. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science*, 270, 1995. [\(document\)](#), [4.2](#)
- [42] A. Lobkovski and T. Witten. Properties of ridges in elastic membranes. *Phys. Rev E*, 1997. [4.2](#)
- [43] Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, 1944. [\(document\)](#), [1.2](#), [3](#), [1.2.2](#), [1.2.4](#), [3](#), [5.3](#)
- [44] J. Martinod and P. Davy. Periodic instabilities during compression of the lithosphere 2. analogue experiments. *Journal of Geophysical Research*, 99, 1994. [\(document\)](#)
- [45] N. Matuda, S. Baba, and A. Kinba. Internal stress, young's modulus and adhesion energy of carbon films on glass substrates. *Thin Solids Films*, 81:301–305, 1981. [5.1](#)
- [46] E. Miersemann and H. Mittelmann. A free boundary problem and stability for the non linear beam. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 8:516–532, 1986. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [47] T.M. Nordstrand and L.A. Carlsson. Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates. *Composite Structures*, 37:145–153, 1997. [\(document\)](#), [1.1](#)

- [48] H. Paap and L. Kramer. Wavenumber restriction in systems with discontinuous nonlinearities and the buckling instability of plates. *J. Physique*, 48:1471–1478, 1987. [1.1](#)
- [49] P. Patricio. *Instabilités géométriques en élasticité*. PhD thesis, ENS, Paris, septembre 1998. [2.1](#)
- [50] P. Patricio, M. Adda-Beddia, and M. Ben Amar. An elastica problem: instabilities of an elastic arch. *Physica D*, 124:285–295, 1998. [2.1](#), [2.1.2](#), [2.1.2](#)
- [51] L. Pauchard, Y. Pomeau, and S. Rica. Déformation des coques élastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324 II b:411–418, 1997. [4.2.2](#), [4.2.4](#)
- [52] L. Pauchard and S. Rica. Contact and compression of elastic spherical shells: the physics of a ”ping-pong” ball. *preprint ?*, 1999. [4.2.4](#)
- [53] A. Pippard. The elastic arch and its modes of instability. *Eur. J. Phys*, 11:359–365, 1990. [2.1](#), [2.1.2](#)
- [54] R. Plaut, S. Suherman, D. Dillard, B. Williams, and L. Watson. Deflections and buckling of a bent elastica in contact with a flat surface. *Int. J. Solids Structures*, 36:1209–1229, 1999. [2.1](#), [2.1.2](#)
- [55] A. Pocheau and B. Roman. Entre l’arbre et l’écorce. *Pour la Science (perspectives scientifiques)*, page Mai, 1999. [3](#)
- [56] A. Pogorelov. *Bendings of surfaces and stability of shells*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1988. [4.2](#), [4.2.4](#)
- [57] Y. Pomeau. Buckling of thin plates in the weakly and strongly nonlinear regimes. *Philosophical magazine B*, 78(2):235–242, 1998. [4.2](#), [4.2.4](#), [5.3.1](#)
- [58] Y. Pomeau and S. Rica. Plaques très comprimées. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (t. 325, Série II b):181–187, 1997. [5.3.1](#)
- [59] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical recipes*. Cambridge University Press, 1986. [2.1.2](#)
- [60] B. Roman, B. Audoly, and A. Pocheau. en préparation. [5.3.2](#)
- [61] B. Roman and A. Pocheau. Buckling cascade of thin plates: Forms, constraints and similarity. *Europhys. Lett*, 48(5):602–608, 1999. [3](#)
- [62] B. Roman and A. Pocheau. Cascade de bifurcation de flambage : réponse mécanique et similarité. *Rencontre du non-linéaire*, page 175, 1999. [3](#)
- [63] B. Roman and A. Pocheau. De l’analyse intégrale de l’elastica aux propriétés globales de plaques écrasées. *Rencontre du non-linéaire*, page 251, 2000. [3](#)
- [64] U. Seifert, K. Berndt, and R. Lipowsky. Shape transformations of ve-

- sicles: Phase diagram for spontaneous-curvature and bilayer-coupling models. *Phys. Rev. A*, 44(2), 1991. [\(document\)](#)
- [65] M. Spector, E. Naranjo, S. Chiruvolu, and J. Zasadzinski. Conformations of a tethered membrane : crumpling in graphitic oxide? *Phys. Rev. Lett.*, 73(21), 1994. [\(document\)](#)
- [66] S. Timoshenko and J. Gere. *Theory of elastic stability*. Mc Graw-Hill, 1961. [1.2.2](#), [4.1.2](#), [4.1.2](#), [5](#), [5.3.1](#)
- [67] J. Thompson and A. Champneys. From helix to localized writhing in the torsional post-buckling of elastic rods. *Proc. R. Soc Lond. A*, 452:117–138, 1996. [1.2.4](#)
- [68] E.A. Thornton. Thermal buckling of plates and shells. *Appl. Mech. Rev*, 46(10), October 1993. [5.2.1](#)
- [69] G. Van Der Heijden and J. Thompson. Helical and localised buckling in twisted rods: a unified analysis of the symmetric case. *Nonlinear Dynamics*, 21:71–99, 2000. [1.2.4](#)
- [70] C. Wang. Folding of elastica - similarity solutions. *J. Applied Mech.*, 48, 1981. [2.1](#)
- [71] C. Wang. Post-buckling of a clamped-simply supported elastica. *Int. J. Non-linear Mechanics*, 32:1115–1122, 1997. [2.1](#), [2.1.2](#)
- [72] L. Watson, S. Suherman, and R. Plaut. Two-dimensional elastica analysis of equilibrium shapes of single-anchor inflatable dams. *Int. J. Solids Structures*, 36:1383–1398, 1999. [2.1](#)
- [73] T. Witten and H. Li. Asymptotic shape of a fullerene ball. *Europhysics Letters*, 23:51–55, 1993. [\(document\)](#)
- [74] W. Zimmermann and L. Kramer. Wavenumber restriction in the buckling instability of a rectangular plate. *J. Physique*, 46:343, 1985. [5.3.1](#)