

# NOTICE DES TITRES ET TRAVAUX

**Agnès Maurel**

CHARGÉE DE RECHERCHE AU CNRS  
LABORATOIRE ONDES ET ACOUSTIQUE  
UMR CNRS 7587

ECOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES  
10, RUE VAUQUELIN,  
75005 PARIS

En vue d'obtenir l'habilitation  
à diriger des recherches  
Spécialité : Physique.



# Remerciements

Je profite avec grand plaisir de l'occasion qui m'est donnée de remercier ceux qui, à différents titres, me permettent de présenter aujourd'hui ma vie et mon oeuvre !

Tout d'abord, je remercie ceux qui seront les acteurs de cette habilitation, Anne-Sophie Bonnet, Patrice Flaud et Roger Ménard qui ont accepté de rapporter sur ce manuscrit ainsi qu'Elisabeth Dubois-Violette, Mathias Fink, Fernando Lund et Jose Eduardo Wesfreid qui me font le plaisir de participer au jury.

Je tiens à remercier Mathias Fink, qui m'a accueilli au sein de son laboratoire et l'ensemble des chercheurs du LOA, qui contribuent à créer une atmosphère agréable et stimulante. Je remercie aussi Jean-Luc Aider, Felipe Barra, Gilles Bouchet, Denis Boyer, Jean-François Mercier, Philippe Petitjeans, Maurice Rossi avec qui j'ai le plaisir de collaborer. Si leur compétence m'est précieuse, leur amitié l'est tout autant ! Une pensée toute particulière va à mon ami complice et collaborateur de toujours, Vincent Pagneux.

J'ai eu le plaisir de croiser de nombreuses personnes qui ont marqué mon parcours et je souhaite leur témoigner ici mon amitié, Michèle Larchevêque, Claude Kammoun et Daniel Euvrard, avec qui j'ai eu la joie d'enseigner à Paris 6, François Daviaud et Christiane Normand, que j'ai eu le plaisir de mieux connaître lors de mon passage au CEA, Elisabeth Dubois-Violette que je remercie pour son intérêt et sa confiance au cours de ces années. Jose Eduardo Wesfreid et Fernando Lund ont une place particulière dans cette liste. A vos y a ti, quisiera agradecerlos por lo mucho que he aprendido en el contacto con vosotros.

L'occasion est idéale pour remercier également les étudiants avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, Sébastien Manneville, Frédéric Bottausci, Yannis Cuyppers, Jacques Lamoine, Océane Arboun et Mariana Huerta.

Renée, Christophe, Mathilde & Roberto, Jean-François, Vincent & Fredo, Colette, Merci à vous !

Michel, Jean-Pierre, Andrée, Claude, Je pense à vous en cette occasion.

# Contents

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>1 Ma vie, mon oeuvre</b>	<b>1</b>
1.1 Curriculum Vitae . . . . .	2
1.2 Enseignements . . . . .	3
1.2.1 Cours/Travaux Dirigés . . . . .	3
1.2.2 Publication d'ouvrages universitaires . . . . .	3
1.2.3 Encadrement d'étudiants . . . . .	4
1.3 Activités d'administration et de diffusion de la recherche . . . . .	5
1.3.1 Responsabilités administratives . . . . .	5
1.3.2 Organisations de colloques/ écoles . . . . .	5
1.3.3 Edition d'ouvrages scientifiques . . . . .	6
1.4 Activité de Recherche . . . . .	6
1.4.1 Thème de recherche . . . . .	6
1.4.2 Participation à des projets de recherche . . . . .	7
1.4.3 Séjours dans des laboratoires étrangers . . . . .	7
1.4.4 Collaborations . . . . .	8
1.4.5 Production scientifique . . . . .	8
<b>2 Interaction son-écoulement</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Les Miroirs à Retournement Temporel . . . . .	23
2.3 La caractérisation de tourbillons dans le canal hydrodynamique . . . . .	25
2.3.1 Le canal hydrodynamique . . . . .	25
2.3.2 Les régimes de tourbillons . . . . .	26

2.3.3	La mesure ultrasonore . . . . .	26
2.3.4	Caractérisation du tourbillon . . . . .	29
2.4	Mesures acoustiques sur les aspirateurs rotatifs . . . . .	33
2.4.1	Les mesures acoustiques . . . . .	35
2.4.2	Cadre de l'interaction son-filament . . . . .	36
2.4.3	Résultats . . . . .	38
2.4.4	Suivi dynamique du filament . . . . .	42
<b>3</b>	<b>L'explosion d'un vortex comme source de turbulence</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Dispositif expérimental et principe des mesures . . . . .	48
3.3	Hypothèse de Taylor locale et construction du spectre turbulent . . . . .	50
3.4	Etude de la construction en temps de la cascade . . . . .	51
3.5	Comparaison avec le modèle de Lundgren et perspectives . . . . .	53
3.6	En guise de première annexe . . . . .	55
3.6.1	Les équations . . . . .	56
3.6.2	Calcul du terme non linéaire . . . . .	57
3.6.3	Je voudrais faire le second pas.... . . . . .	57
3.6.4	Et le pas de temps ? . . . . .	57
3.6.5	Une première simulation . . . . .	58
3.7	En guise de seconde annexe . . . . .	59
3.7.1	Fonction d'autocorrélation et spectre d'énergie . . . . .	59
3.7.2	Expression de la PSD en fonction du champ de vorticité . . . . .	60
3.7.3	Exemples de calculs de PSD . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Propagation guidée</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Position du problème . . . . .	69
4.3	Résolution du problème par la matrice impédance . . . . .	71
4.3.1	Système différentiel sur <b>a</b> et <b>b</b> . . . . .	71
4.3.2	Matrice impédance et solution en présence d'une source . . . . .	72
4.4	Quelques résultats . . . . .	73
4.4.1	Méthode de résolution . . . . .	73
4.4.2	Première validation . . . . .	75

4.4.3	Seconde validation . . . . .	75
4.5	En guise d'annexe . . . . .	77
4.5.1	Relation de dispersion des modes de Lamb . . . . .	77
4.5.2	Relation de biorthogonalité et expression de $J_n$ . . . . .	78
4.5.3	Propriété des matrices $F$ et $G$ . . . . .	79
4.5.4	Expression des matrices $N_i$ . . . . .	79
4.5.5	La condition de biorthogonalité et sa forme dérivée . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Interaction ondes élastiques/ dislocations</b>	<b>83</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Interaction d'une onde élastique avec une dislocation . . . . .	87
5.2.1	Les équations de base . . . . .	87
5.2.2	Cas d'une dislocation vis . . . . .	90
5.2.3	Cas d'une dislocation coin . . . . .	91
5.2.4	Une petite conclusion . . . . .	94
5.2.5	Une petite annexe . . . . .	95
5.3	Propagation d'une onde élastique dans un polycristal . . . . .	99
5.3.1	Le formalisme employé . . . . .	99
5.3.2	Le potentiel associé à un joint de grain . . . . .	100
5.3.3	Calcul de l'opérateur de masse . . . . .	102
5.3.4	Calculs des nombres d'onde effectifs . . . . .	103
5.3.5	Comportement de la vitesse et de l'atténuation . . . . .	104
5.3.6	Fonctions de diffusion d'un joint de grain . . . . .	105
5.3.7	En guise d'annexes . . . . .	112
<b>A</b>	<b>S. Manneville, A. Maurel, P. Roux &amp; M. Fink, "Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors", <i>Eur. Phys. J. B</i>, 9: 545-549 (1999).</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>S. Manneville, P. Roux, M. Tanter, A. Maurel, M. Fink, F. Bottausci &amp; P. Petitjeans, "Scattering of sound by a vorticity filament: an experimental and numerical investigation", <i>Phys. Rev. E</i>, 63: 036607 (2001).</b>	<b>119</b>
<b>C</b>	<b>Y. Cuypers, A. Maurel &amp; P. Petitjeans, "Vortex burst as a source of turbulence", <i>Journal of Turbulence</i>, 5:030 (2004)</b>	<b>121</b>

D	V. Pagneux & A. Maurel, “Determination of Lamb modes eigenvalues”, <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> 110(3): 1307-1314 (2001).	123
E	V. Pagneux & A. Maurel, “Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide”, <i>Proc. R. Soc. Lond. A</i> , 458: 1913-1930, (2002).	125
F	V. Pagneux & A. Maurel, “Scattering Matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids”, <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> , 116:1913 (2004).	127
G	A. Maurel, J.F Mercier & F. Lund, “Elastic wave propagation through a random array of dislocations”, <i>Phys. Rev. B</i> , 70:024303 (2004).	129
	<b>Bibliography</b>	<b>131</b>



# Chapter 1

## Ma vie, mon oeuvre

---

EN BREF:

Je me présente dans ce chapitre et pour aller au plus vite, voilà qui je suis: Agnès Maurel, née le 21 Novembre 1968, j'ai passé ma thèse en 1994 sur un problème d'instabilité et sous la direction de Jose Eduardo Wesfreid au Laboratoire HMP de l'ESPCI. J'ai traversé la cours de l'école en 1996 pour rejoindre l'équipe de Mathias Fink au Laboratoire Ondes et Acoustique en tant que chargée de recherche au CNRS, section 5, après un crochet postdoctoral à Stanford et à Santiago du Chili. Je retrace depuis régulièrement la cours de l'école dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire HMP et l'Atlantique dans le cadre d'une coopération internationale avec F. Lund à Santiago du Chili.

J'ai enseigné depuis 1993, essentiellement au cours de mes deux années d'ATER (1993/1995) à l'UFR de Mécanique de l'Université Paris 6. J'enseigne depuis à l'ESPCI dans le cadre de préceptorat, à l'université Paris 7 dans le cadre de cours de l'école doctorale et depuis Septembre 2004 à l'Ecole Polytechnique en tant que professeur chargée de cours à temps incomplet en Mécanique.

J'ai co-encadré depuis 1996 le travail de thèse de deux étudiants et un post-doc et suis actuellement co-directrice de thèse de deux étudiants.

J'ai co-organisé deux colloque et trois écoles.

Je participe à deux GdR, feu le GdR Turbulence et le tout jeune GdR US. Je participe à des projets soutenus par le CNRS ou le Ministère de la Recherche (ATIP en 2001 et 2002, coopération internationale de 2001 à 2004, Projet jeunes chercheurs en 2000, Programme ECOS depuis 2005).

Je suis co-éditeur de deux ouvrages et co-auteur de 25 articles publiés; les groupes auxquels j'appartiens ont participé à beaucoup... beaucoup de congrès.

Je vous invite à la lecture de ce chapitre si vous souhaitez plus de détails.

## 1.1 Curriculum Vitae

Agnès MAUREL

Née le 21 Novembre 1968, nationalité française

Ancienne élève de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Docteur en Physique des Liquides

Chargée de Recherche au CNRS, section 5

- 1989/1993: Elève de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- 1991/1994: Thèse de Physique des Liquides effectuée au Laboratoire H.M.P. de l'E.S.P.C.I. sous la direction de J. E. Wesfreid, soutenue le 4 Juillet 1994 et obtenue avec la mention très honorable et les félicitations du jury.
- 1995: Prix de thèse de l'Association Universitaire de Mécanique.
- 1993/1995: Attachée Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'UFR de Mécanique de l'Université Paris 6.
- 1994/1996: Positions post-doctorales:
- au laboratoire HMP de l'ESPCI, Paris,
  - au Ginston Laboratory, Stanford (Etats-Unis),
  - au Département de Physique et Mathématiques de la Universidad de Chile, Santiago (Chili),
  - au Département des Procédés d'Enrichissement, Service de Physique, d'expérimentation et d'analyse du CEA/Saclay.
- depuis 1996: Chargée de Recherche au CNRS section 5 (CR1), affectée au Laboratoire Ondes et Acoustique, E.S.P.C.I., Paris.

## 1.2 Enseignements

### 1.2.1 Cours/Travaux Dirigés

1993/1995: Attachée Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'UFR de Mécanique de l'Université Paris 6 ( $\sim 200$  h/an).

Travaux Dirigés en:

- Mécanique des Milieux Continus,
- Acoustique,
- Mathématiques,
- Méthodes numériques pour la Mécanique,
- Mécanique des Fluides,
- Capteurs et Vibrations.

1997/1999: Vacations à l'UFR de Mécanique de l'Université Paris 6 ( $\sim 30$  h/an).

Travaux Dirigés en:

- Mécanique des Milieux Continus,
- Capteurs et Vibrations.

1996/2004: Tutorat de Physique des Liquides à l'ESPCI pour des élèves en deuxième année d'école ( $\sim 15$  h/an).

2002/2004: Cours de Physique des Liquides à l'Ecole Doctorale, Université Paris 7 ( $\sim 10$  h/an).

2004/ : Professeur chargée de cours à temps incomplet en Mécanique à l'Ecole Polytechnique ( $\sim 70$  h/an).

Petites Classes en:

- Microhydrodynamique,
- Dynamique et Vibrations,
- Aérodynamique compressible.

### 1.2.2 Publication d'ouvrages universitaires

- "La Physique au concours vétérinaire" (304 pages) par Michel Saint-Jean & Agnès Maurel, ed. Belin Sup Sciences, ISBN 2-7011-2729-7 (2000).
- "Optique géométrique: Cours" (218 pages) par Agnès Maurel, ed. Belin Sup Sciences, ISBN 2-7011-3035-2 (2002).

- “Optique géométrique: rappel de cours et exercices” (208 pages) par Agnès Maurel & Jean-Marie Malbec, ed. Belin Sup Sciences, 2-7011-3033-6 (2002).
- “Optique ondulatoire: Cours” (282 pages) par Agnès Maurel, ed. Belin Sup Sciences, ISBN 2-7011-3034-4 (2003).
- “Optique ondulatoire: rappels de cours et exercices” (240 pages) par Agnès Maurel & Gilles Bouchet, ed. Belin Sup Sciences, ISBN 2-7011-3032-8 (2003).

### 1.2.3 Encadrement d’étudiants

#### Etudiants près doctorant:

- Frédéric Tognet – “Modélisation et Simulation Numérique d’un vortex étiré”, stage de Maîtrise de l’Université d’Orsay, Mai- Juillet 1999.
- Guillaume Duguet – “Estimation de paramètres caractéristiques de l’écoulement d’un fluide visqueux (viscosité et gradient de pression) à partir de mesures ultrasonores de profils de vitesse”, parrainage du stage industriel de G. Duguet, élève en 2ème année de l’ESPCI effectué dans les Laboratoires d’Electronique Philips, 1999.
- Marc Guillon – “Etude de la propagation d’ondes de Lamb dans un guide élastique périodique”, stage de 1ère année de l’ENS Cachan, Juin/Juillet 2001; co-direction A. Maurel et V. Pagneux.
- Mariana Huerta – “Etude expérimentale de l’interaction d’une onde de surface avec un tourbillon de vidange”, stage de DEA de Physique théorique de l’ENS de Paris, Février 2004; co-direction A. Maurel, V. Pagneux et P. Petitjeans.
- Océane Arboune – “Etude expérimentale de l’explosion d’un vortex comme source de turbulence”, stage de DEA, Février 2004; co-direction A. Maurel et P. Petitjeans.

#### Etudiants en thèse:

- Sébastien Manneville – “Interaction son- vorticité et renversement du temps, un nouvel outil pour la caractérisation acoustique des écoulements rotationnels” (1997/2000), thèse du laboratoire Ondes et Acoustique (co- encadrement M. Fink, A. Maurel, C. Prada).

- Johan Carlson – co-encadrement de J. Carlson, en thèse au Department of Computer Science and Electrical Engineering au Lulea University of Technology (Suède) au cours de son séjour au laboratoire Ondes et Acoustique (co-encadrement R. K. Ing, A. Maurel).
- Yannis Cuyper – “Structure et dynamique de vortex” thèse en co- direction LOA (A. Maurel) et LPMMH (P. Petitjeans) de l’ESPCI. Début de la thèse: Sept. 2000.
- Jacques Lamoine – “Dynamique de Structures tourbillonnaires et Interaction son-écoulement”, thèse en co-direction LOA (A. Maurel) et LPMMH (P. Petitjeans) de l’ESPCI. Début de la thèse: Sept. 2002.
- Mariana Huerta – “Interaction son - écoulement/ son - dislocation”, thèse en co-direction LOA (A. Maurel), LAUM (V. Pagneux) et LPMMH (P. Petitjeans). Début de la thèse: Sept. 2004.

#### **Etudiants en post- doctorat:**

- Guillaume Ovarlez – “Interaction onde et surface/ tourbillon”, stage post- doctoral en co- direction A. Maurel, V. Pagneux et P. Petitjeans (2003).

## **1.3 Activités d’administration et de diffusion de la recherche**

### **1.3.1 Responsabilités administratives**

- 1998/2001: Membre de la commission de spécialistes de l’UFR de Mécanique de l’Université Paris 6.
- 2001/2003: Membre de la Commission de spécialistes de l’UFR de de Mécanique de l’Université Paris 7.
- 2000/2002: Experte pour la région Rhones- Alpes dans le cadre de l’appel d’offres Programmes Thématiques 2000-2002.
- depuis 2003: Membre du comité scientifique de l’Institut Scientifique de Cargèse.

### **1.3.2 Organisations de colloques/ écoles**

- Colloque Euromech “Vortices and field interactions” ,  
ESPCI-Paris, 8-12 Septembre 2003,  
Chairman: M. Rossi, Co-chairmen: A. Gilbert & A. Maurel.

- Ecole d'été "Vortex, un concept général en physique",  
Institut Scientifique de Cargèse, 4-16 Juillet 2004,  
Organisateurs: A. Maurel, V. Pagneux & P. Petitjeans.
- Ecole de printemps "Turbulence, Mesures et Signaux",  
Institut Scientifique de Cargèse, 13-26 Mai 2002,  
Organisateurs: C. Baudet, A. Maurel, O. Michel, V. Perrier & P. Petitjeans.
- Ecole d'été "Sound-flow interaction",  
Institut Scientifique de Cargèse, 19 Juin -1er Juillet 2000,  
Organisateurs: Y. Aurégan, A. Maurel, V. Pagneux & J.F. Pinton.
- Journées "Structure et Dynamique de Vortex",  
Cloître des pénitents, Rouen, 27-28 Avril 1999,  
Organisateurs: A. Maurel & P. Petitjeans.

### 1.3.3 Edition d'ouvrages scientifiques

- "Sound Flow Interaction", Lecture Notes in Physics,  
édité par Y. Aurégan, A. Maurel, V. Pagneux & J.F. Pinton,  
Springer Verlag, ISBN 3-540-43332-5, 2002.
- "Vortex Structure and Dynamics", Lecture Notes in Physics,  
édité par A. Maurel & P. Petitjeans ,  
Springer Verlag, ISBN 3-540-67920-0, 2000.

## 1.4 Activité de Recherche

### 1.4.1 Thème de recherche

- Propagation d'ondes de Lamb dans des guides élastiques,
- Diffusion et Multidiffusion d'ondes élastiques par une/ des dislocations,
- Interaction son - écoulement, Hydrodynamique et retournement temporel,
- Structure et Dynamique d'un vortex, Instabilités, Turbulence.

### 1.4.2 Participation à des projets de recherche

- 2001/2004: Responsable française du projet “Propagation d’onde en milieu continu désordonné”, Coopération franco- chilienne dans le cadre de l’accord CNRS/CONICYT.
- 2001/2002: Co- responsable (A. Maurel & P. Petitjeans) du Projet “Dynamique de structures tourbillonnaires et interaction son- vorticité” dans le cadre du Soutien aux jeunes chercheurs du CNRS/SPI.
- 2005/ : Membre du programme ECOS “Propagation d’onde en milieu continu désordonné”, Coopération franco- chilienne.
- 2002/2003: Co- responsable (A. Maurel & P. Petitjeans) du Projet “Dynamique de structures tourbillonnaires et interaction son- vorticité” dans le cadre des Actions Thématiques Incitatives sur Programme “jeunes chercheurs”.
- 2000/2002: Participation au projet “Jeunes équipes” du CNRS/SPI sur le thème “Couplage acoustique - vorticité” (responsable: V. Pagneux, 5 membres).
- 2000/2003: Membre du GDR Turbulence.
- depuis 2003: Membre du GDR UltraSon propagation guidée et propagation en milieux complexes.

### 1.4.3 Séjours dans des laboratoires étrangers

- 1996: Séjour au Ginzton Laboratory, Stanford University, Stanford California – Etats- Unis (2 mois).
- 1996: Séjour au département de Physique de la Universidad de Chile, Santiago – Chili (2 mois).
- 2001: Séjour au Centre de Recherche pour les Matériaux (CIMAT), Universidad de Chile, Santiago – Chili (3 mois).
- 2002: Séjour au Centre de Recherche pour les Matériaux (CIMAT), Universidad de Chile, Santiago – Chili (1 mois).
- 2003: Séjour au Centre de Recherche pour les Matériaux (CIMAT), Universidad de Chile, Santiago – Chili (3 semaines).
- 2004: Séjour au Centre de Recherche pour les Matériaux (CIMAT), Universidad de Chile, Santiago – Chili (2 semaines).
- 2005: Séjour au Centre de Recherche pour les Matériaux (CIMAT), Universidad de Chile, Santiago – Chili (3 semaines).

#### 1.4.4 Collaborations

- R. Berthet, ENS, Paris,
- D. Boyer, UNAM, Mexico – Mexique,
- G. Bouchet, IMF, Strasbourg,
- F. Lund, CIMAT, Univ. Chile, Santiago – Chili,
- J.F. Mercier, SMP/ENSTA, Paris,
- V. Pagneux, LAUM, Le Mans,
- P. Petitjeans, HMP/ESPCI, Paris,
- M. Rossi, LMM, Paris.

#### 1.4.5 Production scientifique

##### Revue à comité de lecture

1. A. Maurel, V. Pagneux, D. Boyer & F. Lund,  
Propagation of elastic waves through polycrystals: the effect of scattering from dislocation arrays,  
soumis à *Proc. R. Soc. Lond. A* (2005).
2. V. Pagneux & A. Maurel,  
Multimodal method for Lamb waves propagation in non uniform guide,  
soumis à *Proc. R. Soc. Lond. A* (2005).
3. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans,  
Experimental study of the energy cascade resulting from a vortex burst,  
soumis à *Journal of Turbulence* (2005).
4. A. Maurel, V. Pagneux, D. Boyer & F. Lund,  
Elastic wave propagation through a distribution of dislocations,  
à paraître dans *Materials Science & Engineering: A*. (2004).
5. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans,  
Comparison between an experimental turbulent vortex and the Lundgren vortex,  
*Journal of Turbulence*, **5**:030 (2004).
6. V. Pagneux & A. Maurel,  
Scattering Matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids,

- J. Acoust. Soc. Am.*, **116**:1913 (2004).
7. A. Maurel, J.-F. Mercier & F. Lund,  
Scattering of an elastic wave by a single dislocation,  
*J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(6): 2773-2780 (2004).
  8. A. Maurel, J.-F. Mercier & F. Lund,  
Elastic wave propagation through a random array of dislocations,  
*Phys. Rev. B*, **70**:024303 (2004).
  9. M. Rossi, F. Bottausci, A. Maurel & P. Petitjeans,  
A non uniformly stretched vortex,  
à paraître dans *Phys. Rev. Lett.* (2004).
  10. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans,  
Vortex burst as a source of turbulence,  
*Phys. Rev. Lett.* , **91**: 194502 (2003).
  11. V. Pagneux & A. Maurel,  
Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide,  
*Proc. R. Soc. Lond. A* , **458**: 1913-1930, (2002).
  12. G. Bouchet, E. Climent & A. Maurel,  
Instability of a confined jet impinging on a water/air free surface,  
*Europhys. Lett.* **59**(6), p. 827 (2002).
  13. V. Pagneux & A. Maurel,  
Determination of Lamb modes eigenvalues ,  
*J. Acoust. Soc. Am.* **110**(3): 1307-1314 (2001).
  14. S. Manneville, P. Roux, M. Tanter, A. Maurel, M. Fink, F. Bottausci & P. Petitjeans,  
Scattering of sound by a vorticity filament: an experimental and numerical investigation,  
*Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001).
  15. V. Pagneux & A. Maurel,  
Irregular scattering of acoustic rays by vortices,  
*Phys. Rev. Lett.* **86**(7): 1199-1202 (2001).

16. A. Maurel & G. Bouchet,  
Simultaneous characterization of temperature and velocity profiles using Time Reversal,  
*Europhys. Lett.*, **53**(5): 584-590 (2001).
17. S. Manneville, A. Maurel, F. Bottausci & P. Petitjeans,  
Acoustic characterization of a stretched vortex in an infinite medium,  
dans “*Structure and dynamics of vortices*”, Springer-Verlag,  
ed. A. Maurel & P. Petitjeans, 231-240 (2000).
18. S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel, P. Petitjeans & M. Fink,  
A new acoustic technique for vortex dynamics investigation,  
*Phys. of Fluids*, **11**(11): 3380 - 3389 (1999).
19. S. Manneville, A. Maurel, P. Roux & M. Fink,  
Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors,  
*Eur. Phys. J. B*, **9**: 545-549 (1999).
20. A. Maurel & L. Blumenfeld,  
Etude analytique des rouleaux de convection dans un bain d’alliage,  
*C. R. Acad. Sci. Paris*, **326**, Série II, p. 251-256 (1998).
21. A. Maurel, S. Cremer & P. Jenffer,  
Experimental Study of a submerged fountain,  
*Europhys. Lett.*, **39**(5): 503-508 (1997).
22. A. Maurel, P. Ern, B. Zielinska & J.E. Wesfreid,  
Experimental Study of Self-Sustained Oscillations in a Confined Jet,  
*Phys. Rev. E*, **54**(4): 3643-3651 (1996).
23. A. Maurel, V. Pagneux & J.E. Wesfreid,  
Mean Flow Correction as Non Linear Saturation Mechanism in Instabilities,  
*Europhys. Lett.*, **32** (3): 217-222 (1995).
24. A. Maurel, V. Pagneux, G. Bouchet & J.E. Wesfreid,  
Streamlines/ Streaklines comparison for application to the experimental measurement  
of the wavelength in oscillating instabilities,

- Transaction de l'ASME, Experimental and Numerical Flow Visualization*, **218**: 123-130 (1995).
25. G. Bouchet, A. Maurel & V. Pagneux,  
Flow field decomposition applied to instabilities in confined open flows,  
*Transactions de l'ASME, Experimental and Numerical Flow Visualization*, **218**: 109-114 (1995).
26. V. Pagneux & A. Maurel,  
Etudes numériques d'instabilités en écoulements ouverts confinés,  
*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **319**, Série II, p. 617-623 (1994).
27. J.E. Wesfreid, B.J.A. Zielinska, A. Maurel, P. Ern & G. Bouchet,  
Oscillateur fluïdique : application à la débitmétrie des écoulements monophasiques,  
*La Houille Blanche*, **7**: 99-104 (1994).
28. A. Maurel & B.J.A. Zielinska,  
L'hydrodynamique au service des compteurs à gaz,  
*Bulletin de la Société Française de Physique*, **93**: 23-24 (1993).
29. A. Maurel, S. Zikikout & P. Ern,  
Flow visualization of a confined jet,  
*Transactions de l'ASME, Experimental and Numerical Flow Visualization*, **172**: 261-267 (1993).

#### Proceedings à comité de lecture

1. P. Petitjeans & A. Maurel, Vortex dynamics investigation using an acoustic technique,  
*The 5th Euromech Fluid Mechanics Conference*, Acte **475**, Toulouse (Août 2003).
2. J. Lamoine, G. Ovarlez, P. Petitjeans & A. Maurel, Dynamics of a strong stretched vortex: filament of vorticity, *The 5th Euromech Fluid Mechanics Conference*, Acte **377**, Toulouse (Août 2003).
3. Y. Cuypers, P. Petitjeans, A. Maurel, Turbulent burst of a filament of vorticity, *The 5th Euromech Fluid Mechanics Conference*, Acte **378**, Toulouse (Août 2003).

4. A. Maurel, J.-F. Mercier, V. Pagneux & F. Lund, Diffusion d'ondes élastiques par une dislocation, *XVIème Congrès Français de Mécanique*, Nice, Actes sur CD-Rom (Sept. 2003).
5. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Etude expérimentale de l'explosion d'un filament de vorticité, *XVIème Congrès Français de Mécanique*, Nice, Actes sur CD-Rom (Sept. 2003).
6. A. Maurel, J.-F. Mercier & F. Lund, Propagation of an elastic wave through many dislocations, *Forum Acusticum*, Séville – Espagne (Sept. 2002).
7. V. Pagneux & A. Maurel, Propagation des ondes de Lamb dans des guides inhomog es, *Congrès Français d'Acoustique (CFA 2002)*, Lille, Acte **203**, 1B3-1: p 27 (Avril. 2002).
8. R. Berthet, V. Pagneux & A. Maurel, Diffusion irrégulière du son par trois vortex, *Congrès Français d'Acoustique (CFA 2002)*, Lille, Acte **253**, 1C4-3: p 16 (Avril. 2002).
9. F. Bottausci, M. Rossi, A. Maurel & P. Petitjeans, Another model of stretched vortices, *Bull. de l'Am. Phys. Soc.*, APS **46**(10): 157, San Diego – USA (Nov. 2001).
10. P. Petitjeans, F. Bottausci & A. Maurel, Experimental Study of the dynamics of a stretched vortex, *Bull. de l'Am. Phys. Soc.*, APS, **46**(10): 157, San Diego – USA (Nov. 2001).
11. R. Berthet, V. Pagneux & A. Maurel, Diffusion irr gulire du son par trois vortex, *Congrès Français d'Acoustique (CFA 2000)*, Lausanne – Suisse (Sept. 2000).
12. V. Pagneux & A. Maurel, Diffusion chaotique de rayons acoustiques par plusieurs tourbillons, *Congrès Français d'Acoustique (CFA 2000)*, Lausanne - Suisse, (Sept. 2000).
13. A. Maurel, G. Bouchet & C. Prada, Caractérisation simultanée des champs de température et de vitesse par ondes acoustiques:  tude numérique en convection libre, *Congrès Français d'Acoustique (CFA 2000)*, Lausanne - Suisse, (Sept. 2000).

14. G. Bouchet, E. Climent & A. Maurel, An experimental investigation of free surface instabilities induced by an upward impinging jet, *20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2000)*, Chicago - USA, (Août 2000).
15. A. Maurel, S. Manneville, & P. Petitjeans, Intensité d'un vortex étiré, *XIVème Congrès Français de Mécanique*, Toulouse, Actes sur CD-Rom n° **847** (Sept. 1999).
16. G. Bouchet, E. Climent & A. Maurel, Auto-oscillation d'une fontaine immergée, *XIVème Congrès Français de Mécanique*, Toulouse, Actes sur CD-Rom n° **860** (Sept. 1999).
17. F. Bottausci, P. Petitjeans, J.E. Wesfreid, S. Manneville & A. Maurel, Etude expérimentale de la structure et de la dynamique de vortex, *XIVème Congrès Français de Mécanique*, Toulouse, Actes sur CD-Rom n° **789** (Sept. 1999).
18. S. Manneville, A. Maurel, C. Prada, M. Tanter & M. Fink, Ultrasound propagation through a rotational flow: numerical methods compared to experiments, *ICTA 99, Fourth International Conference on Theoretical and Computational Acoustics*, Trieste - Italie, *Bolletino di Geofisica*, **40**: 109 (Mai 1999).
19. S. Manneville, A. Maurel, M. Fink, P. Petitjeans & J.E. Wesfreid, Acoustic Investigation of a vorticity Filament using Time Reversal Mirrors, *137 th Meeting of the ASA & 2nd Convention of the European Acoustics Association Forum Acusticum*, Berlin - Allemagne, *Acta Acustica*, Suppl. 1, **85**:453 (Mars 1999)
20. S. Manneville, A. Maurel & P. Petitjeans, Etude spatio-temporelle du cycle d'explosion d'un vortex étiré, *2nd Colloque sur le Chaos Temporel et le Chaos Spatio-temporel*, Rouen, Actes, pp. 131-133 (Déc. 1998).
21. S. Manneville, F. Bottausci, P. Petitjeans & A. Maurel, A new Experiment of Vorticity Filament, *51st Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics/ APS*, Philadelphie - USA, Actes, **43**(9): 2049 (Nov. 1998).
22. S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel & P. Petitjeans, Vortex dynamics and its characterization using ultrasound, *51st Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics/ APS*, Philadelphie - USA, Actes, **43**(9): 2008 (Nov. 1998).

23. S. Manneville, A. Maurel, M. Fink, P. Petitjeans & J.E. Wesfreid, Double Time reversal Mirror for Vortex Detection, *Non linear Dynamical Systems and Acoustics*, Barcelone - Espagne, Actes, pp. 108-112 (Juil. 1998).
24. A. Maurel, J.L. Aider & S. Manneville, Considerations of energy using numerical simulations: vortices as dissipative structures, *XXth IUPAP International Conference on Statistical Physics*, Paris, Actes, PO05.9/PO05.71 (Juil. 1998).
25. F. Bottausci, S. Manneville, P. Petitjeans & A. Maurel, Experimental and Numerical Study of a stretched filament of vorticity in infinite medium: the double rotating suction system, *XXth IUPAP International Conference on Statistical Physics*, Paris, Actes, PO05.11/PO05.12 (Juil. 1998).
26. S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel & P. Petitjeans, A new Method to characterize a Vortex, *XXth IUPAP International Conference on Statistical Physics*, Paris, Actes, PO05.65/PO05.66 (Juil. 1998).
27. P. Roux, A. Maurel, J. de Rosny, S. Manneville & M. Fink, Real Time characterization of unstationnary flows using a time reversal mirror, *16th International Congress on Acoustics & 135th Meeting Acoustical Society of America*, Seattle - USA, Actes sur CD Rom (Juin 1998).
28. P. Roux, A. Maurel & M. Fink, Détection de vortex par une méthode ultrasonore, *XIIIème Congrès Français de Mécanique*, Poitiers, Actes, **1**: 19-22 (Sept. 1997).
29. A. Maurel & L. Blumenfeld, Etude analytique des rouleaux de convection dans un bain d'alliage, *XIIIème Congrès Français de Mécanique*, Poitiers, Actes, **4**: 477-480 (Sept. 1997).
30. A. Maurel, Etude numérique d'un jet confiné: caractérisation des modes linéaire et non-linéaires, *XIIème Congrès Français de Mécanique*, Strasbourg, Actes, **2**: 309-312 (Sept. 1995).
31. S. Cremer, P. Jenffer & A. Maurel, Etude expérimentale d'une fontaine immergée, *XIIème Congrès Français de Mécanique*, Strasbourg, Actes, **3**: 277-280 (Sept. 1995).
32. A. Maurel, P. Ern, G. Bouchet, B. Zielinska & J.E. Wesfreid, Experimental and Numerical Study of Self-sustained Oscillations in a Confined Jet, *Euromech - 2nd*

*European Fluid Mechanics Conference*, Varsovie – Pologne (Sept. 1994).

33. A. Maurel, B. Zielinska & J.E. Wesfreid, Nonlinear instability in confined jets, *IU-TAM Symposium “Nonlinear Instability of Non parallel Flows”*, Postdam – Etats-Unis, Actes, **1**(10): 14 (Juil. 1994).
34. A. Maurel, B. King, B. Zielinska & J.E. Wesfreid, Instabilité d’un jet confiné, *XIème Congrès Français de Mécanique*, Lille - Villeneuve d’Asq, Actes, **2**: 325-328 (Sept. 1993).
35. A. Maurel, B. Zielinska & J.E. Wesfreid, Onset of oscillations in a cavity confined jet, *Fluid Dynamics Meeting of the American Physical Society - Tallahassee*, Bull. Am. Phys. Soc., **37**: 1741 (1992).

#### **Communications à des congrès, symposium**

1. A. Maurel, J.-F. Mercier, V. Pagneux & F. Lund, Propagation d’ondes élastique à travers des dislocations, *Journées du GDR UltraSon*, Aussois (8-12 Déc. 2003).
2. V. Pagneux & A. Maurel, Propagation d’ondes de Lamb dans des guides inhomogènes, *Journées du GDR UltraSon*, Aussois (8-12 Déc. 2003).
3. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Turbulence due à l’explosion d’un tourbillon tir, *Journées du GDR Turbulence*, Rouen (20-21 Octobre 2003).
4. Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, L’explosion d’un tourbillon tir comme source de Turbulence, *Journées Tourbillons en hydrodynamique*, Porquerolles (18-24 Mai 2003).
5. J. Lamoine, P. Petitjeans & A. Maurel, Instabilités d’un vortex tir, *Journées Tourbillons en hydrodynamique*, Porquerolles (18-24 Mai 2003).
6. F. Bottausci, P. Petitjeans, A. Maurel & J.E. Wesfreid, Etude expérimentale de la structure et de la dynamique d’un vortex étiré, *Rencontre du Non-Linéaire*, Paris, (Mars 2000).
7. F. Bottausci, P. Petitjeans, J.E. Wesfreid, A. Maurel & S. Manneville, Etude expérimentale de la structure et de la dynamique d’un vortex étiré, *7ème journées de la matière condensée*, Poitiers (Août/Spet. 2000).

8. F. Bottausci, P. Petitjeans, J.E. Wesfreid, A. Maurel & S. Manneville, Instabilities of a stretched vortex, poster exposé au colloque Vortical Structures in rotating and stratified fluids, *Euromech 396 with Ercoftac and TAO Workshops*, Cortona – Italie (22-25 Juin 1999).
9. V. Pagneux & A. Maurel, Irregular scattering of acoustic rays by vortices, poster exposé au colloque Vortical Structures in rotating and stratified fluids, *Euromech 396 with Ercoftac and TAO Workshops*, Cortona – Italie (22-25 Juin 1999).
10. F. Bottausci, P. Petitjeans, S. Manneville, A. Maurel & J.E. Wesfreid, Etude expérimentale de la structure et de la dynamique de vortex, communication au *colloque Structure et Dynamique de vortex*, Rouen (27-28 Avril 1999).
11. S. Manneville, A. Maurel, F. Bottausci & P. Petitjeans, Les doubles aspirateurs rotatifs: caractérisation acoustique d'un vortex en milieu infini, communication au *colloque Structure et Dynamique de vortex*, Rouen (27-28 Avril 1999).
12. A. Maurel, S. Manneville & M. Fink, Dynamical investigation of a vortex using time - reversal mirrors, communication au *Symposium on Turbulence structure*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge – Angleterre (15-19 Mars 1999).
13. P. Petitjeans, A. Maurel & S. Manneville, Experimental study of vortices created by a “double rotating suction” system, communication au *Symposium on Turbulence structure*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge – Angleterre (15-19 Mars 1999).
14. F. Bottausci, S. Manneville, P. Petitjeans & A. Maurel, Une nouvelle expérience de vortex étiré, communication aux *Journées de Physique Statistique*, E.S.P.C.I.-Paris (25-26 Janvier 1999).
15. A. Maurel & L. Blummenfeld, Etude des rouleaux de convection dans un bain d'alliage fondu, communication aux *Journées de Physique Statistique*, E.S.P.C.I.-Paris (30-31 Janvier 1997).
16. A. Maurel & F. Lund, Adaptation de la théorie de diffusion du son par un vortex à la mesure expérimentale de la vortacité, communication aux *Journées de Physique Statistique*, E.S.P.C.I.-Paris (25-26 Janvier 1996).

17. A. Maurel & L. Blummenfeld, Capillary flow of a binary mixture of liquid metals, poster exposé aux *Dynamic Days*, Lyon (10-13 Juillet 1996).
18. P. Roux, A. Maurel & M. Fink, Sound-Vorticity Interaction, poster exposé aux *Dynamic Days*, Lyon (10-13 Juillet 1996).
19. A. Maurel & J.E. Wesfreid, Instability of a confined jet, poster exposé au *6th International Workshop on Instabilities and Non Equilibrium Structures*, Valparaiso – Chili (14-19 Décembre 1995).
20. A. Maurel, G. Bouchet & V. Pagneux, Mesure de la longueur d’onde par visualisation: problème des lignes de courant et des lignes d’émission, poster exposé au *Colloque National de Visualisation et de Traitement d’Images*, St-Etienne (29 Mai-2 Juin 1995).
21. A. Maurel, G. Bouchet & J.E. Wesfreid, Etude expérimentale de jets confinés: effets de parois et/ou d’obstacles, poster exposé au *Colloque National de Visualisation et de Traitement d’Images*, St-Etienne (29 Mai-2 Juin 1995).
22. A. Maurel & J.E. Wesfreid, Confined jet, communication à *Turbulence, Weak and Strong*, Cargèse (2-14 Août 1993).
23. A. Maurel, Etude numérique d’un jet confiné, communication aux *Journées de Physique Statistique*, E.S.P.C.I.- Paris (27-28 Janvier 1994).
24. A. Maurel, B. Zielinska & J.E. Wesfreid, Instabilité de jet appliqué à la débitmétrie, communication au *2ème Workshop de Schlumberger Industries*, Montrouge (10-11 Mai 1993).
25. A. Maurel & J.E. Wesfreid, Auto-oscillations de jets, poster exposé aux *Journées de l’Hydrodynamique de la Montagne Sainte Geneviève*, Paris (6-7 Mai 1993).
26. A. Maurel, Etudes numérique et expérimentale d’un jet confiné, communication aux *Journées GdR “Ordre et Chaos dans la matière”*, Ecole Polytechnique - Palaiseau (29-30 Avril 1993).
27. A. Maurel. & B. Zielinska, Instabilités hydrodynamiques, communication au *1er Workshop de Schlumberger Industries*, Cambridge – Angleterre (8-9 Avril 1992).



## Chapter 2

# Interaction son-écoulement

---

EN BREF:

L'activité hydrodynamique au laboratoire est née de l'interrogation suivante: quel milieu brise l'invariance par renversement du temps ? Un fluide en mouvement semblait un bon candidat et P. Roux a lancé cette activité en 1994. Grâce à deux miroirs à retournement temporel placés de part et d'autre de l'écoulement, il a pu mesurer la très faible déformation d'un front d'onde plan liée à la présence d'un tourbillon dans le milieu et relier cette déformation aux caractéristiques du vortex: taille, intensité et position. Il a ainsi montré que le "double MRT" permettait une mesure non-intrusive de vorticités très faibles.

Depuis 1996, j'ai continué cette activité. Dans le cadre de la thèse de Sébastien Manneville, nous avons mis au point une technique de reconstruction du champ de vitesse d'un tourbillon à partir de l'analyse de la déformation du front d'onde [Publication *Eur. Phys. J. B*, **9**: 545-549 (1999) jointe en annexe A].

En 1998, j'ai commencé à m'intéresser, avec P. Petitjeans, au cas de "vortex étirés", c'est-à-dire de zones rotationnelles soumises à un fort gradient axial de vitesse (ou "étirement"). Cette collaboration nous a permis de perfectionner notre outil de mesure mais aussi d'obtenir de nouveaux résultats sur des problèmes très actuels en hydrodynamique. Dans un premier temps, nous avons testé la qualité des mesures par le "double MRT" sur un canal hydrodynamique basse vitesse générant un vortex par étirement de la couche limite. Un résultat important sur cet écoulement est la reconstruction bidimensionnelle du champ de vitesse du tourbillon au cours de son advection dans le canal [Publications *Phys. of Fluids*, **11**(11): 3380 - 3389 (1999) et dans "*Structure and dynamics of vortices*", Springer-Verlag, ed. A. Maurel & P. Petitjeans, 231-240 (2000)]. Ce travail est développé dans la section 2.3.

Nous avons conçu en 1999 une nouvelle expérience de vortex étiré en milieu semi-infini permettant de s'affranchir pratiquement des conditions aux bords de l'expérience et de contrôler indépendamment

tous les paramètres du vortex (rotation, étirement, longueur). Long d'une dizaine de centimètres, le filament de vorticité obtenue est très intense et possède un cœur très fin. Le rayon de cette véritable tornade, d'environ un millimètre, est de l'ordre de la longueur d'onde acoustique. Dans ce cas, l'onde ultrasonore incidente sur le vortex est non seulement déformée par le champ de vitesse de l'écoulement mais aussi diffusée par le cœur du vortex. L'analyse de la déformation du front d'onde nous donne alors la circulation et la taille du vortex. Cette dernière quantité est obtenue en comparant la déformation du front d'onde obtenu expérimentalement à celle obtenue par des simulations numériques [Publication *Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001) jointe en annexe B]. Ce travail est développé dans la section 2.4.

L'ensemble de ce travail correspond à une collaboration étroite (et sympathique) que j'ai démarré en 1998 avec Philippe Petitjeans. Les travaux que je présente dans ce chapitre ont été réalisés dans le cadre des thèses de Sébastien Manneville au LOA et de Frédéric Bottausci au HMP. Ce travail a reçu le soutien du Ministère de la Recherche dans le cadre du projet ATIP jeunes chercheurs "Dynamique de structures tourbillonnaires et interaction son-vorticité" dont j'ai la responsabilité avec Philippe Petitjeans.

C'est également au cours de ces années et motivée par les problèmes (et parfois les solutions !) que nous avons rencontrés que j'ai co-organisé, avec Philippe Petitjeans, un colloque "Structure et Dynamique de vortex" en 1997 et une  cole à l'Institut Scientifique de Cargèse sur le thème "Interaction Son- Ecoulement" en 2000, avec Yves Aurégan, Vincent Pagneux et Jean-François Pinton. C'est également dans le cadre de cette activité que j'ai participé au projet jeune équipe du CNRS/SPI de 2000 à 2003, piloté par Vincent Pagneux sur le thème "couplage acoustique vorticité".

#### PUBLICATIONS SUR CE SUJET:

- S. Manneville, A. Maurel, P. Roux & M. Fink, Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors, *Eur. Phys. J. B*, **9**: 545-549 (1999), **Publication jointe en annexe A**.
  - S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel, P. Petitjeans & M. Fink, A new acoustic technique for vortex dynamics investigation, *Phys. of Fluids*, **11**(11): 3380 - 3389 (1999).
  - S. Manneville, A. Maurel, F. Bottausci & P. Petitjeans, Acoustic characterization of a stretched vortex in an infinite medium, dans "*Structure and dynamics of vortices*", Springer-Verlag, ed. A. Maurel & P. Petitjeans, 231-240 (2000).
  - S. Manneville, P. Roux, M. Tanter, A. Maurel, M. Fink, F. Bottausci & P. Petitjeans, Scattering of sound by a vorticity filament: an experimental an numerical investigation, *Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001), **Publication jointe en annexe B**.
-

## 2.1 Introduction

L'étude de la structure et de la dynamique de tourbillons est un thème de recherche actif. En effet, ces structures qui concentrent la vorticité, ont été observées aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent où elles jouent un rôle important.

Expérimentalement, elles sont difficiles à caractériser car elles sont instationnaires à variations rapides, et sont le lieu de forts gradients de vitesse sur une taille caractéristique très petite (typiquement de l'ordre du millimètre). Pour caractériser leur structure et leur dynamique, il faut donc obtenir une mesure globale, non intrusive et à grande fréquence d'acquisition. Pour cela, les techniques classiques sont insatisfaisantes. La Velocim trie Doppler Laser ou les sondes à fil chaud sont des mesures locales et nécessitent l'ensemencement de l'écoulement, ce qui pose un autre problème:   cause des forts gradients de vitesses, les particules migrent, laissant des zones vides de particules où la mesure n'est pas possible.

L'outil acoustique permet de résoudre certains de ces problèmes et offre une alternative intéressante pour la caractérisation d'écoulement. Parce que le milieu en mouvement modifie la propagation de l'onde, cette dernière conserve une trace du champ de vitesse travers . Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature. Notamment, Fernando Lund a montré dans les années 80 qu'une mesure ultrasonore du champ de vorticité était possible en établissant une relation directe entre le champ de pression diffusée  $p(\mathbf{r}, t)$  et les composantes spectrales du champ de vorticité  $\omega(\mathbf{k}, t)$  [1, 2, 3]. Cette relation a été vérifiée expérimentalement par Baudet & al. pour un écoulement de Benard- Von K rm n dans l'air [4, 5] et utilisée par Oljaca & al. [6] dans une expérience de jet. Cette technique, présente l'avantage de donner accès au champ bidimensionnel de vorticité  $\omega(\mathbf{r}, t)$  lorsque la pression est mesurée sur une distribution  $\mathbf{r}$  suffisante. Par définition donc, elle nécessite la mesure simultanée de la pression en un nombre de points de mesure dont le nombre et la répartition peuvent être délicats à prévoir.

La technique que nous avons développée avec le dispositif des doubles MRT consiste à analyser la déformation du front d'onde  $\Delta\phi(x)$  recueillie par un ensemble de récepteurs placés sur une barrette linéaire (de direction  $x$ ) après traversée du champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  [7] (Annexe A), [8]. L'information que nous recueillons est le résultat de l'effet cumulé du champ de vitesse sur l'onde au cours de sa propagation et la difficulté consiste à traiter le problème inverse, c'est-à-dire de reconstruire  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  à partir de la mesure de  $\Delta\phi(x)$ . Lorsque cela n'est pas possible, on espère avoir des informations globales sur l'écoulement travers 

(dans le cas d'un tourbillon, sa taille, sa position et sa circulation) [9, 10].

Je parlerai dans la section 2.2 du principe des Miroirs à Renversement Temporel, et notamment du dispositif des “Doubles Miroirs à Retournement Temporel” que nous avons utilisé dans nos expériences. Les premières expériences que nous avons réalisées au LOA concernaient la caractérisation d'un tourbillon de vidange. Cette expérience nous a permis de mettre au point le dispositif des doubles MRT en mode itératif et de tester notre technique de reconstruction du champ de vitesse. Je vous renvoie à la publication dans *Europhys. Lett.* que nous avons publié sur ce sujet [7] (reportée en Annexe A).

Les deux sections 2.3 et 2.4 sont relatives aux résultats que nous avons obtenus sur deux expériences différentes:

La première consiste en un canal hydrodynamique basse vitesse dans lequel un vortex (stationnaire ou instationnaire) est généré par décollement de la couche limite et amplifié par l'application d'un étirement axial. Ce vortex, “emblématique” du Laboratoire HMP qui lui a donné la vie, a été étudié depuis de nombreuses années par Philippe Petitjeans. Sa taille typique est de quelques millimètres et il a été un excellent candidat pour nos mesures ultrasonores puisque son interaction avec une onde ultrasonore peut être décrite dans le cadre de l'acoustique géométrique. Nous avons pu traiter le problème inverse en utilisant l'axisymétrie du tourbillon. D'autres techniques, comme celle de suivie bidimensionnelle de la trajectoire du vortex, ont permis de caractériser très précisément sa structure et sa dynamique.

En 1998, nous avons conçu avec Philippe Petitjeans une nouvelle expérience que nous avons baptisé les doubles aspirateurs rotatifs. Notre soucis était le suivant: générer un tourbillon dans un milieu infini, ce qui permettait de s'affranchir des problèmes de conditions de bord. Nous souhaitions par ailleurs pouvoir contrôler les paramètres du tourbillon (étirement, rotation et longueur) indépendamment. C'est chose faite avec ce nouveau dispositif !

Les tourbillons observés ici sont beaucoup plus intenses que dans le canal. Nous carressions l'idée d'appliquer notre outil acoustique fraîchement testé sur le canal à ce nouveau dispositif mais nous avons rencontré un problème qui, s'il débouche sur des questions d'acoustique très intéressantes, mettait à mal notre technique de mesure: avec une taille de tourbillon inférieur au millimètre, l'interaction de l'onde avec le tourbillon n'est plus décrite correctement dans le cadre de l'acoustique géométrique. L'onde incidente est diffusée par le

cœur du tourbillon, qui est vu comme une inhomogénéité de la taille de la longueur d'onde ultrasonore. Nous avons alors revu à la baisse notre ambition de traiter le problème inverse puisque l'interaction son - écoulement dans ce cas reste aujourd'hui un problème ouvert. Nous avons cependant pu obtenir différents résultats quantitatifs qui sont présentés dans la section 2.4 et développés dans la publication jointe en annexe B.

## 2.2 Les Miroirs à Retournement Temporel

Le laboratoire Ondes et Acoustique a développé depuis de nombreuses années la technique de renversement temporel qui a été appliqué avec succès à de nombreux domaines comme le contrôle non destructif ou la lithotripsie. L'idée est fondée sur l'invariance de l'équation d'onde par inversion du signe du temps: soit un point source émettant une onde cylindrique à travers un milieu inhomogène vers un ensemble de récepteurs. Ces récepteurs enregistrent les signaux et ré-émettent un signal dans lequel la chronologie a été inversée (les récepteurs "retournent" le signal). Il a été montré expérimentalement au laboratoire que l'onde réémise (renversée) refocalise vers le point source même si une partie de l'information a été perdue puisque les transducteurs (répartis sur une barrette appelée Miroir à Renversement Temporel, MRT) n'entourent pas complètement la source. Tout se passe comme si l'onde "revivait" sa vie dans une chronologie inversée.

Considérons maintenant une onde émise plane. Ceci est réalisé à l'aide d'un ensemble de transducteurs répartis sur le MRT. A nouveau, au passage à travers un milieu inhomogène, le front d'onde, initialement plan, subit une déformation. Plaçons en vis à vis du MRT émetteur, un autre MRT fonctionnant en récepteur: ce dernier enregistre l'onde et la retourne temporellement. Comme dans le cas précédent, on observe que l'onde ainsi générée revit sa vie antérieure, c'est-à-dire qu'elle retrouve sa forme plane en sortie du milieu. Ce mécanisme est illustré en Fig. 2.1(a).

Ce processus est il toujours vérifié ? En fait, bien sûr non. Lorsque le milieu est dissipatif, l'invariance par renversement du temps est perdue. Ce type de milieux est étudié au laboratoire pour essayer de compenser les pertes et de retrouver la focalisation; c'est par exemple le cas de l'étude de la focalisation à travers le crâne menée au LOA par Mickael Tanter. D'autres milieux brisent l'invariance par renversement du temps: ce sont les milieux pour lesquels l'effet de l'inhomogénéité sur l'onde dépend de la direction de propagation, c'est-à-dire des inhomogénéités vectorielles par opposition à celles scalaires. C'est le cas des

écoulements pour lesquels c'est le champs de vitesse de l'écoulement qui agit sur l'onde.

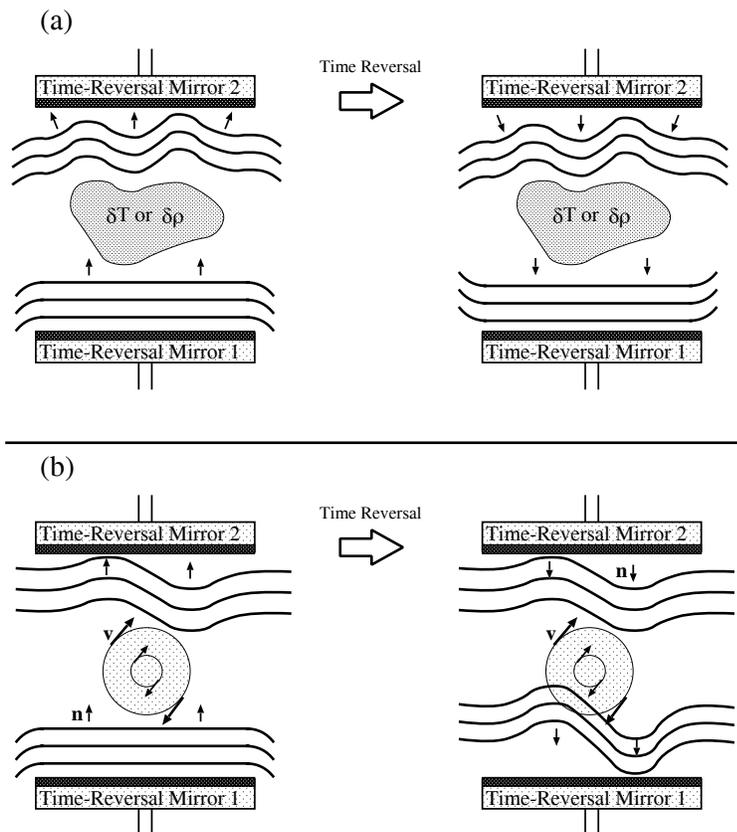


Figure 2.1: Principe des Mirroirs à Retournement Temporel (a) dans un milieu immobile: on observe l'invariance par renversement du temps, (b) en présence d'un vortex: l'invariance est brisée et la déformation de l'onde est amplifiée

Que se passe-t-il dans ce cas ? L'onde émise ne retrouve pas sa forme initiale après retournement temporel; au contraire, l'effet de l'écoulement sur l'onde s'amplifie, comme illustré en Fig. 2.1(b) pour un tourbillon insonifié par une onde plane. Heuristiquement, les rayons acoustiques qui rencontrent la partie gauche du tourbillon sont accélérés et ils atteignent les premiers le récepteur en face. Les rayons qui traversent la partie gauche du tourbillon sont, eux, ralentis et atteignent avec retard les récepteurs. Dans le processus de renversement temporel, la partie du signal reçue en premier, à gauche, est renvoyée en dernier et va croiser, lors de sa propagation retour, un champ de vitesse qui, cette fois, la ralentit. De façon symétrique, la partie gauche du signal, renvoyée en premier dans le processus de RT, traverse au retour un champ de vitesse qui l'accélère. La distorsion du

front d'onde est amplifiée par le processus de RT.

Nous dirons donc que les doubles MRT sont utilisés en mode itératif lorsque le processus de RT est itéré de façon à augmenter l'effet de l'écoulement sur l'onde. Je vous renvoie à la lecture de l'article "Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors", *Eur. Phys. J. B*, **9**: 545-549 (1999), publié à ce sujet lors des premières expériences que nous avons effectuées sur un vortex de vidange et reproduit ici en section A.

## 2.3 La caractérisation de tourbillons dans le canal hydrodynamique

### 2.3.1 Le canal hydrodynamique

Le dispositif du canal hydrodynamique est le suivant. Un écoulement laminaire est généré dans un canal hydrodynamique à partir d'une cuve à niveau constant. Le canal, en Plexiglass, est long de 2 m. Il est composé de deux sections: la première sert à générer un écoulement laminaire et la seconde correspond à la zone d'étude. L'eau rentre dans la première section à travers des petits trous de façon à éviter des effets de jets. Elle traverse ensuite un ensemble divergent- pailles -convergent (les pailles placées parallèlement à la direction de l'écoulement permettent de "casser" des -éventuelles- grosses structures générées par le divergent) et débouche finalement dans la section d'étude, de 12 cm de large et 7 cm de haut.

L'objectif de cette première section est de produire un écoulement laminaire bien contrôlé.

La seconde section, celle d'étude, est une section droite, longue de 60 cm (Fig. 2.2). A mi hauteur, on a percé des trous sur les parois latérales. Ces trous permettent de produire une aspiration de l'écoulement. A l'extrémité de la section d'étude, l'eau est évacuée à travers un système de pesée qui permet une mesure très précise du débit.

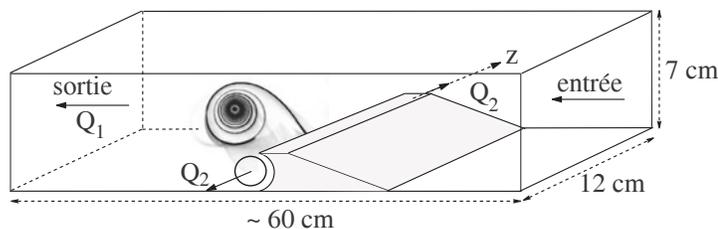


Figure 2.2: Section d'étude

Dans la première moitié de la section d'étude (avant les trous latéraux), l'écoulement laminaire produit une couche limite aux parois. Aussi, l'aspiration par les trous produit-elle une amplification de la vorticité des couches limites sur les parois horizontales (du haut et du bas). Si l'aspiration était réalisée également sur tous les trous, on observerait une amplification de la vorticité (qui peut conduire à l'apparition d'un tourbillon) de signe opposé sur les parois du haut et du bas. Dans les expériences qui nous intéressent, on a imposé une aspiration uniquement à travers les trous proches de la paroi du bas de sorte qu'on observe la formation d'un unique tourbillon (une visualisation du tourbillon est insérée sur la Fig. 2.2).

### 2.3.2 Les régimes de tourbillons

Lorsque le tourbillon est généré, on observe différents régimes suivant les valeurs des paramètres de contrôle: le débit à la sortie du canal (débit en aval) et le débit d'aspiration. Je ne rentre pas dans le détail du diagramme de phase de ces régimes mais on peut dire qu'il existe en gros deux régimes:

Pour de faibles débits en aval, le vortex reste stable, à peu près stationnaire, attaché à ses deux extrémités aux trous d'aspiration.

Lorsque le débit en aval dépasse un seuil critique, le vortex est entrainé par l'écoulement moyen jusqu'à ce qu'il "casse", c'est-à-dire qu'il se détache à ses extrémités des trous d'aspiration. Cette séparation est "violente" et elle entraîne l'explosion du vortex (l'étude de cette explosion est développée dans le chapitre 3 suivant). Une fois détaché des trous d'aspiration, la structure résultante est advectée par l'écoulement moyen, ce qui permet à nouveau tourbillon de se former à l'endroit de l'aspiration. Un processus périodique est ainsi crée: formation, explosion et advection des tourbillons.

### 2.3.3 La mesure ultrasonore

Notre technique de mesure ultrasonore est fondée sur l'interaction entre une onde acoustique et l'écoulement dans le cadre de l'acoustique géométrique. Deux barrettes de 64 transducteurs (MRT) fonctionnant à une fréquence centrale de 3.5 MHz sont utilisées, placées de part et d'autre du canal dans le plan de section du tourbillon (Fig. 2.3). Chaque transducteur a une taille de  $\lambda/2$  (où  $\lambda = 0.42$  mm est la longueur d'onde ultrasonore) suivant  $x$  (direction de la barrette) et une longueur de 10 mm (direction  $z$ ). Le champ acoustique est supposé

bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ , perpendiculaire à la plus grande dimension des transducteurs. Le MRT génère donc une onde plane quand tous les transducteurs émettent et une onde cylindrique quand un seul transducteur du MRT émet.

Chaque transducteur peut fonctionner en mode d'émission ou de réception et le système électronique qui pilote la barrette permet de renverser temporellement l'onde.

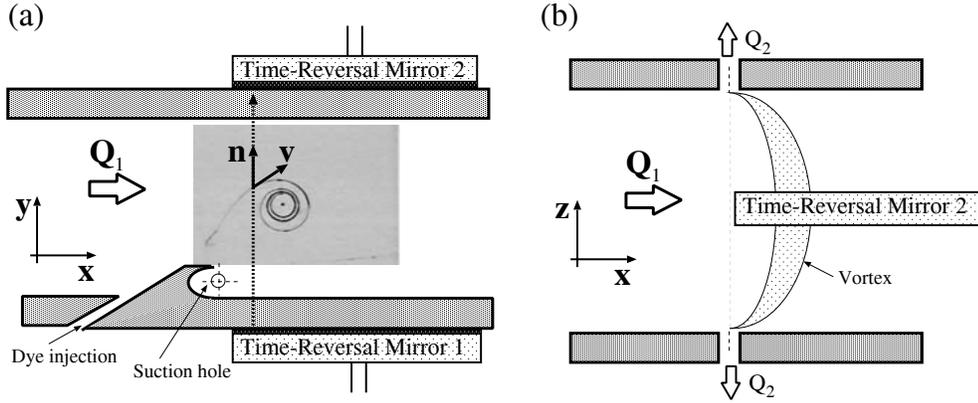


Figure 2.3: Dispositif des doubles MRT dans le canal

Le contexte de l'interaction onde - tourbillon est le suivant. Avec une taille de cœur du tourbillon de l'ordre de 5 mm grande devant la longueur d'onde ultrasonore ( $\lambda = 0.42$  mm) et une vitesse caractéristique  $U$  de l'écoulement de l'ordre de  $10 \text{ cm.s}^{-1}$  (soit un nombre de Mach  $M = U/c \simeq 10^{-4}$ , où  $c$  est la vitesse du fluide dans le fluide au repos), l'approximation de l'acoustique géométrique peut être utilisée.

Dans ces conditions, l'écoulement a deux effets sur l'onde, au premier ordre en  $M$ :

Le premier effet, de réfraction, est dû à la vorticité  $\omega$  de l'écoulement qui modifie localement la direction de propagation de l'onde, donnée par la direction  $\mathbf{n}$  à travers la loi:  $d\mathbf{n}/dt = \omega \wedge \mathbf{n}$ . Si  $D$  est la distance entre les deux MRT, la déflexion résultante produit un déplacement  $\delta x$  entre la position  $x$  du transducteur émetteur et celle du transducteur récepteur d'un ordre de grandeur  $\delta x \simeq M/D$ . Dans le canal, la distance  $D = 12$  cm, ce qui donne  $\delta x \simeq 10^{-2}$  mm. Notre résolution spatiale étant donnée par la distance entre deux transducteurs, soit 0.42 mm, on s'attend à ce que les effets de réfraction soient négligeables jusqu'à environ 40 processus de renversement temporel. On suppose donc une propagation rectiligne des rayons acoustiques.

Le second effet est dû à la modification de la vitesse locale  $v$  de l'onde par la vitesse  $\mathbf{u}$  de l'écoulement:  $v = c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Le décalage en temps du signal acoustique après une traversée de

l'écoulement est donné par  $\delta t \simeq ML/c$ , où  $L$  est la longueur caractéristique de l'écoulement. Dans le canal,  $L$  correspond à la taille du tourbillon  $d$ . Les décalages en temps sont calculés par transformée de Fourier des signaux acoustiques et la résolution est fixée par le niveau du bruit électronique  $\delta t_e \simeq 10^{-9}$  s, ce qui permet des mesures de vitesses dans le fluide de l'ordre de 10 cm/s, ce seuil étant abaissé lorsqu'on utilise les MRT en mode itératif.

Dans notre expérience, la procédure suivante a été utilisée.

Les deux MRT, que nous notons arbitrairement  $MRT_1$  et  $MRT_2$  sont placés comme indiqué sur la Fig. 2.3. Ils émettent simultanément deux ondes planes qui se propagent en sens opposé.  $S_{12}(x)$  est le signal reçu par le  $MRT_2$  quand  $MRT_1$  émet et  $S_{21}(x)$  est le signal reçu par le  $MRT_1$  quand  $MRT_2$  émet. Ces signaux sont renversés temporellement et simultanément renvoyés par les deux MRT. La différence de phase  $\Delta\phi(x)$  est alors construite comme suit:

Une mesure "à blanc" est réalisée dans laquelle l'écoulement est au repos. Les temps de vol  $t_{12}^0$  et  $t_{21}^0$  sont enregistrés. En absence d'écoulement, l'onde reste théoriquement plane. Cependant, à cause de la taille finie des transducteurs, le front d'onde est déformé à chaque aller-retour à travers le milieu. Ces temps de vol sont soustraits aux temps de vol  $t_{12}$  et  $t_{21}$  enregistrés en présence de l'écoulement, ce qui conduit aux retards  $\delta t_{12}$  et  $\delta t_{21}$ .

Les retards  $\delta t_{12}$  et  $\delta t_{21}$  ne correspondent pas aux seuls effets de l'écoulement: ils peuvent contenir les effets d'inhomogénéités scalaires comme la température. Une possibilité pour compenser les effets scalaires est de mesurer ces retards après un nombre pair de traversées de l'onde à travers l'écoulement. Une autre possibilité, que nous avons retenue ici, consiste à effectuer la différence des deux retards  $\delta t_{12}$  et  $\delta t_{21}$ . Parce que les effets scalaires ne dépendent pas de la direction de propagation de l'onde, ils sont communs aux deux retards et s'annulent donc par différence. Le déphasage est défini par:  $\Delta\phi(x) = \omega [\delta t_{12} - \delta t_{21}] / 2$ . La dépendance de  $\Delta\phi(x)$  sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  s'écrit donc

$$\Delta\phi(x) = \frac{\omega}{2} \left[ \int_{MRT_1}^{MRT_2} \frac{dy}{(c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})} - \int_{MRT_1}^{MRT_2} \frac{dy}{c} \right] - \frac{\omega}{2} \left[ \int_{MRT_2}^{MRT_1} \frac{dy}{(c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})} - \int_{MRT_2}^{MRT_1} \frac{dy}{c} \right], \quad (2.1)$$

soit

$$\Delta\phi(x) \simeq \int_{MRT_1}^{MRT_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \frac{\omega}{c^2} dy. \quad (2.2)$$

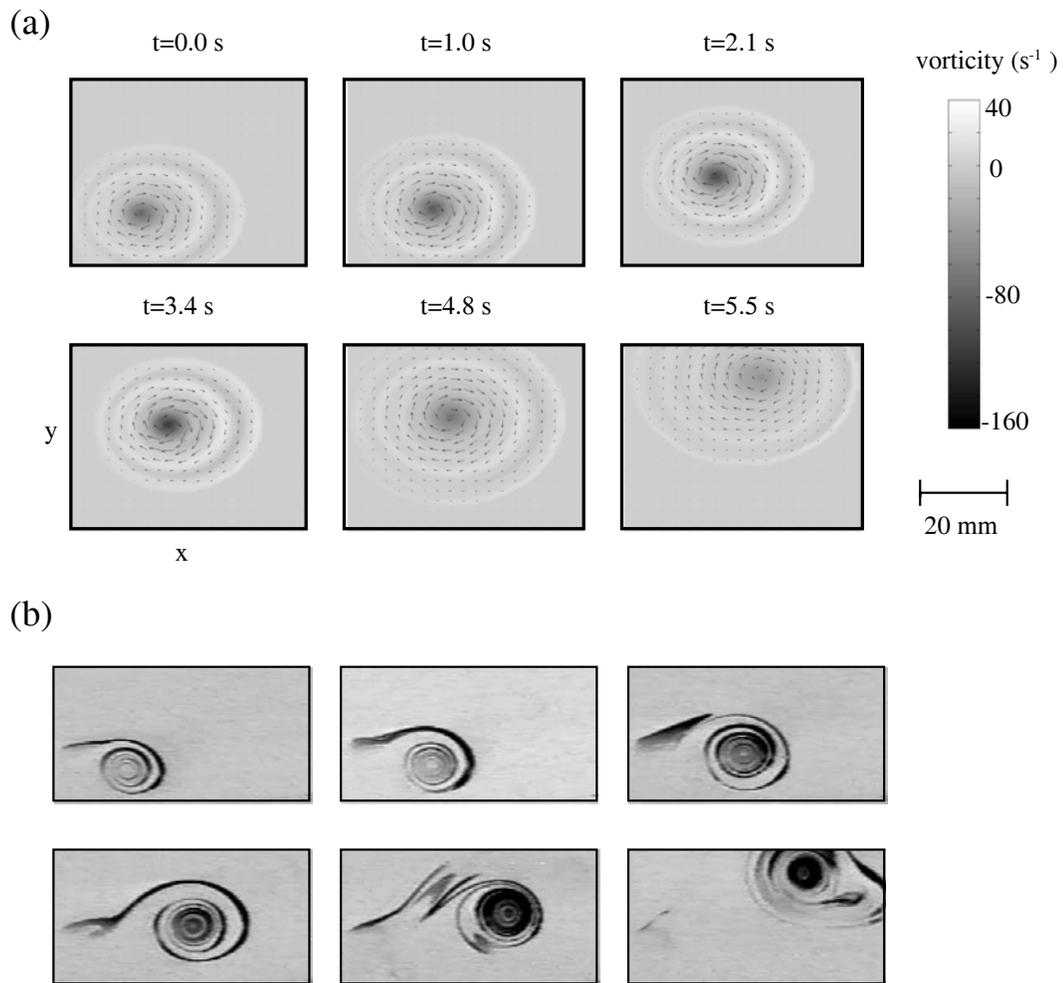


Figure 2.4: (a) Reconstruction des champs de vitesse et de vorticité de l'écoulement dans le canal et (b) visualisations du vortex dans le canal

### 2.3.4 Caractérisation du tourbillon

Je reporte ici le résultat le plus important que nous avons obtenu par mesure acoustique. L'ensemble des résultats a été développé dans la publication "A new acoustic technique for vortex dynamics investigation", *Phys. of Fluids*, **11**(11): 3380 - 3389 (1999).

Ce résultat est illustré sur la Fig. 2.6: les visualisations par injection de colorant en (b) montrent l'évolution temporelle du tourbillon dans le régime périodique; le tourbillon est advect  dans le canal par l'écoulement moyen sur quelques centimètres, puis explose (l'explosion du tourbillon donne lieu à une étude en soi, que je développerai dans le chapitre

3 et la visualisation correspondante n'est pas reportée ici). L'ensemble des champs de la Fig. 2.6(a) correspond à la reconstruction dynamique du champ de vitesse (et de vorticité) obtenue par notre technique du double "MRT".

Comment ces images sont-elles obtenues ? Elles correspondent à la combinaison de deux méthodes: 1) dans la première, les doubles MRT émettent une onde plane, comme décrit plus haut. Nous allons voir que l'axisymétrie du vortex permet alors de traiter le problème inverse:  $\Delta\phi(x) \rightarrow u(\mathbf{r})$ . 2) dans la seconde, les doubles MRT émettent une onde cylindrique et un traitement ad hoc permet d'obtenir la position  $(x_0, y_0)$  du tourbillon dans le canal.

Développons ces deux techniques.

**Reconstruction du champ de vitesse** Une déformation type du front d'onde  $\Delta\phi(x)$  est représentée en Fig. 2.5(a). Rappelons que l'effet de la vitesse de l'écoulement est intégrée le long du rayon acoustique dans la direction  $y$  (direction de propagation de l'onde), de sorte qu'il n'est pas possible de connaître a priori la dépendance de la vitesse sur la direction  $y$ . On a en revanche une résolution suivant  $x$  donnée par la distance entre deux transducteurs, soit 0.42 mm. Dans le cas de notre tourbillon, l'axisymétrie donne une correspondance entre les directions  $x$  et  $y$  et il est possible de traiter le problème inverse.

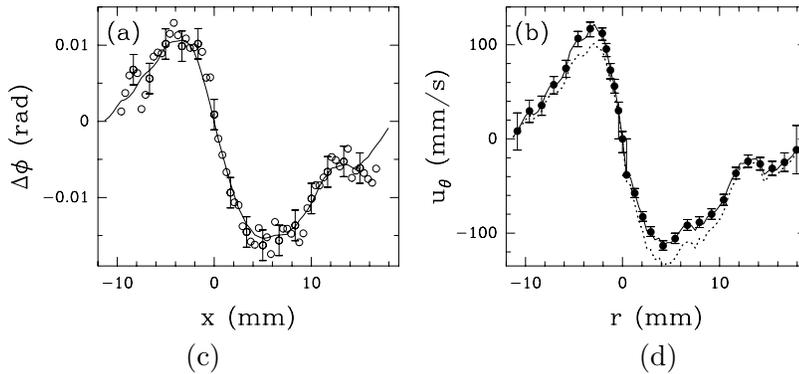


Figure 2.5: (a) Profil de déphasage  $\Delta\phi(x)$  et (b) Profil de vitesse  $u_\theta(r)$  reconstruit.

La reconstruction axisymétrique consiste à diviser la zone de propagation en  $p$  anneaux concentriques, centrés sur le centre du tourbillon, tels que  $r \in [r_{i+1}, r_i]$ . Leur largeur  $r_{i+1} - r_i$  est égale à la distance entre deux transducteurs. La vitesse orthoradiale  $u_\theta$  est alors discrétisée sur les anneaux où elle prend les valeurs  $u_i$  (comme indiquée en Fig. 2.6).

$r_1$  est l'extrémité du vortex, définie comme le premier point de mesure (  partir de l'extérieur) où le déphasage est non nul.  $r_{p+1}$  est le centre du tourbillon, défini par une

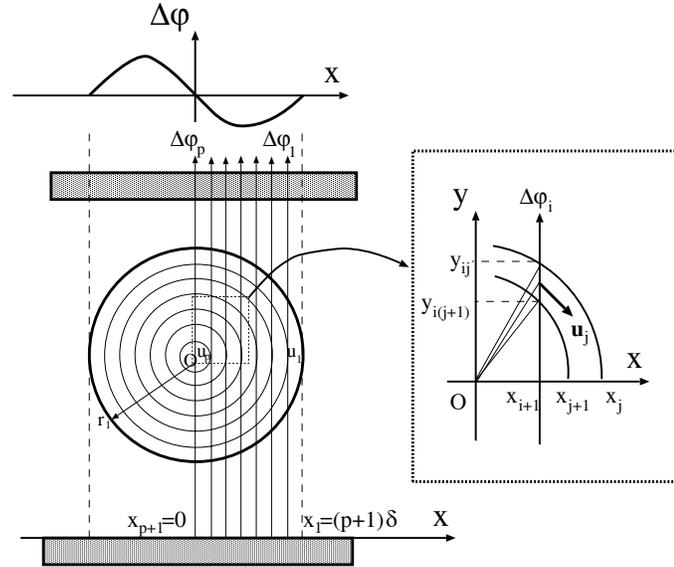


Figure 2.6: Principe de reconstruction du champ de vitesse pour un écoulement axisymétrique: dans chaque anneau, la vitesse est supposée constante et déduite du profil de déphasage.

valeur nulle du déphasage. En effet, le rayon acoustique passant par le centre du tourbillon ne voit que des vitesses  $u_\theta(r)$  perpendiculaires à sa direction de propagation de sorte que sa vitesse n'est pas modifiée (avec  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ).  $p + 2$  mesure le nombre de points expérimentaux. Les déphasages  $\Delta\phi_i = \Delta\phi(x_{i+1})$  sont échantillonnés à chaque position des transducteurs  $x_{i+1}$ .

Dans le premier anneau  $r_1$ , la vitesse  $u_1$  est déduite de la mesure du déphasage  $\Delta\phi_1$  par la relation résultant de l'équation (2.2)

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\omega}{c^2} r_2 \ln \frac{\sqrt{r_1^2 - r_2^2} + r_1}{r_2} u_1. \quad (2.3)$$

Dans le second anneau  $r_2$ , le déphasage  $\Delta\phi_2$  dépend des vitesses  $u_2$  et  $u_1$

$$\Delta\phi_2 = \frac{2\omega}{c^2} \left[ r_2 \ln \frac{\sqrt{r_1^2 - r_3^2} + r_1}{\sqrt{r_2^2 - r_3^2} + r_2} u_1 + r_3 \ln \frac{\sqrt{r_2^2 - r_3^2} + r_2}{r_3} u_2 \right]. \quad (2.4)$$

On peut continuer d'écrire ce type de relation jusqu'à atteindre le centre du tourbillon, ce qui donne une relation générale

$$\Delta\phi_i = \mathcal{M}_{ij} u_j, \quad (2.5)$$

avec

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{2\omega}{c^2} r_{j+1} \ln \frac{\sqrt{r_j^2 - r_{i+1}^2} + r_j}{\sqrt{r_{j+1}^2 - r_{i+1}^2} + r_{j+1}} \quad \text{si} \quad i \geq j \quad (2.6)$$

$\mathcal{M}$  est, par construction, inversible (elle est triangulaire et le bloc triangulaire n'a pas d'élément nul). Elle peut donc être inversée, ce qui correspond à traiter le problème inverse:  $u(r)$  est déduit de la mesure de  $\Delta\phi(x)$ . Un exemple de profil reconstruit est donné en Fig. 2.5(b).

Cette technique permet de reconstruire le profil de vitesse du tourbillon et, accessoirement, elle donne la position  $x_0$  du tourbillon le long du canal. Pour déterminer la position  $(x_0, y_0)$  du tourbillon, nous avons combiné à cette technique une méthode de suivie bidimensionnelle en utilisant des ondes cylindriques.

**Méthode de suivie bidimensionnelle du tourbillon** Pour accéder à la position bidimensionnelle du tourbillon dans le canal, nous avons utilisé les MRT en émission d'ondes cylindriques. Dans ce cas, on n'utilise pas de renversement temporel: chaque MRT émet par un transducteur une onde cylindrique. Les deux transducteurs émetteurs sont choisis l'un en face de l'autre à la position  $x_s$  du miroir, comme indiqué en Fig. 2.7(a). Les signaux reçus par les MRT s'écrivent

$$\phi(i) = \frac{\omega L}{c + U_{mean} \cos i} - \frac{\omega}{c^2} \int_0^L \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dl \sim \frac{\omega L}{c} - \frac{\omega L U_{mean} \cos i}{c^2} - \frac{\omega}{c^2} \int_0^L \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (2.7)$$

où  $U_{mean}$  est la vitesse moyenne dans le canal (construite avec le débit  $Q_1$ ),  $i$  est l'angle  $(\widehat{\mathbf{U}_{mean}, \mathbf{n}})$  et  $L$  la distance entre le transducteurs émetteur et le transducteur récepteur:  $L = D / \sin i$ .

Dans le cas d'ondes planes, on avait  $i = \pi/2$  de sorte que la dépendance de  $\phi$  sur  $U_{mean}$  n'apparaissait pas. Egalement, le signal retourné permettait d'éliminer le premier terme  $\omega L/c$  par soustraction des signaux direct et retourné. Ici,  $c$  doit être déterminé. Pour cela, on utilise les signaux direct  $\phi_{12}$  et retourné  $\phi_{21}$ , de sorte qu'on obtient:  $c = 2\omega D / (\phi_{12} + \phi_{21})$ . Le second terme  $\frac{\omega L U_{mean} \cos i}{c^2}$  est négligeable devant les autres termes, principalement parce que  $i$  reste proche de  $\pi/2$ : on a  $\omega L U_{mean} \cos i / c^2 \sim 10^{-3}$  rad tandis que  $\omega/c^2 \int_0^L \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl$  est de l'ordre de  $10^{-2}$  rad.

Sur la Fig. 2.7(b), les déphasages  $\phi_{12}(x)$  et  $\phi_{21}(x)$  sont représentés en pointillés. La ligne

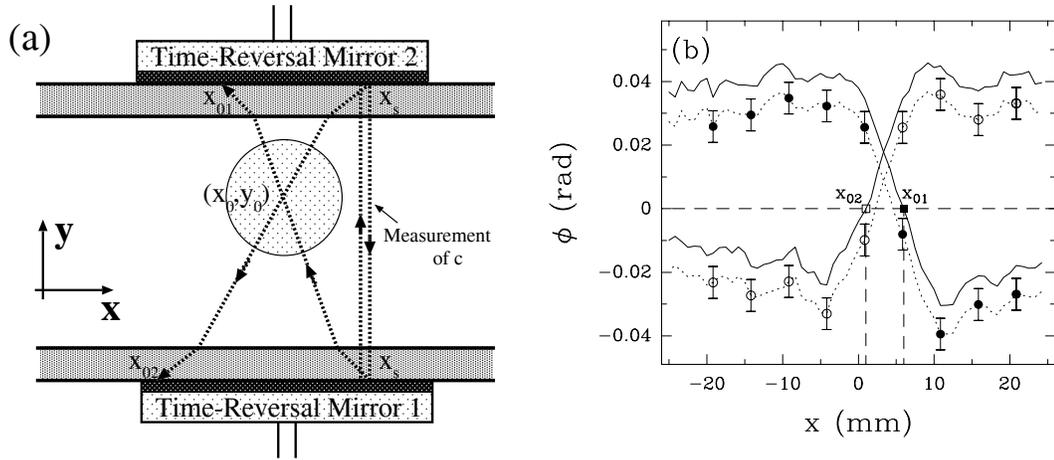


Figure 2.7: (a) Vue schématique des trajectoires des rayons acoustiques dans le cas d'émission d'ondes cylindriques. Les rayons  $x_s - x_s$  sont utilisés pour mesurer la vitesse du son  $c$ . Les rayons  $x_s - x_{01}$  et  $x_s - x_{02}$  sont utilisés pour déterminer la position  $(x_0, y_0)$  du centre du tourbillon. (b) Profils des déphasages  $\phi_{12}(x)$  et  $\phi_{21}(x)$  en fonction de  $x$  (en traits pointillés). Les traits pleins représentent le déphasage  $\phi_{v,12}(x)$  et  $\phi_{v,21}(x)$  relatif à la seule présence du tourbillon, *i.e.* sans la contribution du terme de propagation. Les positions  $x_{01}$  et  $x_{02}$  suivant  $x$  pour lesquelles  $\phi_{v,12}$  et  $\phi_{v,21}$  s'annulent permettent de calculer la position  $(x_0, y_0)$  du centre du tourbillon.

pleine représente  $\phi_v(x) = \phi(x) - \omega L/c \sim \omega/c^2 \int_0^L \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dl$  qui correspond au déphasage dû à la seule présence du tourbillon. La relation entre  $x$  et  $i$  inclut l'effet de réfraction à l'interface plexiglass/eau.

Finalement, les positions suivant  $x$  où  $\phi_{v,12}(x)$  et  $\phi_{v,21}(x)$  s'annulent permettent de calculer la position  $(x_0, y_0)$  du centre du tourbillon par une simple relation géométrique.

## 2.4 Mesures acoustiques sur les aspirateurs rotatifs

En 1998, nous avons conçu une nouvelle expérience de vortex étiré, pour la première fois en milieu infini et en maîtrisant indépendamment tous les paramètres de contrôle, en particulier l'entraînement et l'étirement (Fig. 2.8).

Ce vortex est généré dans l'eau entre deux disques cororatifs de diamètre égal à 10 cm, dans une configuration d'écoulement de von Kármán [11]. Au centre de chaque disque, on a percé un trou, de 5 mm de diamètre, au travers duquel une aspiration est effectuée grâce à une pompe à eau. L'aspiration produit un étirement dont l'effet est d'amplifier la vorticit   g  n  r  e par la rotation des disques. Les effets cumul  s de l'aspiration et de

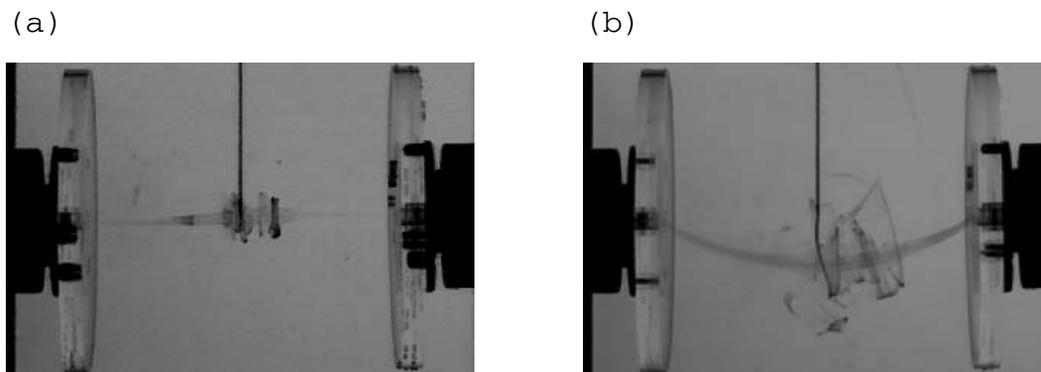


Figure 2.8: Visualisations du vortex généré entre deux disques corotatifs et étiré par aspiration effectuée à travers un trou au centre de chaque disque (a) vortex stable et (b) vortex instable.

la rotation produisent un filament de vorticité entre les deux disques. Les parois de la cuve sont suffisamment éloignées des disques pour qu'on puisse négliger leur influence sur le filament. Aussi, le filament peut être considéré comme un filament dans un milieu infini et les paramètres de contrôle sont définis par la fréquence de rotation des disques  $\Omega/\pi = 0\text{--}20$  Hz, le débit d'aspiration  $Q = 0\text{--}6.4$  l/min, et la distance  $D = 2\text{--}30$  cm entre les deux disques. Suivant les valeurs des paramètres de contrôle, on observe un filament stationnaire (Fig. 2.8(a)), un filament instationnaire qui se forme et explose de façon intermittente (Fig. 2.8(b)) ou l'absence de filament.

La caractérisation du filament de vorticité généré dans cette expérience est très délicate. Je présente dans cette section les résultats que nous avons obtenus par notre technique acoustique utilisant le dispositif des doubles MRT. Comme je l'ai déjà dit, nous n'avons pas pu reprendre la méthode de reconstruction du champ de vitesse développée pour le vortex dans le canal hydrodynamique. En revanche, nous avons pu établir le diagramme de phases et certaines caractéristiques du filament, que je développerai dans ce chapitre. Enfin, la publication dans *Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001) jointe en annexe B, présente ces résultats et un certain nombre d'autres, notamment obtenus lorsque les MRT émettent des ondes cylindriques. Ces derniers travaux ont été menés par Sébastien Manneville en collaboration avec Philippe Roux et Mickaël Tanter et, si je les ai suivi avec beaucoup d'intérêt, je n'y ai pas participé. C'est la raison pour laquelle je ne les développe pas dans le cadre de ce manuscrit.

Finalement, dans le cadre de la thèse de Jacques Lamoine, nous étudions par des techniques classiques (mesures de PIV) les champs de vitesse de ce filament. A nouveau, le caractère très concentré de la vorticité de l'écoulement, rend très délicate cette étude. Je ne présenterai pas ici ces résultats que nous sommes en train de dépouiller. Ils semblent cependant très prometteurs puisque Jacques a réussi à obtenir des profils de vitesse du filament avec une résolution très satisfaisante.

### 2.4.1 Les mesures acoustiques

Nous avons travaillé avec le dispositif des doubles MRT comme dans le canal hydrodynamique: une onde plane est émise par un des MRT et se propage dans le plan  $(xy)$  perpendiculairement à l'axe  $z$  du filament (Fig. 2.9).

Le signal de pression acoustique  $p(x, t)$  est enregistré sur le Miroir récepteur situé en face du Miroir émetteur après une traversée de l'écoulement, en fonction du temps  $t$  et de la position  $x$  le long du Miroir. Ce signal est comparé à celui,  $p_0(x, t)$ , obtenu lorsque le fluide est au repos (c'est-à-dire en absence de rotation et d'aspiration). On effectue pour cela une transformée de Fourier à la fréquence centrale  $\omega = 2\pi \cdot 3.5$  MHz des MRT

$$\frac{p(x, \omega)}{p_0(x, \omega)} = A(x) e^{i\phi(x)} \quad (2.8)$$

Cette relation permet de définir une amplitude de distorsion  $A(x)$  de l'onde et un déphasage  $\phi(x)$  dus à la présence de l'écoulement. A nouveau, on utilise le fait que les transducteurs peuvent fonctionner en mode émetteur ou récepteur pour effectuer une double mesure: les deux MRT émettent simultanément et on enregistre les deux signaux, dont la différence permet de compenser les effets d'inhomogénéités scalaires (typiquement la température). Les positions des deux MRT, notamment leurs distances à l'axe  $z$ , sont contrôlées par un dispositif Microcontr le 3D. Toutes les mesures sont réalisées dans le plan  $z = D/6$ .

Le filament de vorticité évolue sur un temps typique de l'ordre de 0.1 s, ce qui est très lent par rapport au temps de parcours de l'onde entre les deux MRT (typiquement 10 ms). On considère donc l'écoulement gel  pendant le temps d'une mesure.

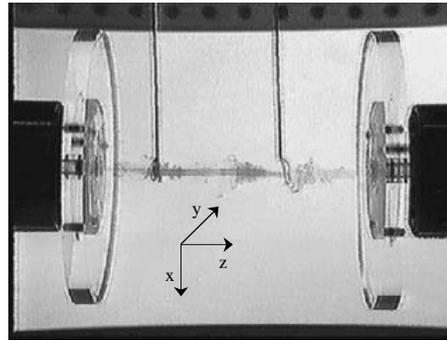
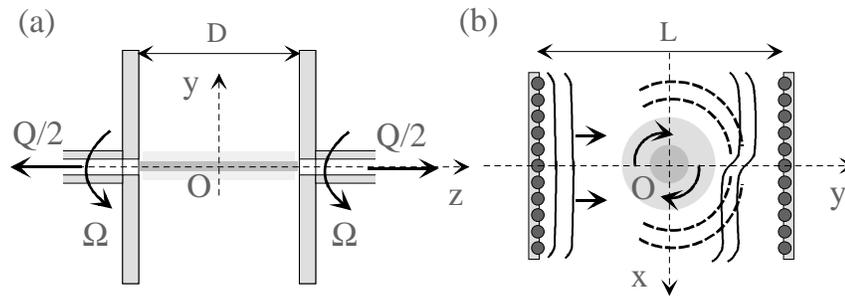


Figure 2.9: Dispositif des doubles MRT dans les aspirateurs rotatifs, (a) Schéma de principe des aspirateurs rotatifs, (b) Dispositif acoustique et (c) système d'axes.

### 2.4.2 Cadre de l'interaction son-filament

Le type d'interaction entre le son et le filament est décrit par deux paramètres: le rapport de la taille typique  $r_0$  de variation de la vitesse (on prend la taille du cœur du filament) à la longueur d'onde  $\lambda$ :  $\alpha = r_0/\lambda$  et le nombre de Mach:  $M = u/c$ , où  $c \simeq 150$  m/s est la vitesse de propagation de l'onde dans l'eau et  $u$  la vitesse caractéristique de l'écoulement (on prend la vitesse azimuthale en  $r = r_0$ ). Dans cette expérience, on a typiquement  $u \simeq 1$  m/s et  $r_0 \simeq 1$  mm de sorte que  $M \simeq 10^{-3}$  et  $\alpha \simeq 1$ .

Cette valeur de  $\alpha$  se révèle trop faible pour qu'on puisse décrire l'interaction de notre onde avec le filament dans le cadre de l'acoustique géométrique. La Fig. 2.10 montre un enregistrement typique de  $A(x)$  et  $\phi(x)$ . Il apparaît sur la phase une zone de

déformation (d'interaction) de l'ordre de 10 mm, c'est-à-dire bien plus grande que la zone qu'on obtiendrait pour une interaction géométrique (qui serait alors de la taille de  $r_0$ ). Grossièrement, on distingue une zone centrale de dislocation, c'est-à-dire où la phase subit un saut important, et une zone d'interférence sur une taille beaucoup plus importante que la taille du diffuseur. Si la zone centrale rappelle le déphasage géométrique de l'onde, les oscillations d'interférence ne sont évidemment pas interprétables dans ce cadre simplifié.

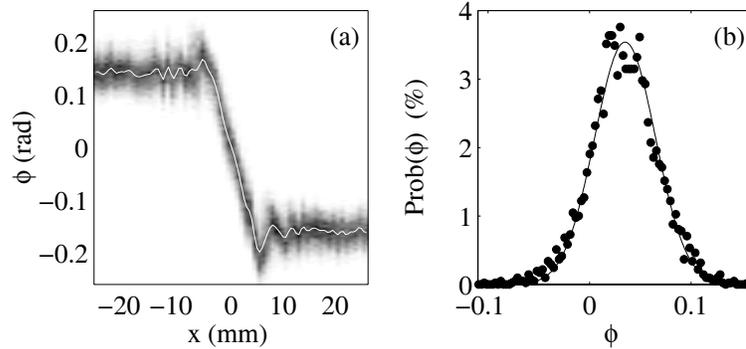


Figure 2.10: Formes typiques des profils  $A(x)$  et  $\phi(x)$ .

Quelles prédictions existe-t-il pour ce type d'interaction ?

On doit considérer ici que le filament, de taille comparable à la longueur d'onde acoustique se comporte comme un diffuseur pour l'onde plane incidente: il émet donc une onde cylindrique (diffusée) et le motif qu'on observe résulte de la superposition de l'onde incidente avec l'onde diffusée. *Stricto sensu*, ceci est toujours vrai, mais lorsque le filament est de taille beaucoup plus grande que la longueur d'onde acoustique, le problème se pose plus simplement dans le cadre de l'acoustique géométrique et on énonce simplement le résultat: la somme de l'onde plane incidente et de l'onde diffusée donne une onde dont la forme est essentiellement celle de l'onde incidente, localement modifiée par le passage à travers la zone de l'écoulement où la vitesse est non nulle.

Pour traiter le problème en terme de diffusion, une méthode classique consiste à utiliser la fonction de diffusion du filament  $f(\theta)$  [14], où  $\theta = \widehat{(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$ , qui correspond à la réponse angulaire du diffuseur à longueur distance, pour une onde plane incidente d'amplitude unité. Le champ de pression résultant s'écrit

$$p(\mathbf{r}) = p(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (2.9)$$

On trouve un résultat de ce type dans [12], où la pression est écrite comme

$$p(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta} e^{i\beta[\text{sign}(\theta)\pi + \theta]} + F(\theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad (2.10)$$

avec

$$\beta = \frac{\omega}{\pi c^2} \Gamma, \quad F(\theta) = -\frac{\sin(\pi\beta)}{\sqrt{2i\pi k}} \frac{e^{i\theta/2}}{\sin(\theta/2)}. \quad (2.11)$$

Cette expression est valable en dehors de la zone directe de diffusion vers l'avant  $\theta = 0$  (son domaine de validité est donnée par  $|\theta| > (kr)^{-1/2}$ ). Le second terme représente la partie cylindrique de l'onde diffusée et le premier terme décrit la distorsion de l'onde plane incidente. Ce type d'interaction, souvent présentée dans la littérature comme l'analogie de l'effet Aharonov-Bohm [13], a connu un regain d'intérêt très récemment d'un point de vue théorique [15] et expérimental [16].

Ce qui va nous être utile dans le cadre de cette analyse est le résultat suivant: le terme multivalué pour la phase  $\Delta\phi(\theta) = \beta [\text{sign}(\theta)\pi + \theta]$  correspond au terme de phase que l'on obtiendrait dans le cadre de l'acoustique géométrique pour l'interaction d'une onde avec un vortex de Rankine  $\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta$ , où  $\Gamma$  est la circulation du vortex. Rappelons que la circulation d'un vortex de taille  $r_0$ , de vitesse caractéristique  $u$  est typiquement  $\Gamma = 2\pi r_0 u$ . Avec l'expression (2.2), on obtient un déphasage géométrique

$$\Delta\phi(x) = \int_{MRT_1}^{MRT_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \frac{\omega}{c^2} dy = \frac{\omega}{\pi c^2} \Gamma [\text{sign}(\theta)\pi + \theta] \quad (2.12)$$

avec  $\theta = \text{atan}(2x/L)$ , où on a pris la distance du vortex à chaque MRT égale à  $L/2$ .

La Fig. 2.11 montre la phase de la quantité  $p(x)/p_0(x)$ , où  $p(x)$  est donné par (2.10) avec  $\mathbf{r}$  pris le long du Miroir et où  $p_0(r) = e^{ikr \cos \theta}$  correspond à la pression recueillie sur le Miroir en absence d'écoulement ( $\beta = 0$  pour  $\Gamma = 0$ ). J'ai représenté pour comparaison le terme de déphasage géométrique  $\Delta\phi(x)$  donné par (2.12).

On retiendra que la mesure du déphasage droite-gauche par rapport à la direction  $\theta = 0$  donne une mesure de la circulation  $\Gamma$  du vortex.

### 2.4.3 Résultats

A partir de la relation circulation-déphasage droite -gauche que nous venons d'établir, nous pouvons extraire de nos mesures acoustiques deux types de résultats:

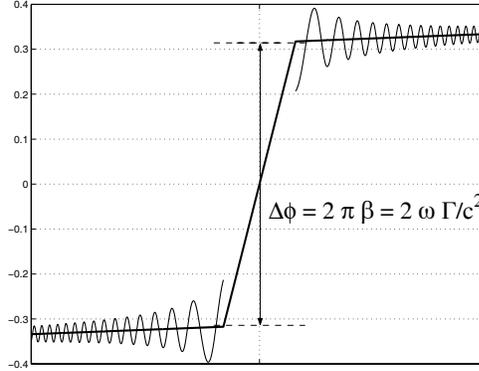


Figure 2.11: Comparaison entre la phase de  $[p(x)/p_0(x)]$  issue de (2.10) (en trait fin) et le déphasage géométrique  $\Delta\phi(x)$  donné par (2.12) (en trait gras). On a exclu la zone centrale  $|\theta| < (kL)^{-1/2}$  (toutes les unités sont arbitraires). Le saut de phase droite-gauche donne une mesure de la circulation.

- La signature typique du filament étant identifiée, on peut établir un diagramme de phase, c'est-à-dire déterminer les régions de l'espace des paramètres de contrôle dans lesquelles on a un filament 1) permanent, 2) intermittent ou 3) pas de filament.
- Lorsque le filament existe, la mesure du déphasage droite -gauche donne accès à la circulation du vortex.

Regardons de plus près les résultats que nous avons obtenus de cette façon.

### Diagramme de phases

Nous utilisons ici la première propriété: la signature du filament est essentiellement un saut de la phase dans la direction de la diffusion avant  $\theta = 0$ . Nos Miroirs étant positionnés de sorte que le transducteurs central  $x = 0$  coïncide à peu près à cette direction, on applique un test d'existence du filament lorsqu'on mesure un tel saut au voisinage de  $x = 0$  sur le profil de phase. Sur un ensemble de mesures, on définit une probabilité de présence comme le rapport du nombre de profils "positifs" (qui présentent un saut de phase) au nombre total de profils enregistrés.

Pour chaque ensemble de paramètres de contrôle, on calcule la probabilité de présence sur un enregistrement de 1024 mesures réparties sur environ 2 minutes. Le résultat est donné sur la Fig. 2.12 dans le plan des paramètres  $(Q, D)$ , la valeur de  $\Omega$  étant fixée dans ce cas. On distingue 3 régimes dans ce diagramme. Quand l'aspiration est forte et quand les

disques sont proches ( $D < 100$  mm), la probabilité de présence est égale à 1 (domaine 1): le filament est formé et il est stable. Quand  $D$  augmente ou quand  $Q$  diminue, une transition vers un état de probabilité proche de 0.5 se produit (domaine 2). Cet état correspond à une instabilité du filament qui se forme et explose régulièrement. Finalement, une transition brusque se produit vers le domaine 3 dans lequel la probabilité de présence est quasi-nulle, c'est-à-dire un état dans lequel les disques sont trop éloignés (ou l'étirement trop faible) pour qu'un filament puisse se former.

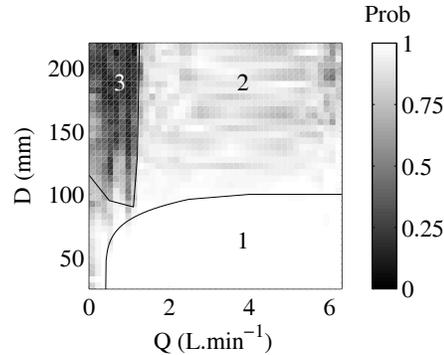


Figure 2.12: Diagramme de phases du filament dans le plan  $(Q, D)$ . Le domaine 1 correspond à un filament stable, le domaine 2 à un état où le filament apparaît et disparaît et le domaine 3 à un état où le filament ne se forme pas.

Ce diagramme de phase étant établi, on s'intéresse à la caractérisation plus quantitative du filament.

### Lois d'échelle

Dans le domaine 1, où le filament est stable, ou dans le domaine 2, lorsqu'il existe, ses caractéristiques varient avec les paramètres de contrôle. On utilise alors la seconde propriété de notre interaction: la mesure du saut de phase est proportionnelle à la circulation  $\Gamma$  du filament.

Pour mesurer le saut de phase, on moyenne sur 1024 acquisitions les profils de phase. Chaque profil est recentré avant moyenne de sorte que la position  $x = 0$  coïncide avec l'abscisse de symétrie droite-gauche du profil et on note  $\langle \phi \rangle_t(x)$  le profil moyen de la phase.

On mesure les sauts de phase  $\Delta \langle \phi \rangle_t$  lorsque les paramètres de contrôle  $\Omega$  et  $D$  varient (dans le régime 1 ou dans le régime 2 pour les profils "positifs"). On observe expérimentalement les lois d'échelle suivantes (Fig. 2.13):

$$\Gamma \propto \frac{\Omega^{0.75}}{D^{0.5}} \quad (2.13)$$

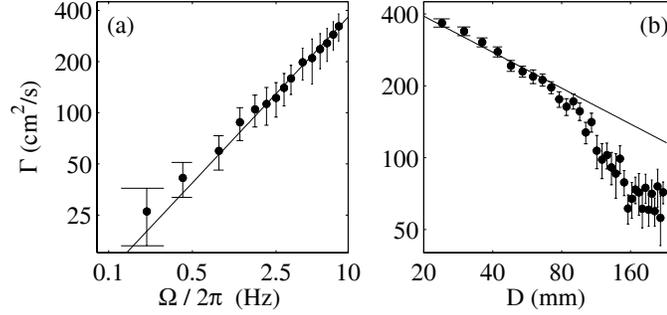


Figure 2.13: Lois d'échelle observée pour la circulation en fonction (a) de la rotation  $\Omega$  des disques et (b) du débit  $Q$  d'aspiration.

Peut-on dire plus de choses sur ces lois d'échelle ? Effectuons un bilan énergétique sur notre système. Soit  $P_i$  la puissance injectée dans l'écoulement par la rotation des disques et par l'aspiration et soit  $P_d$  la puissance dissipée par les gradients de vitesse de l'écoulement. En régime permanent, on a  $P_i = P_d$ , avec

$$P_i = - \int_S d\mathbf{S} \rho \mathbf{u} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) + \int_S d\mathbf{S} (\sigma \mathbf{u}), \quad (2.14)$$

$$P_d = \int_V dV \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

où  $\sigma = \eta(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})$  est la partie visqueuse du tenseur des contraintes,  $\rho$  la masse volumique,  $P$  la pression et  $\eta$  la viscosité dynamique.

Des mesures évaluant les différents gradients de vitesse ont été effectuées par Frédéric Bottausci et peuvent être trouvées dans sa thèse [17]. Nous avons ainsi montré que le gradient dominant est dû à la variation de la vitesse azimuthale avec la direction radiale dans le filament de vorticité. On peut donc évaluer la puissance dissipée comme

$$P_d \simeq \eta \frac{\Gamma^2}{r_0^2} D. \quad (2.15)$$

L'intégrale a été réduite au volume du filament  $V_f = \pi r_0^2 D$  et le gradient de vitesse pris, en ordre de grandeur, égal à  $u/r_0 \simeq \Gamma/r_0^2$ .

Lorsque les paramètres  $\Omega$  et  $Q$  sont constants (seul le paramètre  $D$  varie), la puissance injectée est constante et on a  $P_d(D, \Gamma) = \text{Cte}$ , soit  $\Gamma \propto D^{-1/2}$ , en accord avec la loi d'échelle obtenue expérimentalement.

Que se passe-t-il lorsque  $\Omega$  varie avec  $D$  fixe ? C'est alors la puissance injectée qui varie. La vitesse  $\mathbf{u}$  sur le disque étant purement orthoradiale  $\mathbf{u}|_{\text{disque}}(r) = r\Omega\mathbf{u}_\theta$ , on a  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$  et  $P_i = \int_{\text{disque}} d\mathbf{S}(\sigma\mathbf{u})$ , ce qui donne

$$P_i = \frac{\pi}{4}\rho\Omega^3 R^4 \delta \quad (2.16)$$

où  $\delta$  est l'épaisseur de couche limite sous le disque. En général, on a  $\delta = \sqrt{\eta/(\rho\Omega)}$ , ce qui conduit à une loi pour la puissance injectée de la forme  $P_i = \frac{\pi}{4}\rho\sqrt{\nu}\Omega^{5/2}R^4$ , en accord avec les observations expérimentales de [18, 19, 20] pour des disques plats en rotation. Dans le cas où les disques sont munis de pâles, la loi de puissance varie en  $\rho\Omega^3 R^5$  [18], ce qui indique que l'épaisseur de couche limite se comporte comme une constante (cela est consistant avec l'idée que les pâles ont pour effet d'augmenter l'efficacité de l'injection d'énergie).

Dans notre expérience, la loi de variation de la circulation  $\Gamma$  en fonction de  $\Omega$ , avec un exposant proche de  $3/4$ , suggère que la puissance injectée varie comme  $\Omega^{3/2}$ , c'est-à-dire une efficacité d'injection de l'énergie plus faible que celle d'un disque lisse ! Nous n'avons à ce jour pas d'explication à ce comportement. Notons que cette loi expérimentale diffère de celle en  $\Omega^{1/2}$  observée pour des vortex dans des géométries confinées [21, 22] et qu'elle est en accord en revanche avec [23] dans une configuration assez différente (disques contrarotatifs, écoulement environnant turbulent).

#### 2.4.4 Suivi dynamique du filament

Un dernier type de mesure que nous avons réalisé avec notre système acoustique concerne le suivi dynamique du filament. Un exemple est donné en Fig. 2.14, dans le régime transitoire de formation du filament. Avec une fréquence de mesure acoustique de 30 Hz, on a enregistré les profils de phase à partir de  $t = 0$  où l'écoulement est au repos, la rotation et l'aspiration étant déclenchés à  $t_0 = 6$  s. La déformation de la phase passe de zéro à un saut caractéristique de la présence du filament en un temps proche de 5 s. Dans un premier temps, le profil de phase est légèrement déformée, ce qui correspond à la mise en rotation du fluide induit par la rotation des disques. La vorticité est alors amplifiée par l'étirement et se concentre en un filament fin, ce qui a pour effet de faire apparaître un saut de phase. Pour

$t > 15$  s, le filament est formé et les variations de la phase correspondent au mouvement de précession du filament, en projection sur l'axe  $x$  du Miroir.

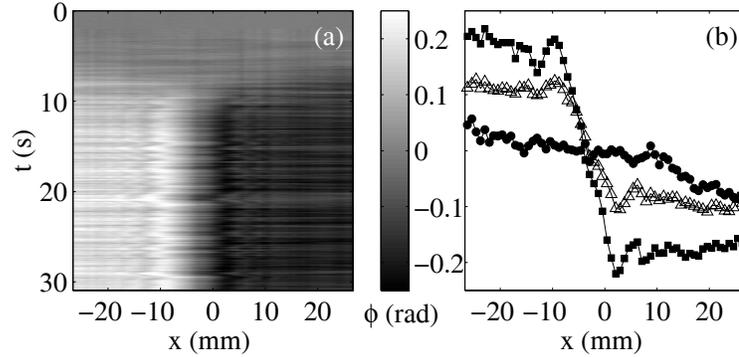


Figure 2.14: Variation temporelle de la phase enregistrée pendant le transitoire de formation du filament (a) représentation spatio-temporelle du profil de phase en fonction du temps, (b) Forme des profils à  $t = 6.5$  s (●),  $t = 9.8$  s (△) et  $t = 13.1$  s (□). Ici, pour  $\Omega = 2\pi 6.7$  Hz,  $Q = 5.7$  l/min et  $D = 80$  mm. La rotation des disques et l'aspiration sont imposées à  $t = 6$  s.

La Fig. 2.15 montre l'évolution de la circulation  $\Gamma(t)$  déduite de la phase pendant le transitoire de formation du filament. En (a) et (b), le débit d'aspiration est fixe et on regarde le transitoire pour différentes valeurs de  $\Omega$  tandis qu'en (c) et (d), c'est la vitesse de rotation  $\Omega$  des disques qui est fixée et on regarde le régime transitoire pour différentes valeurs de  $Q$ .

Pour chaque couple de paramètres  $(Q, \Omega)$ , la courbe  $\Gamma(t)$  est ajustée par une courbe de relaxation exponentielle en  $\Gamma [1 - e^{-(t-t_0)/\tau}]$ , où  $\tau$  est le temps de formation du filament. De ces deux représentations, on peut tirer les informations suivantes:

- Le temps de formation  $\tau$  dépend peu (voire pas !) de  $\Omega$  tandis qu'il décroît rapidement avec  $Q$ . Ce résultat indique que l'évolution du filament est essentiellement gouvernée par l'aspiration.
- La circulation  $\Gamma$  du filament en régime permanent dépend peu de  $Q$  et croît significativement avec  $\Omega$ .

De façon heuristique, on peut comprendre ces comportements en considérant l'équation sur la vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{\partial u_z}{\partial z} \omega + \nu \nabla^2 \omega. \quad (2.17)$$

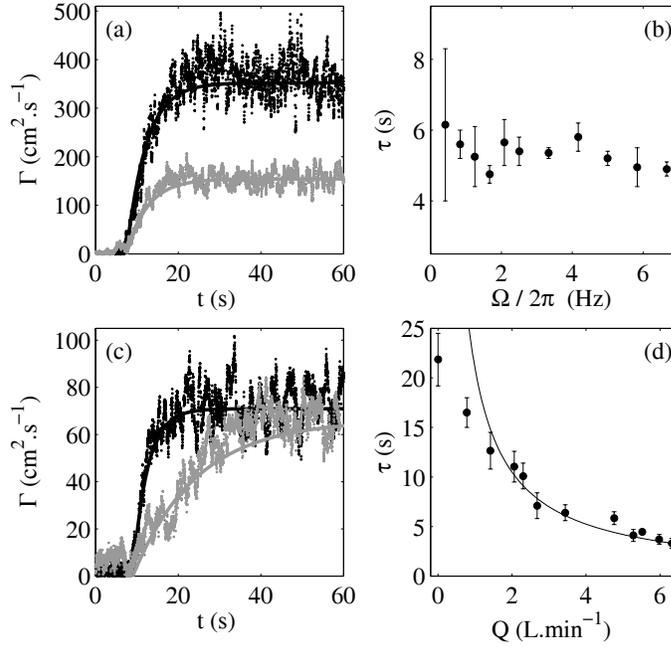


Figure 2.15: (a) Evolution de  $\Gamma(t)$  pendant le transitoire de formation du filament pour  $\Omega = 2\pi \cdot 2.1$  Hz (en gris) et  $\Omega = 2\pi \cdot 6.7$  Hz (en noir). Les courbes en traits pleins indiquent le fit exponentiel en  $\Gamma [1 - e^{-(t-t_0)/\tau}]$  avec  $\tau = 5.0$  s et  $4.7$  s respectivement. (b) Variation du temps de formation  $\tau$  en fonction de  $\Omega$  pour  $Q = 5.7$  l/min et  $D = 80$  mm. (c) Evolution de  $\Gamma(t)$  pendant le transitoire de formation du filament pour  $Q = 0.7$  l/min (en gris) et  $Q = 6.3$  l/min. Les fits exponentiels sont obtenus pour  $\tau = 17$  s et  $\tau = 9$  s respectivement. (d) Variation du temps de formation  $\tau$  en fonction de  $Q$  pour  $\Omega = 2\pi \cdot 0.8$  Hz et  $D = 80$  mm. La courbe en trait plein représente le fit en  $1/Q$ . La rotation des disques et l'aspiration ont été imposées à  $t_0 = 6$  s pour les expériences (a) et à  $t_0 = 8$  s pour les expériences (b).

En régime transitoire, l'amplification de la vorticité est essentiellement une balance entre les termes  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  et  $\frac{\partial u_z}{\partial z} \omega$ , avec l'étirement  $\gamma = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  proportionnel au débit d'aspiration  $\gamma \propto Q/(SD)$ . On a donc  $\tau \propto 1/Q$ , en accord avec la loi observée en Fig. 2.15. On peut penser que la rotation des disques impose la valeur initiale de la circulation dans les temps voisins de  $t = t_0$  (par exemple sur le profil de phase observé en Fig. 2.14 à  $t = 6.5$  s) circulation qui est amplifiée par la suite sous l'action de l'étirement.

## Chapter 3

# L'explosion d'un vortex comme source de turbulence

---

EN BREF:

Depuis deux ans, dans le cadre de la thèse de Yannis Cuypers, Philippe Petitjeans et moi avons lancé une nouvelle activité autour de nos expériences d'hydrodynamique pour comprendre la transition vers la turbulence de nos structures tourbillonnaires. Un des défis de la turbulence est de comprendre quel type de structure élémentaire est responsable de la partie turbulente du spectre d'énergie décrit par la célèbre loi de Kolmogorov en  $k^{-5/3}$ . Un modèle pour une telle structure a été proposée par Lundgren [24] sous la forme d'un vortex formé d'une structure spirale évoluant sous l'action d'un étirement axial. Si de nombreux résultats expérimentaux et numériques ont montré l'existence de telles structures spirales dans les écoulements turbulents, leur contribution à la construction d'un spectre turbulent n'a pas pu être mise en évidence. Notre expérience de vortex étiré est de ce point de vue tout à fait originale puisqu'elle permet de caractériser une de ces structures dans un environnement laminaire, au cours de sa transition vers la turbulence. Nous avons montré qu'une telle structure peut générer la cascade d'énergie turbulente, offrant ainsi la première validation expérimentale d'un scénario de turbulence fondé sur l'évolution temporelle d'une structure filamentaire [Publication *Phys. Rev. Lett.*, **91**: 194502 (2003)].

Très récemment, nous nous intéressons au calcul des structures données par le modèle de Lundgren afin de comparer plus en détail les caractéristiques de cet objet théorique et celles de notre structure expérimentale [Publication jointe en annexe C soumise à *Journal of Turbulence*, (2004)].

Je présente dans les sections 3.2 à 3.4 les résultats expérimentaux obtenus sur cette structure et, dans la section 3.5, des calculs que nous avons menés et que nous menons actuellement sur le modèle de Lundgren afin de comparer l'évolution de cette structure théorique avec celle que nous observons expérimentalement.

Nous participons sur ce thème au GdR Turbulence et c'est également autour de ces problèmes que j'ai eu le plaisir d'organiser, avec Christophe Baudet, une école à l'Institut Scientifique de Cargèse sur le thème "Turbulence: mesures et signaux" en 2002.

PUBLICATIONS SUR CE SUJET:

- Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Vortex burst as a source of turbulence, *Phys. Rev. Lett*, **91**: 194502 (2003).
  - Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Comparison between an experimental turbulent vortex and the Lundgren vortex, *Journal of Turbulence*, **5**:030 (2004), **Publication jointe en annexe C**.
  - Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Experimental study of the energy cascade resulting from a vortex burst, soumis à *Journal of Turbulence* (2005).
-

### 3.1 Introduction

Dans notre expérience du tourbillon dans le canal hydrodynamique, nous avons commencé à nous intéresser à la phase d’explosion du vortex (que nous avons délaissé dans nos expériences d’acoustique). Cette étude a démarré il y a deux ans, à l’occasion de la thèse de Yannis Cuypers. Des premières mesures ont montré que l’explosion du vortex générerait un écoulement turbulent, c’est-à-dire que le spectre d’énergie moyenné sur le temps de l’explosion comportait une partie en  $k^{-5/3}$ , signature, s’il en est, de la turbulence ! Que dire de plus, lorsqu’un spectre turbulent est obtenu ? La réponse nous est venue de Yannis qui a eu l’intuition que la turbulence qu’il observait était le résultat d’une évolution temporelle, c’est-à-dire que le spectre calculé en moyenne ne donnait qu’une information très partielle sur la réalité du phénomène. Cette intuition nous a conduit naturellement vers des modèles qui comportaient deux ingrédients essentiels: l’importance d’une structure initiale cohérente (et de préférence une structure tourbillonnaire voisine de la notre !) et une évolution temporelle dans la construction de la cascade d’énergie. Le modèle emblématique de ce type d’approche est sans aucun doute le modèle de Lundgren [24], qu’il propose en 1982 et dont l’idée sera reprise, notamment, par H.K. Moffat [25] et A. Gilbert [26].

Dans son modèle de vortex, Lundgren introduit des caractéristiques spatio-temporelles qui offrent un mécanisme de cascade des grandes vers les petites échelles d’espace et dont le spectre est un spectre en  $k^{-5/3}$ , à condition que les moyennes usuelles soient faites sur le temps de vie du vortex. Ce modèle a reçu un intérêt croissant ces 10 dernières années, quand on a commencé à comprendre que les lois statistiques de la turbulence étaient contrôlées par des structures discrètes. Outre l’évidente similitude que le vortex de Lundgren présente avec notre tourbillon (c’est une structure bidimensionnelle en rotation soumise à un étirement axial), cette structure théorique nous offrait un candidat idéal pour tester l’intuition de Yannis: dans le modèle de Lundgren, la rotation différentielle dans le plan enrôle la vortacité initiale - par exemple, une langue de vortacité localisée en  $\theta = 0$  -, générant au cours du temps des bras de vortacité qui s’enroule autour de l’origine. Simultanément, l’étirement axial agit en concentrant vers le centre les “bras” de vortacité. L’action combinée de la rotation différentielle et de l’étirement axial a donc pour effet de générer des petites échelles, schématiquement celles qui correspondent à la périodicité radiale des bras de vortacité.

### 3.2 Dispositif expérimental et principe des mesures

Le dispositif expérimental est représenté en Fig. 3.1(a). Sa section est de  $7 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$  et la vitesse longitudinal typique est de quelques  $\text{cm.s}^{-1}$ . Une petite marche est ajoutée dans la couche limite laminaire sur la paroi du fond, de façon à générer une vorticit   initiale qui est fortement amplifi  e par l'  tirement produit par l'aspiration    travers deux trous sur chacune des parois lat  rales (de diam  tre  $0.6 \text{ cm}$ ). Un vortex   tir   est ainsi g  n  r  , dont l'axe est attach      chaque extr  mit   aux trous d'aspiration. Le param  tre de contr  le est  $Q \simeq Q_1/Q_2^{0.6}$ , o    $Q_2$  d  signe le d  bit d'aspiration et  $Q_1$  le d  bit en aval. En faisant varier  $Q$ , on observe deux r  gimes. Les faibles valeurs de  $Q$  correspondent    un vortex stable,    peu pr  s stationnaire. Au dessus d'une valeur critique  $Q_c \simeq 2$ , le vortex suit un cycle p  riodique: dans une premi  re partie du cycle, il reste coh  rent tandis que l'  coulement provoque son allongement et dans une seconde partie du cycle, il explose en une bouff  e turbulente; un autre vortex est alors g  n  r  , et ainsi de suite [les deux parties du cycles sont illustr  es en Fig. 3.1(b)]. Nous avons dans des   tudes pr  c  dentes [8, 27, 28, 29] caract  ris   le vortex en terme de structures coh  rentes, notamment    l'aide de l'outil acoustique (que j'ai pr  sent   en section 2.3). B  n  ficiant de ces pr  c  dentes mesures, nous utiliserons les caract  ristiques du vortex au moment o   il explose (Tableau I). Parce que les mesures de la vitesse axiale  $u_z(z)$  sont d  licates, nous ne disposons que d'une estimation large de la valeur de l'  tirement  $a \equiv \partial_z u_z$ , qui correspond    une mesure effectu  e dans le r  gime stable [29].

$u_\theta^{max}$	$r_0$	$\Gamma$	$Re = \Gamma/\nu$	$R$	$a$
$10 \text{ cm.s}^{-1}$	$0.6 \text{ cm}$	$40 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$	4 000	$\sim 3 \text{ cm}$	$1 - 10 \text{ s}^{-1}$

Tableau I: Caract  ristiques du vortex quand il explose.  $u_\theta^{max}$  est la vitesse azimuthal maximum atteinte en  $r = r_0$  ( $r_0$  est la taille du c  ur du vortex),  $\Gamma$  est la circulation et  $R$  l'extension lat  rale de la vorticit  . Une estimation de l'  tirement  $a \equiv \partial_z u_z$  est donn  e en r  gime stable.

Afin de quantifier l'explosion, des mesures locales de la vitesse ont   t   r  alis  es    l'aide d'une sonde    fil chaud, comme indiqu   sur la Fig. 3.1(a). La sonde est plac  e parall  lement    l'axe du vortex de sorte qu'elle mesure la vitesse  $U = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}$ . Un enregistrement

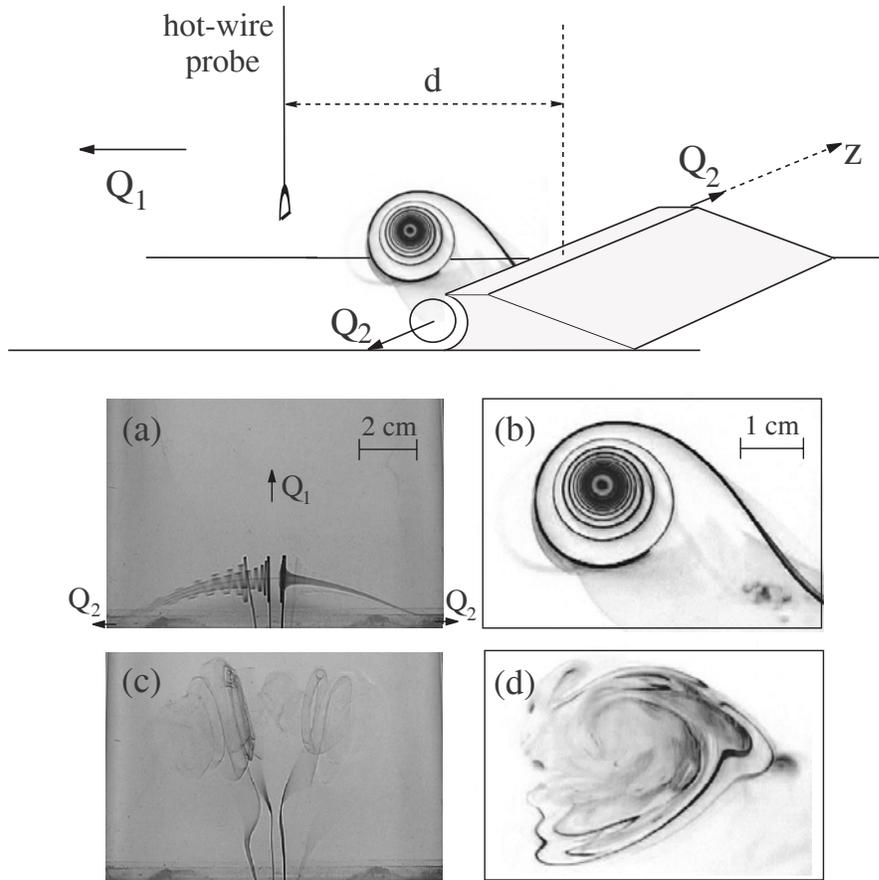


Figure 3.1: (a) Montage expérimental, (b) Cycle du vortex pour  $Q > Q_c$ : (a-b) première partie du cycle, le vortex est cohérent (a) vue de dessus et (b) vue de coté; (c-d) seconde partie du cycle, le vortex explose en une bouffée turbulente (c) vue de dessus et (d) vue de coté.

typique est représenté sur la Fig. 3.2(a). On peut voir qu'un cycle typique est formé de deux parties. Dans la première partie, la vitesse croît lentement car le vortex, toujours cohérent, s'approche de la sonde sous l'effet de l'écoulement principal. La seconde partie, avec des fluctuations fortes, correspond à la vitesse locale mesurée pendant et après l'explosion du vortex.

Les données  $U(t_a)$  (où  $t_a$  désigne le temps absolu) sont traitées de la façon suivante: la vitesse est décomposée en  $U = u_m + u$ , où  $u_m$  est la vitesse moyenne, obtenue par moyenne sur les cycles et  $u$  est la fluctuation de vitesse. On utilise alors  $u_n(t) = u(t_a - t_n)$  où  $t_n$  désigne le temps auquel le vortex explose pour chacun des  $N$  cycles et on s'intéresse à  $0 \leq t \leq T$  où  $T \simeq 4.5$  s est la durée de l'explosion [Fig. 3.2(b)].

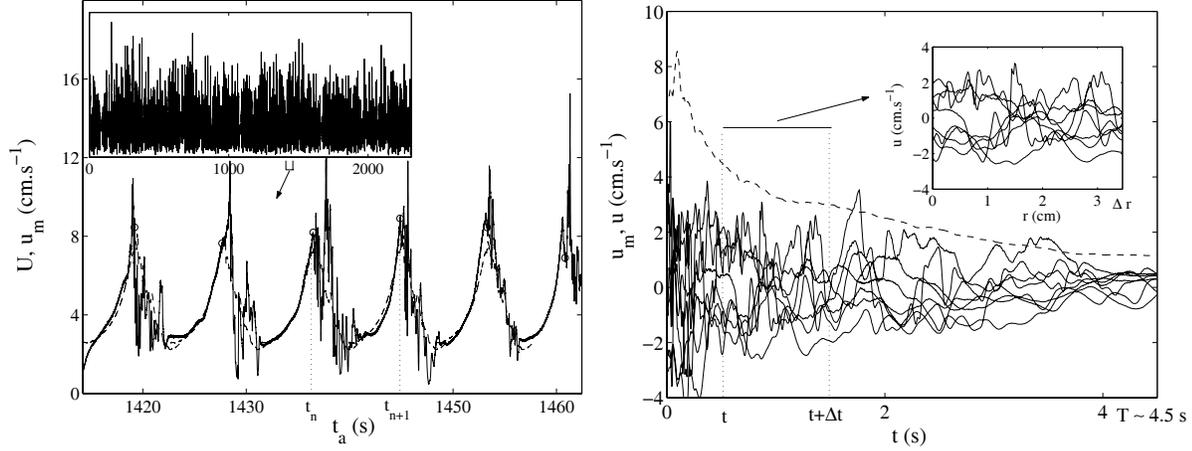


Figure 3.2: (a) Agrandissement de l'enregistrement temporel sur quelques cycles  $U(t_a)$ ; la vitesse moyenne  $u_m$  est en pointillé et  $\circ$  indiquent les temps  $t_n$  d'explosion; L'enregistrement complet est donné dans l'encadré. (b) Rescaling des données  $u_n(t) = u(t_a - t_n)$  en trait plein pour quelques cycles;  $u_m(t)$  est en pointillé. L'encadré montre le résultat de la transformation  $\delta t \rightarrow \delta r(t) = u_m(t)\delta t$  utilisant l'hypothèse de Taylor locale [30] sur la fenêtre temporelle  $[t; t + \Delta t]$ .

### 3.3 Hypothèse de Taylor locale et construction du spectre turbulent

Comme dans beaucoup d'expériences, nos mesures sont réalisées dans le domaine temporel tandis que les prédictions théoriques sont faites habituellement dans le domaine spectral. Nous travaillons sur une fenêtre temporelle  $[t, t + \Delta t]$  et on note  $E_{\Delta t}(k, t)$  la densité de puissance spectrale (PSD), moyennée sur les  $N$  cycles, pour la vitesse  $u_n(t \leq t' \leq t + \Delta t)$ , enregistrée par la sonde entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , et dont les échelles spatiales sont obtenues en utilisant l'hypothèse de Taylor locale:  $\delta r = \int_t^{t+\delta t} u_m(t') dt'$  ( $\delta r \leq \Delta r$  pour  $\delta t \leq \Delta t$  et  $0 \leq t \leq T$ ,  $\Delta t \leq T - t$ ).  $E_{\Delta t}(k, t)$  a la signification d'un spectre moyenné en temps et il tend vers un spectre instantané d'énergie  $E(k, t)$  quand  $\Delta t$  tend vers zéro.

La Fig. 3.3(a) montre les PSDs moyennées sur la durée complète de l'explosion  $\overline{E}(k) = E_T(k, 0)$  en fonction de la distance  $d$  à l'axe  $z$ . On peut voir que le comportement turbulent, avec une loi en  $k^{-5/3}$ , est obtenu proche de l'endroit où le vortex explose (ici  $d = 55$  mm) et décroît progressivement quand on s'en éloigne. La gamme inertielle est  $k_m \simeq 0.2 \text{ cm}^{-1} \ll k \ll k_M \simeq 2 \text{ cm}^{-1}$ , en accord qualitatif avec la littérature:  $k_m = 1/L$  où  $L$  désigne les grandes échelles responsables de l'étirement ( $L \simeq 12$  cm est imposé par la distance entre

les deux trous d'aspiration) et  $k_M = \sqrt{a/\nu} \sim 10\text{-}30 \text{ cm}^{-1}$ .

La Fig. 3.3(b) montre les spectres  $E_{\Delta t \simeq T/3}(k, t)$  calculés pour  $d = 55 \text{ mm}$  et à  $t = 0, T/3$ , et  $2T/3$ , *i.e.* les trois spectres moyennés sur chaque tiers de l'explosion. Les Figs. 3.3(a) et (b) suggèrent que le vortex turbulent, *i.e.* conduisant à une gamme inertielle avec un comportement en  $k^{-5/3}$ , a un temps de vie plus court que le temps de la bouffée  $T$ : le spectre turbulent est construit sur un temps  $T_v$  de l'ordre de  $T/3 \simeq 1.5 \text{ s}$  dans la région où le vortex explose. Après cela, la turbulence décroît, en temps et en espace.

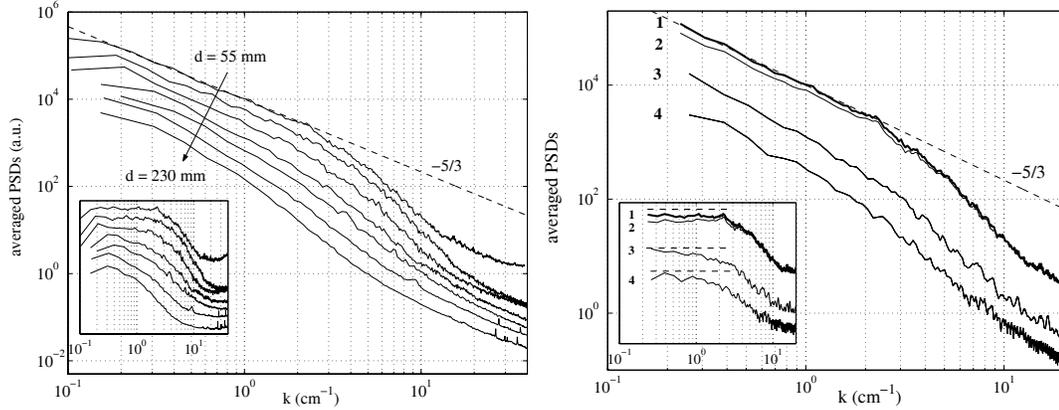


Figure 3.3: (a) PSD moyennées sur le cycle complet  $\bar{E}(k) = E_T(k, 0)$  pour différentes distances  $d$  de la sonde à l'axe  $z$  ( $d = 55, 65, 75, 85, 95, 135$  et  $230 \text{ mm}$ ). En encadré, on donne le spectre compensé  $k^{5/3}\bar{E}(k)$ . (b) PSD moyennées sur un tiers du cycle comparé au spectre moyenné sur le cycle complet pour  $d = 55 \text{ mm}$ . La courbe **1** désigne  $\bar{E}(k)$  moyenné sur le cycle complet, **2** désigne  $E_{\Delta t=1.5s}(k, t = 0)$  moyenné sur le premier tiers du cycle, **3**  $E_{\Delta t=1.5s}(k, t = 1.5 \text{ s})$  moyenné sur le second tiers et **4**  $E_{\Delta t=1.5s}(k, t = 3s)$  moyenné sur le dernier tiers. L'encadré donne les spectres compensés.

Le temps  $T_v$  peut être comparé au temps de vie de la spirale dans le modèle de Lundgren. Pullin, dans ses papiers de 1993-1994 [31, 32], suggère que ce temps se comporte comme  $\tau_v = C(R^2/4\nu)Re^{-2/3}$ , où  $C$  est une constante (dont la valeur théorique est 15 et est obtenue numériquement égale à 10),  $R$  est l'extension latérale du vortex,  $Re$  le nombre de Reynolds et où  $\tau = (e^{at} - 1)/a$  est la variable de temps "étiré". A partir du Tableau I., on obtient  $0.5 \text{ s} \leq t_v \leq 2.5 \text{ s}$ , en accord qualitatif avec la valeur obtenue pour  $T_v$ .

### 3.4 Etude de la construction en temps de la cascade

De façon à mieux comprendre comment la cascade d'énergie se construit, nous nous intéressons à l'évolution temporelle des spectres pendant le temps de vie du vortex. En effet, il a

été montré que les structures spirales donnent un spectre d'énergie avec une gamme en  $k^p$ , l'exposant  $p$  étant différent de  $-5/3$  et dépendant des caractéristiques de l'écoulement [32, 26, 25]. C'est une des propriétés remarquables du modèle de Lundgren que la moyenne en temps produise une loi en  $k^{-5/3}$ , indépendamment du détail de l'écoulement. Un résultat similaire a été montré par Gilbert en 1988 [33] pour des vortex en 2 dimensions (dans ce cas, la moyenne en temps fait apparaître un spectre en  $k^{-2}$ ).

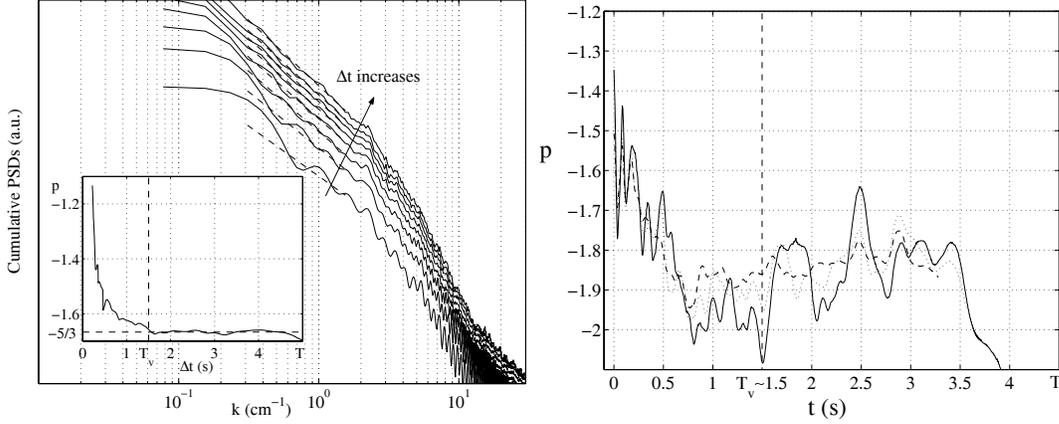


Figure 3.4: (a) Spectres cumulés  $E_{\Delta t}(k, t = 0)$  pour des valeurs croissantes de  $\Delta t$  ( $\Delta t = 0.22, 0.35, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5$  et  $5$  s); le fit en  $k^p$  est indiqué en pointillé. L'encadré montre les variations de  $p$  en fonction de  $\Delta t$ . (b) Pente  $p$  du spectre quasi-instantané en fonction du temps. Pour obtenir une représentation consistante, nous avons choisi une valeur constante de  $\Delta r$  pour chaque courbe: en trait plein  $\Delta r = 1.6$  cm, en points  $\Delta r = 2$  cm et en pointillé  $\Delta r = 2.5$  cm.

La Fig. 3.4(a) montre les spectres cumulés  $E_{\Delta t}(k, t = 0)$  entre  $t=0$  et  $\Delta t$  pour des valeurs croissantes de  $\Delta t$ . Un tel spectre tend vers le spectre instantané  $E(k, t = 0)$  pour des petits  $\Delta t$  et il est égal au spectre moyenné sur la durée de l'explosion  $\bar{E}(k)$  pour  $\Delta t = T$ , où un comportement en  $k^{-5/3}$  est attendu (d'après le résultat de la Fig. 3.3). On trouve une décroissance de la pente spectrale  $p$  de  $E_{\Delta t}(k, t = 0)$  pour des valeurs croissantes de  $\Delta t$  [dans l'encadré de la Fig. 3.4(a)] d'une valeur proche de  $-1$  pour les temps faibles à une valeur de  $-5/3$ , atteinte au temps  $T_v$ , après quoi  $p$  reste constant. Cette première représentation permet de conclure que la pente spectrale varie en effet pendant le temps de vie du vortex. Elle confirme également que le spectre complet est construit en un temps  $T_v = 1.5$  s ( $T_v$  peut être déterminé avec précision à partir de la Fig. 3.4(a) quand  $p$  atteint  $-5/3$ ).

De façon à mieux décrire l'évolution des spectres, nous avons besoin des spectres quasi-instantanés, ce qui nécessite de choisir des petites valeurs de  $\Delta t$ . La détermination de  $p$  est obtenue par interpolation sur la gamme  $1/\Delta r \leq k \leq k_M$  et elle est donc plus bruitée

pour des petits  $\Delta r$ , *i.e.* des petits  $\Delta t$ . On impose, un peu arbitrairement que  $\Delta r \geq R/2$ . Cela permet de conserver au moins 80% de la gamme inertielle pour l'interpolation; nous adaptons ensuite  $\Delta t$  à chaque  $t$  pour conserver une valeur constante de  $\Delta r$ . La Fig. 3.4(b) montre les résultats pour  $\Delta r = 1.5, 2$  et  $2.5$  cm. Il apparaît que la pente du spectre instantané varie d'une valeur proche de -1 à une valeur proche de -2 quand le temps varie de 0 à  $T_v$ . Au delà de  $t = T_v$ , la détermination de la pente devient plus dépendante de la valeur de  $\Delta r$ , ce qui suggère que le spectre ne suit plus une loi de puissance.

### 3.5 Comparaison avec le modèle de Lundgren et perspectives

Pour quantifier l'évolution de notre structure et celle proposée dans le cadre du modèle de Lundgren, nous avons commencé à nous intéresser au calcul numérique des caractéristiques de cette structure théorique. Une particularité intéressante du modèle de Lundgren est que la forme initiale de la structure est un paramètre libre, ce qui permet d'envisager des configurations d'écoulements très différentes.

Dans un premier temps, nous avons repris la forme d'une spirale unique proposée par Pullin & Saffman [31, 32]. Je vous renvoie à la lecture de la publication [34], reportée en Annexe C, où nous développons ces calculs et présentons une comparaison avec nos résultats expérimentaux. Les principales conclusions de cette comparaison sont

- Les deux structures, théorique et expérimentale, vivent une évolution en temps qualitativement comparable (la Fig. 3.5 reporte l'évolution des champs de vorticité dans les deux cas).
- Les valeurs des temps de construction de la cascade turbulente et les gammes inertielles du spectre sont en accord.
- En revanche, les lois  $k^{p(t)}$  des spectres instantanés ont des évolutions en temps "inverses": la loi expérimentale  $p(t)$  décroît de -1 à -2 tandis que la loi pour la spirale calculée numériquement évolue de -2 à -1. Bien sûr, dans les deux cas, la moyenne temporelle des spectres fait apparaître la loi en  $k^{-5/3}$ .

Aujourd'hui, nous pensons que la différence de comportement des lois  $p(t)$  entre notre structure expérimentale et la spirale calculée peut être attribuée à la condition initiale du champ de vorticité: la langue de vorticité localisée en  $\theta = 0$  pour la spirale est probablement



Figure 3.5: Comparaison des champs de vorticité (a) mesurés par PIV dans l'expérience et (b) issus du calcul numérique d'une spirale unique dans le modèle de Lundgren (les détails sont dans [34], reporté dans l'annexe C).

très éloignée de notre condition initiale qui résulte de l'explosion d'un tourbillon cohérent. Plus probablement, cette destruction partielle du tourbillon génère-t-elle des patches de vorticité répartis aléatoirement autour de la zone tourbillonnaire centrale. Pour tester cette hypothèse, nous reprenons les calculs des champs de vorticité  $\omega(\mathbf{r}, t)$  et des spectres instantanés  $E(k, t)$  définis dans [34] (reporté en Annexe C) et [35], avec la condition initiale

$$\omega(r, t = 0) = \omega_P \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{\sigma^2} \right] + \omega_a(r), \quad (3.1)$$

$\omega_a(r)$  est la vorticité de la zone centrale résiduelle, c'est-à-dire quasiment la vorticité du tourbillon avant son explosion. Il apparaît en effet que le tourbillon n'est que partiellement déstructuré au cours de l'explosion. Le terme supplémentaire en  $\omega_P$  modélise la vorticité d'un patch de largeur  $\sigma$ , centré en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  [dans le calcul, et sans perdre en généralité, on prend  $\mathbf{r}_0 = (r_0, 0)$ ].

Cette condition initiale, injectée dans le modèle de Lundgren conduit aux expressions du champ de vorticité  $\omega(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r}, t) &= e^{at} \omega(\rho, \theta, \tau), \\ \omega(\rho, \theta, \tau) &= \omega_0(\rho) + 4\pi \omega_P e^{-\rho^2/\sigma^2} \sum_{n>0} i^n J_n \left( -\frac{2i r_0}{\sigma^2} \rho \right) \cos [n(\theta - \Omega(\rho)\tau)] e^{-\nu n^2 \Lambda^2(\rho) \tau^3/3} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec  $\rho = r e^{at/2}$ ,  $\tau = (e^{at} - 1)/a$  et

$$\omega_0(\rho) = \omega_a(\rho) + 2\pi\omega_P e^{-\rho^2/\sigma^2} J_0\left(-\frac{2i r_0}{\sigma^2} \rho\right) \quad (3.3)$$

Nous étudions le comportement de cette structure en ce moment.... La Fig. 3.6 montre, à titre d'exemple, l'évolution de la vorticité pour un jeu de paramètres  $(\omega_P, r_0, \sigma, \omega_0)$  de conditions initiales.

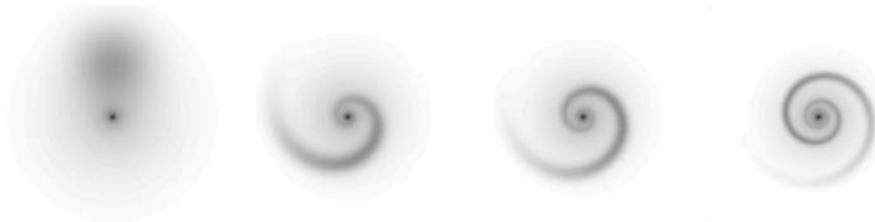


Figure 3.6: Exemple d'évolution de la vorticité dans le modèle de Lundgren pour une condition initiale en patch de vorticité décentré.

En parallèle, nous effectuons des mesures par PIV du champ de vorticité expérimental à différents moments de l'explosion. Pour localiser ces moments, les mesures de PIV sont synchronisées à une mesure par sonde à fil chaud. Les images obtenues peuvent être ainsi associées à un instant du cycle d'explosion et leurs transformées de Fourier spatiales nous donnent accès directement aux spectres instantanés, au lieu des spectres quasi-instantanés obtenus *via* l'hypothèse de Taylor locale dans les mesures temporelles actuelles. Finalement, nous envisageons d'adopter une démarche telle que celle proposée dans [36, 38], où les spectres tridimensionnels sont calculés à partir des résultats de simulations des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, sous l'hypothèse que le champ bidimensionnel de vorticité est soumis à un étirement dans la direction axiale.

### 3.6 En guise de première annexe

Je pose ici les premières pierres d'une étude qu'il m'intéresserait de mener en utilisant un code Navier-Stokes 2D. Dans un papier de 1993, Lundgren montre que le spectre d'énergie de ses structure peut être calculé à partir de la donnée des champs de vitesse calculés en deux dimensions. Ce résultat est tout à fait naturel puisque la dynamique des structures de Lundgren se réduit à une équation de vorticité 2D. Il montre que l'évolution d'une spirale

unique calculée numériquement et analytiquement (par son modèle) sont très semblables. Ce calcul est une validation de son modèle pour des temps “intermédiaires” (le modèle étant a priori une solution asymptotique, valide aux temps longs) et il peut être intéressant pour nous lorsqu’une solution analytique ne peut pas être calculée. J’indique ici mes premiers pas vers ce type d’étude, à savoir l’implémentation du code Navier–Stokes 2D que j’ai effectué sur Matlab et la réplique du calcul de Lundgren 93.

### 3.6.1 Les équations

On part de l’équation de la vorticité en 2D:  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega$ , où le temps, la vitesse et l’espace ont été adimensionné par, respectivement,  $R/U_0$ ,  $U_0$  et  $R$  et avec  $Re \equiv RU_0/\nu$ . En spectral [le passage en composantes de Fourier suppose la périodicité dans les deux directions d’espace  $x$  et  $y$  dans une boîte  $(2\pi/N)^2$ ], on a  $\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = -\frac{k^2}{Re} \omega_k - \mathcal{N}_k$ , où  $\mathcal{N}_k$  est la  $k$ ème composante de Fourier du terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega$ . Cette équation est classiquement résolue avec un schéma ABCN, c’est-à-dire Adams–Bashforth pour le terme non linéaire d’vection  $\mathcal{N}_k$  et Crank–Nicolson pour le terme linéaire de diffusion  $\mathcal{L}(\omega_k) = -\frac{k^2}{Re} \omega_k$ . La méthode explicite AB s’écrit  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}(\omega) dt = \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(\omega^{n+1}) + \mathcal{L}(\omega^n)]$ , où l’indice  $L$  indique la partie résolue pour le terme linéaire et  $n$  l’indice sur le temps ( $\Delta t$  est le pas en temps) et la méthode implicite CN s’écrit  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{N} dt = \frac{\Delta t}{2} [3\mathcal{N}^n - \mathcal{N}^{n-1}]$ . Pour l’équation complète, on a

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(\omega^{n+1}) - \mathcal{L}(\omega^n)] + \frac{\Delta t}{2} [3\mathcal{N}^n - \mathcal{N}^{n-1}]. \quad (3.4)$$

Le mode de calcul de  $\mathcal{N}_k$  consiste à calculer le terme non-linéaire dans l’espace réel, après quoi on en prend les composants de Fourier. Ce calcul est donné dans la section 3.6.2 suivante mais retenons qu’on saura calculer le terme non-linéaire au pas de temps  $n$  dès que  $\omega_k^n$  au temps  $n$  est connu. La discrétisation s’écrivant

$$\omega_k^{n+1} = \frac{1}{C} \left[ \omega_k^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{k^2}{Re} \omega_k^n + 2\mathcal{N}_k^n + \mathcal{N}_k^{n-1} \right) \right] \quad (3.5)$$

avec  $C = 1 + \frac{\Delta t k^2}{2Re}$ , la méthode à deux pas peut être itérée dès que les deux premiers pas de temps sont connus. Comme dans les cas les plus naturels, seul le premier pas est connu, on calcule le second pas comme décrit dans la section 3.6.3.

### 3.6.2 Calcul du terme non linéaire

Pour ce calcul, on effectue: 1) le calcul du terme non-linéaire dans l'espace réel, 2) le dealiasing pour éviter les composantes spectrales ajoutées par la non-linéarité. Le calcul des composantes spectrales

$$u_k = i \frac{k_y}{k^2} \omega_k, \quad v_k = -i \frac{k_x}{k^2} \omega_k, \quad (\partial_x \omega)_k = ik_x \omega_k, \quad (\partial_y \omega)_k = ik_y \omega_k, \quad (3.6)$$

permet de calculer les grandeurs  $u$ ,  $v$ ,  $\partial_x \omega$  et  $\partial_y \omega$  par FFT inverses. On calcule également les grandeurs  $X$  associées à  $x$ :  $X = \text{IFFT2} [e^{i\mathbf{k} \cdot \delta} x]$ , où  $\delta = \pi/N(1;1)$ , quantités qui serviront pour le dealiasing par la méthode de phase shift. On calcule alors le terme non linéaire dans l'espace réel  $r = u\partial_x \omega + v\partial_y \omega$ , et son frère majuscule de dealiasing  $R = U\partial_x \Omega + V\partial_y \Omega$ . On repasse en composantes de Fourier, avec  $r_k = \text{FFT2}(r)$  et  $R_k = \text{FFT2} [R e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta}]$ , et les numériciens [37] nous disent que le terme non linéaire dealiasé s'écrit  $N_k = \frac{1}{2}(r_k + R_k)$ . On retient donc que le terme non-linéaire au pas de temps  $n$  peut être calculé dès que  $\omega_k^n$  au temps  $n$  est connu.

### 3.6.3 Je voudrais faire le second pas....

Bien sûr, les deux premiers pas de temps ne sont pas connus, seul le premier l'est. Pour remédier à cela, on calcule le pas 1 en supposant connu le pas 0 (la condition initiale) par une évaluation du terme non linéaire en Euler explicite ( $\omega^{n+1} = \omega^n + \Delta t \mathcal{N}^n$ ) et une évaluation du terme linéaire en implicite ( $\omega^{n+1} = \omega^n + \Delta t \mathcal{L}^{n+1} = \omega^n - \frac{\Delta t k^2}{Re} \omega^{n+1}$ ). En choisissant un pas de temps de  $\Delta t/2$ , on récupère la  $\omega_k^1$  au bout de deux itérations de la forme

$$\omega_k^{m+1/2} = \frac{1}{C} \left( \omega_k^m - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{N}_k^m \right) \quad (3.7)$$

pour  $m = 0$ , ce qui donne  $\omega_k^{1/2}$ , puis pour  $m = 1/2$  ce qui donne  $\omega_k^1$ .

### 3.6.4 Et le pas de temps ?

Je n'ai pas croisé de condition particulière sur le pas de temps, donc si on prend une bonne vieille condition de courant (en grandeurs dimensionnées,  $U_0 \Delta t < \Delta x$  qui nous dit qu'on ne traverse pas plus d'une cellule dans l'espace réel en un pas de temps), on a, en variables adimensionnées,  $\Delta t < \Delta x = 2\pi/N$  dans notre boîte périodique.

### 3.6.5 Une première simulation

A titre d'exemple, je donne ci-dessous le résultat de la simulation avec, pour condition initiale, la double spirale de Lundgren comme dans [36]. Pour comparaison, les champs de vorticit   donn  s par le calcul analytique dans le mod  le de Lundgren sont report  s sur la Fig. 3.7.

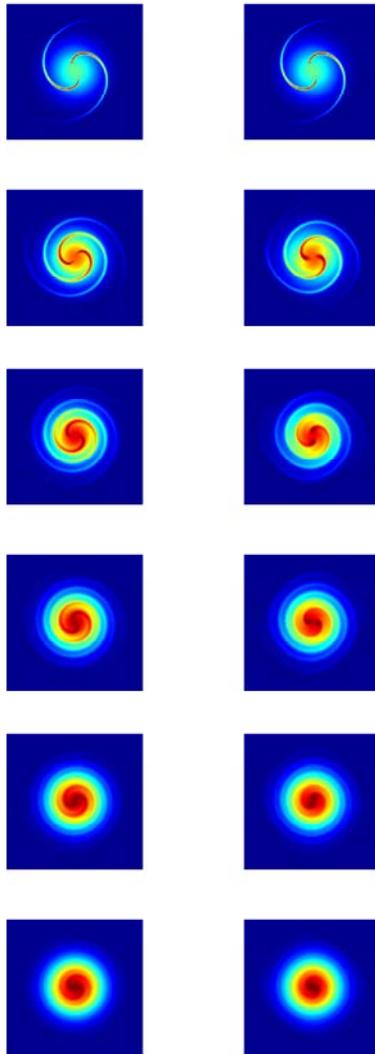


Figure 3.7: Comparaison des champs de vorticit   obtenus,    partir d'une double spirale [36] avec,    droite, le code NS 2D et   ,    gauche, avec le calcul analytique dans le mod  le de Lundgren.

### 3.7 En guise de seconde annexe

Je donne ici quelques calculs de spectres pour des distributions classiques de vorticité. Cette annexe est l'occasion pour moi de mettre à plat ces calculs, dont le résultat est classiquement utilisé, mais dont il n'est pas aisé de trouver le détail [39].

#### 3.7.1 Fonction d'autocorrélation et spectre d'énergie

La fonction d'autocorrélation d'une fonction vectorielle  $\mathbf{f}$ , notée  $C_{\mathbf{f}}(\mathbf{R})$  (où  $\mathbf{R}$  désigne le vecteur position en 3 dimensions), est définie par

$$C_{\mathbf{f}}(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' \mathbf{f}(\mathbf{R}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{R}' + \mathbf{R}). \quad (3.8)$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{K})$  est classiquement liée à la transformée de Fourier  $\mathbf{f}(\mathbf{K})$ , avec

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{K}) &= \int d\mathbf{R} C_{\mathbf{f}}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \\ &= \int d\mathbf{R} d\mathbf{R}' \mathbf{f}(\mathbf{R}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{R}' + \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \\ &= \int d\mathbf{R}' \mathbf{f}(\mathbf{R}') e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}'} \cdot \int d\mathbf{R} \mathbf{f}(\mathbf{R}' + \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}' + \mathbf{R})} \\ &= |\mathbf{f}(\mathbf{K})|^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ce résultat, qui correspond au théorème de Wiener-Khinchin, nous dit que la fonction d'autocorrélation de  $\mathbf{f}$  est simplement la transformée de Fourier inverse  $|\mathbf{f}(\mathbf{K})|^2$ .

Définissons l'énergie totale dans un volume  $V$  contenant un fluide en mouvement à la vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ :  $E = \int_V d\mathbf{R} \mathbf{u}^2(\mathbf{R})$ , on peut écrire, dans l'espace spectral

$$E = \int d\mathbf{K} E(\mathbf{K}) = \int dK E(K). \quad (3.10)$$

En utilisant  $\int d\mathbf{R} \mathbf{u}^2(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} d\mathbf{K}' d\mathbf{K} \mathbf{u}(\mathbf{K}) \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{K}') \cdot \mathbf{R}} = \int d\mathbf{K}' d\mathbf{K} \mathbf{u}(\mathbf{K}) \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}') = \int d\mathbf{K} |\mathbf{u}(\mathbf{K})|^2$  (qui correspond au théorème de Parseval), on obtient les expressions de  $E(\mathbf{K})$  et  $E(K)$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{K}) &= |\mathbf{u}(\mathbf{K})|^2, \\ E(K) &= \int d\hat{\mathbf{K}} K^2 E(\mathbf{K}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $d\hat{\mathbf{K}}$  désigne l'élément d'angle solide dans l'espace des  $\mathbf{K}$  (soit  $d\theta_K d\varphi_K \sin\varphi_K$  en coordonnées sphériques). La quantité  $E(K)$  est la Densité Spectrale d'Énergie (qu'on note PSD pour Power Spectral Density), qui correspond à l'énergie contenue dans les échelles comprises entre  $K$  et  $K + dK$ . On parle usuellement du spectre d'énergie pour la PSD.

On a ici une première conclusion: le calcul de la PSD  $E(K)$  peut s'effectuer en calculant  $\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{K})$ , la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de  $\mathbf{u}$ , puis en effectuant  $E(K) = \int d\hat{\mathbf{K}} K^2 \Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{K})$ .

Dans les exemples qui nous intéressent, l'écoulement a deux caractéristiques essentielles

- Il est caractérisé par son champ de vorticité  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R})$  et non par son champ de vitesse,
- Il est bidimensionnel, voir unidimensionnel pour la nappe de vorticité, et on  crita  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ , avec  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$  en coordonnées cylindriques (ou  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(z)$  pour un champ 1D).

Tout cela n'est pas bien grave mais on voudrait disposer d'une écriture pour  $E(K)$  adaptée à ces caractéristiques, c'est-à-dire en fonction d'un champ  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  ou  $\boldsymbol{\omega}(z)$ .

### 3.7.2 Expression de la PSD en fonction du champ de vorticité

Remarquons que les définitions qu'on a données pour la vitesse sont valables pour la vorticité, c'est-à-dire qu'on peut définir

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}) &= \int d\mathbf{R}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'), \\ \Phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{K}) &= \int d\mathbf{R} C_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} = |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{K})|^2, \\ E_{\boldsymbol{\omega}}(K) &= \int d\hat{\mathbf{K}} K^2 \Phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{K}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

On utilise maintenant  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{K}) = i\mathbf{K} \wedge \mathbf{u}(\mathbf{K})$  pour établir que  $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{K})|^2 = K^2 |\mathbf{u}(\mathbf{K})|^2 - [\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{K})]^2$ . Le terme  $[\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{K})]^2 = 0$  puisque c'est la transformée de Fourier de  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ . Il vient donc

$$E_{\boldsymbol{\omega}}(K) = K^2 E(K), \tag{3.13}$$

L'équation (3.13) permet d'utiliser le champ de vorticité pour calculer la PSD. On va

maintenant voir comment réduire la dimension de travail de 3 à 2, puis 1, *via*

$$E(K) = \int d\hat{\mathbf{K}} \Phi_{\omega}(\mathbf{K}). \quad (3.14)$$

La difficulté dans cette dernière étape est que la transformée de Fourier 3D d'un champ défini en 2 ou 1D n'est pas défini, sauf si on introduit une fonction de coupure dans la ou les dimensions manquantes (sans quoi le champ ne s'annule pas à l'infini dans ces directions et on ne peut pas définir la transformée de Fourier). Par exemple, en 2D, on pourrait définir  $\omega(\mathbf{R}) = \omega(\mathbf{r}) f_c(z)$ , avec  $f_c(+\infty) = f_c(-\infty) = 0$  et travailler avec  $\omega(\mathbf{K}) = \omega(\mathbf{k}) f_c(k_z)$ . Je donne dans la suite un autre calcul, où on travaille plutôt sur la fonction d'autocorrélation, ce qui évite d'introduire explicitement une telle fonction de coupure.

### Lorsque $\omega(\mathbf{R}) = \omega(\mathbf{r})$ , soit en 2D

Lorsque le champ de vorticité est bidimensionnel, on pose donc  $\omega(\mathbf{R}) = \omega(\mathbf{r})$ , où  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$  et  $\mathbf{K} = (\mathbf{k}, k_z = K \cos \varphi_K)$ , en coordonnées cylindriques. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorr elation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(\mathbf{K}) &= \int d\mathbf{R} d\mathbf{R}' \omega(\mathbf{R}') \cdot \omega(\mathbf{R} + \mathbf{R}') e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \\ &= \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} dz dz' \omega(\mathbf{r}') \cdot \omega(\mathbf{r} + \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-ik_z z} \\ &= L \delta(k_z) \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}') \cdot \omega(\mathbf{r} + \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= L \delta(k_z) \phi_{\omega}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

où on fait apparaître la longueur  $L$  suivant  $z$  du volume considéré et la transformée de Fourier de la fonction d'autocorr elation  $\phi_{\omega}(\mathbf{k})$  en deux dimensions (voir remarque page suivante).

Reprenons l'expression de  $E(K)$

$$\begin{aligned} E(K) &= \int d\hat{\mathbf{K}} \Phi_{\omega}(\mathbf{K}) \\ &= L \int d\theta_K d\varphi_K \sin \varphi_K \delta(k_z) \phi_{\omega}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{k} = K \sin \varphi_K (\cos \theta_K, \sin \theta_K)$ . Changeons de variables  $(\theta_K, \varphi_K) \rightarrow (\theta_K, k_z)$ . On a  $d\theta_K dk_z = d\theta_K d\varphi_K K \sin \varphi_K$  et  $\mathbf{k} = \sqrt{K^2 - k_z^2} (\cos \theta_K, \sin \theta_K)$ . Il vient

$$\begin{aligned}
E(K) &= \frac{L}{K} \int d\theta_K dk_z \delta(k_z) \phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{L}{K} \int d\theta_K \phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où cette fois  $\mathbf{k} = K(\cos \theta_K, \sin \theta_K)$  est le vecteur d'onde en 2 dimensions et  $k = K$ . On peut écrire

$$E(k) = \frac{L}{k} \int d\theta_k |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})|^2, \tag{3.18}$$

que l'on utilisera pour le calcul des spectres pour une vorticité dans le plan.

*Remarque* – La fonction  $\delta(k_z)$  donnée pour  $I = \int dz e^{-ik_z z}$  est un peu usurpée. Puisqu'on borne l'intégrale  $\int dz'$  à  $L$  (c'est l'équivalent de la fonction de coupure), on devrait le faire aussi pour les bornes de  $I$ , ce qui ferait apparaître la fonction  $L \text{sinc}(k_z L/2)$ . Ce n'est que dans la limite  $L \rightarrow \infty$  que l'on recupère la fonction  $\delta$ . On retrouve bien sûr ce résultat si on décide de travailler avec une fonction de coupure  $f_c(z)$ , par exemple  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) f_c(z)$  avec  $f_c(z) = \Pi_L(z)$  la fonction rectangle de largeur  $L$ . On a alors  $\Phi_{\boldsymbol{\omega}}(K) = \phi_{f_c}(k_z) \phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})$ , où  $\phi_{f_c}(k_z) = |\Pi_L(k_z)|^2$ , au lieu du terme  $L\delta(k_z)$  dans l'expression (3.15). La transformée de Fourier de la fonction rectangle est la fonction sinus cardinale  $\Pi_L(k_z) = L \text{sinc}(k_z L/2)$ . Aussi, le terme  $L\delta(k_z)$  est-il remplacé par  $L^2 \text{sinc}^2(k_z L)$ . Ce terme, dans l'intégrale de (3.16) qui définit  $E(K)$ , joue le même rôle que la fonction  $\delta(k_z)$  lorsque  $L$  est grand.

### Lorsque $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(z)$ , soit en 1D

On reprend le même type de calcul que pour le cas bidimensionnel. Ici, les coordonnées cylindriques sont utilisées à nouveau avec  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(z)$  et  $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_r, k)$ . La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\Phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{K}) &= \int d\mathbf{R} d\mathbf{R}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}') \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R} + \mathbf{R}') e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \\
&= \int d\mathbf{r} dz d\mathbf{r}' dz' \boldsymbol{\omega}(z) \cdot \boldsymbol{\omega}(z + z') e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} e^{-ikz} \\
&= L^2 \delta^2(\mathbf{k}_r) \phi_{\boldsymbol{\omega}}(k),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où on a fait apparaître la surface  $L^2$  dans le plan et  $\phi_{\boldsymbol{\omega}}(k) = |\boldsymbol{\omega}(k)|^2$  en 1D. La fonction  $\delta$  en coordonnées cylindriques s'écrit  $\delta^2(\mathbf{k}_r) = \delta(k_r)/(\pi k_r)$ .

La PSD s'écrit

$$\begin{aligned} E(K) &= \int d\hat{\mathbf{K}} \Phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{K}) \\ &= 2L^2 \int d\varphi_K \sin \varphi_K \frac{\delta(k_r)}{k_r} \phi_{\boldsymbol{\omega}}(k), \end{aligned} \quad (3.20)$$

Changeons de variables  $\varphi_K \rightarrow k_r$ , avec  $k_r = K \sin \varphi_K$  et  $k = K \cos \varphi_K$ ,

$$\begin{aligned} E(K) &= \frac{L^2}{K} \int dk_r \delta(k_r) \frac{\phi_{\boldsymbol{\omega}}(\sqrt{K^2 - k_r^2})}{\sqrt{K^2 - k_r^2}} \\ &= \frac{L^2}{K^2} \phi_{\boldsymbol{\omega}}(k = K). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avec, dans cette expression,  $K = k$ , on a finalement

$$E(k) = \frac{L^2}{K^2} |\omega(k)|^2. \quad (3.22)$$

### 3.7.3 Exemples de calculs de PSD

Je donne ici les deux exemples de spectres les plus classiques. Celui d'un tube de vorticité (cas 2D), c'est-à-dire dans le plan une gaussienne en  $r$ , est connu pour donner une spectre en  $k^{-1}$ . Celui d'un feuillet de vorticité (cas 1D), c'est-à-dire une gaussienne en  $z$ , est connu pour donner un spectre en  $k^{-2}$ .

#### Spectre d'un tube de vorticité

Il suffit d'utiliser la relation (3.18) avec un champ de vorticité

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right), \quad (3.23)$$

qui correspond à un vortex de B rgers axisymétrique. La transformée de Fourier de  $\omega(r)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int d\mathbf{r} \omega(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int dx \exp\left(-\frac{ax^2}{4\nu}\right) e^{-ik_x x} \int dy \exp\left(-\frac{ay^2}{4\nu}\right) e^{-ik_y y}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Avec  $\int dx e^{Ax^2+Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{B^2/(4A)}$ , on obtient

$$\omega(k) = \Gamma \exp\left(-\frac{\nu k^2}{a}\right) \quad (3.25)$$

soit un spectre

$$E(k) \simeq \frac{\Gamma^2}{k} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{a}\right), \quad (3.26)$$

qui correspond au résultat classique énoncé.

### spectre d'une nappe de vortacité

On considère ici un champ de vortacité de la forme

$$\omega(z) = \omega_0 \exp\left(-\frac{ay^2}{4\nu}\right), \quad (3.27)$$

qui correspond à une nappe de vortacité. La relation (3.22) permet d'en calculer le spectre. La transformée de Fourier de  $\omega(z)$  s'écrit simplement, avec le même calcul que précédemment

$$\omega(k) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\nu k^2}{a}\right), \quad (3.28)$$

d'où le spectre

$$E(K) = \frac{\omega_0^2}{k^2} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{a}\right), \quad (3.29)$$

qui correspond à nouveau au résultat attendu.

## Chapter 4

# Propagation guidée

---

EN BREF:

La description de la propagation d'onde dans des guides droits ne pose en général pas de problème: la résolution de l'équation d'onde avec les conditions limites sur les bords du guide montrent l'existence d'une infinité de solutions, associées à des nombres d'onde  $k_n$  suivant la direction du guide. Ces solutions sont appelées les modes du guide et elles sont caractérisées par le nombre d'onde  $k_n$  et la forme transverse  $\varphi_n(y)$  (où  $y$  désigne la direction transverse du guide). Lorsque  $k_n$  est réel, le mode est dit propagatif, lorsque  $k_n$  est imaginaire, le mode est dit évanescent.

Les choses se compliquent lorsque le guide n'est plus homogène: il peut s'agir d'inhomogénéité dans la nature du guide, par exemple lorsque, dans la direction  $x$  du guide, le matériau change de nature, ou d'inhomogénéité de forme, c'est-à-dire lorsque la section du guide n'est pas constante. Une approche en général bien adaptée pour résoudre ces problèmes est l'approche dite modale, pour laquelle on projette la solution sur la base des modes du guide droit. Le problème se ramène alors à la résolution d'un problème d'évolution suivant la direction du guide pour les coefficients de projection.

Ce type d'approche a été menée avec succès pour les guides fluidiques, pour lesquels la forme des modes est simple. Le cas de mouvements dans le plan des guides élastiques fait apparaître les modes transverses, dits modes de Lamb qui sont plus délicats à manipuler. C'est probablement la raison pour laquelle peu d'études multimodales ont été menées dans ce cas et, notamment, il n'y a pas de méthode générale en multimodal proposée à ce jour pour les guides élastiques.

Vincent Pagneux et moi avons démarré cette activité, qui porte sur l'étude de la propagation des ondes de Lamb dans des guides inhomogènes en 2000. Vincent avait, au cours de sa thèse, développé une méthode de calcul du champ acoustique dans des guides à section variable qu'il semblait possible d'adapter au cas des ondes de Lamb. Nous avons commencé par nous intéresser au calcul du spectre des modes de Lamb, cette première étape étant déjà "problématique" dans la littérature [Publication *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(3): 1307-1314 (2001) jointe en annexe D]. Nous

nous sommes appuyés pour cela sur une méthode spectrale appliquée à l'élasticité.

Nous avons ensuite traité le cas de guides formés d'une succession de milieux différents [Publication Proc. R. Soc. Lond. A, **458**: 1913-1930, (2002) jointe en annexe E]. Cette étude nous a permis de mettre au point un formalisme multimodal *ad-hoc* pour les ondes de Lamb dans un cas d'importance pratique puisqu'il concerne notamment les problèmes de soudures de barres. En nous appuyant sur ce formalisme, nous avons étudié en parallèle les propriétés de réciprocité, de conservation de l'énergie et d'invariance par renversement du temps des ondes acoustiques ou élastiques en utilisant la matrice de diffusion lorsque les modes évanescents sont pris en compte [Publication *J. Acoust. Soc. Am.*, **116**:1913 (2004) jointe en annexe F].

Nous travaillons actuellement sur le problème de guides à section variable, que je développerai dans ce chapitre.

Ce sujet s'inscrit dans la thématique "Guides d'onde" du Groupement de Recherche US.

#### PUBLICATIONS SUR CE SUJET:

- V. Pagneux & A. Maurel, Determination of Lamb modes eigenvalues , *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(3): 1307-1314 (2001), **Publication jointe en annexe D.**
  - V. Pagneux & A. Maurel, Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide, Proc. R. Soc. Lond. A, **458**: 1913-1930, (2002), **Publication jointe en annexe E.**
  - V. Pagneux & A. Maurel, Scattering Matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, **116**:1913 (2004). **Publication jointe en annexe F.**
  - V. Pagneux & A. Maurel, Multimodal method for Lamb waves propagation in non uniform guide, soumis à *Proc. R. Soc. Lond. A* (2005).
-

## 4.1 Introduction

Les approches modales sont en général bien adaptées pour traiter un problème d’ondes guidées car elles permettent de réduire le problème à l’étude d’une équation différentielle ordinaire qui gouverne les composantes modales, équation qui résulte de la projection sur la base modale. C’est ce qui se passe dans les guides d’ondes fluidiques, pour lesquels les modes prennent une forme simple [40]. Dans les guides d’onde élastiques, dans le cas de mouvement dans le plan, les modes transverses, appelés mode de Lamb [41], sont cependant assez délicats à manipuler et on trouve peu d’études sur les guides d’ondes élastiques qui utilisent une approche modale. La principale difficulté provient de l’absence d’un formalisme général. Récemment, Folguera & Harris [42] ont résolu le problème des guides élastiques de section lentement variables. On peut mentionner également les travaux de Gregory & Gladwell [43] concernant le cas de la réflexion par une extrémité fixe ou libre.

Une des difficultés pour traiter les guides à section variable est liée à la divergence numérique due aux modes évanescents. On peut être tenté de négliger ces modes évanescents mais ils sont nécessaires pour définir une méthode numérique consistante. De plus, ils sont physiquement importants car ils contribuent au champs proche pour toutes les inhomogénéités du guide.

Cette divergence existe également dans le cas fluidique, mais elle peut être contournée en introduisant la matrice impédance  $Z$ , opérateur linéaire qui relie la pression et la vitesse dans la représentation modale [44], et qui est une généralisation de l’impédance classique.

Cet opérateur impédance est l’équivalent de l’opérateur dit “Dirichlet to Neumann” en mathématiques appliquées et il nous permet de poser la condition limite imposée par la condition physique de radiation. Une fois la condition de radiation donnée à la sortie du guide, la matrice impédance peut être calculée dans tout le guide, soit en intégrant une équation de Riccati matricielle dans le cas de guide continûment variable [44], soit en utilisant directement des relations algébriques dans le cas de guide comportant des discontinuités [45].

Pour les modes évanescents, la matrice  $Z$  présente l’avantage d’être sans divergence. Elle est utilisée pour obtenir, soit les champs, par exemple de pression ou de vitesse, soit les matrices de réflexion et de transmission du guide. Une explication heuristique qui permet de comprendre l’absence de divergence de la matrice impédance est qu’elle représente le rapport de la pression et de la vitesse et que ce rapport ne diverge pas quand la vitesse et la pression divergent avec le même décrement logarithmique, comme c’est le cas pour les

modos evanescentes.

Notre étude sur la propagation des ondes de Lamb dans les guides inhomogènes s'appuie sur l'utilisation d'un équivalent de la matrice impédance pour la propagation élastique dans les guides. Supposant la complétude des modes de Lamb [46], les quatre champs, composés des deux composantes ( $u$  et  $v$ ) du déplacement et des deux composantes ( $s$  et  $t$ ) de la contrainte axiale, sont projetés sur ces modes. On réunit ensuite les quatre champs en deux paires de vecteurs  $\mathbf{X} = {}^t(u, t)$  et  $\mathbf{Y} = {}^t(-s, v)$  reliés aux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  par les relations  $\mathbf{X} = \sum_n a_n \mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Y} = \sum_n b_n \mathbf{Y}_n$ . Ce formalisme a deux avantages: D'une part, notre problème vectoriel est devenu l'équivalent du problème scalaire dans les guides fluidiques puisque les deux vecteurs inconnus  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont exprimés en termes de deux vecteurs de composantes  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de la même façon que pour les scalaires (pression et vitesse longitudinale) dans les guides d'onde fluidiques. Le second avantage est que la relation de biorthogonalité de Fraser [47] montre que les vecteurs  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Y}_n$  forment une base biorthogonale; aussi, les relations de continuité qui mettent en jeu les deux composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  (resp.  $\mathbf{Y}$ ) sont facilement projetées sur cette base et conduisent à des relations de continuité pour les composantes  $a_n$  (resp.  $b_n$ ). La matrice impédance  $\mathbf{Z}$  est définie par l'opérateur linéaire qui relie  $\mathbf{b}$  à  $\mathbf{a}$  via la relation  $\mathbf{b} = \mathbf{Z}\mathbf{a}$ . Par construction,  $\mathbf{Z}$  est égal à la matrice identité  $\mathbf{I}$  quand il y a seulement des ondes aller et égale à  $-\mathbf{I}$  quand il y a seulement des ondes retour. La matrice impédance est calculée partout dans le guide à partir de la sortie du guide où on écrit la condition de radiation et cela est fait sans problème de divergence numérique. Après cela, les coefficients de réflexion et de transmission du guide, ainsi que les champs dans tout le guide, peuvent être déterminés.

Nous avons appliqué avec succès ce formalisme aux cas des guides composés d'une succession de milieux élastiques différents. Je vous renvoie, à ce propos, à la lecture de la publication "Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide" dans Proc. R. Soc. Lond. A, **458**: 1913-1930 (2002), jointe en annexe E. Nous travaillons depuis sur le cas de guides à section variable (Fig. 4.1). Si le formalisme, que je présente dans ce chapitre, se déroule bien, il nous est apparu des problèmes concernant les bases utilisées qui ne sont aujourd'hui pas résolus. Je ne rentrerai pas dans les détails de ces problèmes et je me contenterai de présenter dans le cadre de ce manuscrit des cas *ad-hoc*. Nous continuons de travailler sur ce sujet pour résoudre ces difficultés !

## 4.2 Position du problème

Les modes de Lamb correspondent à des solutions des équations d'élasticité dans un guide limité par  $-h \leq y \leq h$  avec des conditions de bords libres et dont les déplacements sont dans le plan  $(x, y)$ . La dépendance temporelle, que nous omettrons par la suite, est en  $e^{-i\omega\tau}$ . On doit donc résoudre

$$-\rho\omega^2 \mathbf{w} = \mu\Delta \mathbf{w} + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}), \quad (4.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé et  $\mathbf{w} = (u, v)$  est le vecteur déplacement.  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes

$$\sigma = \begin{pmatrix} s & t \\ t & r \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} s &= \lambda\partial_y v + (\lambda + 2\mu)\partial_x u \\ t &= \mu(\partial_y u + \partial_x v) \\ r &= (\lambda + 2\mu)\partial_y v + \lambda\partial_x u \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nous nous intéressons à la propagation d'ondes de Lamb dans un guide de section variable  $h(x)$  (Fig. 4.1).

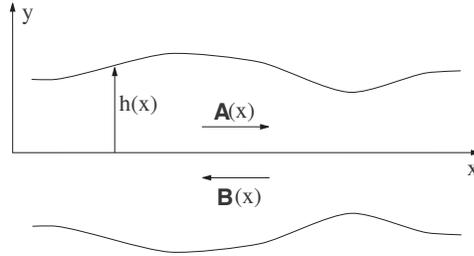


Figure 4.1: Géométrie typique de l'étude

Les conditions limites sur les faces  $y = \pm h(x)$  s'écrivent

$$r[x, \pm h(x)] = h'(x)t[x, \pm h(x)], \quad (4.4)$$

$$t[x, \pm h(x)] = h'(x)s[x, \pm h(x)] \quad (4.5)$$

où  $h'(x)$  est la dérivée de  $h$  par rapport à  $x$ . Le formalisme que nous développons est fondé sur l'utilisation des deux-vecteurs

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ t(x, y) \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -s(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

et leurs décompositions modales sur

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} U_n(y) \\ T_n(y) \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} -S_n(y) \\ V_n(y) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

où  $U_n, V_n, R_n, S_n$  et  $T_n$  désignent les modes de Lamb usuels [41], dont les expressions sont données en section 4.5.1. Les expressions de  $r$  (resp.  $R_n$ ) n'apparaissant dans ce formalisme, nous utilisons pour ces grandeurs les expressions suivantes

$$\begin{aligned} r &= f_1 s + f_2 \partial_y v, \\ R_n &= f_1 S_n + f_2 \partial_y V_n, \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec  $f_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$  et  $f_2 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$ . La décomposition modale s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x) \mathbf{X}_n(y) \\ \mathbf{Y} = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n(x) \mathbf{Y}_n(y) \end{cases}, \quad \text{et} \quad (\mathbf{X}_m | \mathbf{Y}_n) = J_n \delta_{mn}. \quad (4.9)$$

Le produit scalaire est ici défini par  $(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \int_{-h}^h (-us + tv) dy$  et la biorthogonalité est donnée par [47] (l'expression de  $J_n$  est donnée en section 4.5.2). En utilisant les symétries des fonctions  $U_n, V_n, S_n$  et  $T_n$  pour la transformation  $k_n \rightarrow -k_n$ , qui associe à un mode aller un mode retour, on montre [45] que les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont reliés aux coefficients  $A_n$  des modes aller et  $B_n$  des modes retour à travers les relations

$$a_n = A_n - B_n, \quad b_n = A_n + B_n. \quad (4.10)$$

Nous avons montré dans une étude précédente (Publication [48] jointe en annexe F) que les

équations d'élasticité s'écrivent formellement dans notre problème

$$\partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

et le problème aux valeurs propres associé

$$ik_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

F et G sont des opérateurs-matrices

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\frac{f_1}{\lambda} I & -f_1 \partial_y \\ f_1 \partial_y & -\rho \omega^2 I - f_2 \partial_{y^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho \omega^2 I & \partial_y \\ -\partial_y \frac{1}{\mu} I & \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

et les conditions limites s'écrivent

$$\begin{aligned} r(x, \pm h) &= h'^2 s(x, \pm h), \\ t(x, \pm h) &= h' s(x, \pm h). \end{aligned} \quad (4.14)$$

On a par ailleurs  $T_n(\pm h) = R_n(\pm h) = 0$ .

### 4.3 Résolution du problème par la matrice impédance

On propose ici une méthode de résolution fondée sur l'utilisation de la matrice impédance Z (voir aussi l'annexe E) définie comme l'opérateur qui relie les vecteurs  $\mathbf{a}(x)$  et  $\mathbf{b}(x)$  à une position  $x$  le long du guide

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{Z}(x)\mathbf{a}(x). \quad (4.15)$$

#### 4.3.1 Système différentiel sur a et b

Projetons les deux deux-vecteurs de (4.11), respectivement sur  $\mathbf{Y}_n$  et sur  $\mathbf{X}_n$

$$(\partial_x \mathbf{X} | \mathbf{Y}_n) = (\mathbf{F} \mathbf{Y} | \mathbf{Y}_n), \quad (4.16)$$

$$(\partial_x \mathbf{Y} | \mathbf{X}_n) = (\mathbf{G} \mathbf{Y} | \mathbf{X}_n). \quad (4.17)$$

Chaque terme est calculé en utilisant (4.8) et les propriétés (4.36) et (4.51)

$$\begin{aligned} (\partial_x \mathbf{X} | \mathbf{Y}_n) &= (\partial_x \mathbf{X}_m | \mathbf{Y}_n) a_m + a'_n \delta_{mn}, \\ (\mathbf{F} \mathbf{Y} | \mathbf{Y}_n) &= (\mathbf{Y} | \mathbf{F} \mathbf{Y}_n) + f_1 [v S_n - s V_n]_{-h}^h + f_2 [v \partial_y V_n - \partial_y v V_n]_{-h}^h \\ &= (\mathbf{Y} | \mathbf{F} \mathbf{Y}_n) + [v R_n - r V_n]_{-h}^h = ik_n b_m \delta_{mn} - [h'^2 V_n S_m]_{-h}^h b_m, \end{aligned}$$

et, de façon similaire,

$$\begin{aligned} (\partial_x \mathbf{Y} | \mathbf{X}_n) &= (\partial_x \mathbf{Y}_m | \mathbf{X}_n) b_m + b'_n \delta_{mn}, \\ (\mathbf{G} \mathbf{X} | \mathbf{X}_n) &= (\mathbf{X} | \mathbf{G} \mathbf{X}_n) + [t U_n - T_n u]_{-h}^h = ik_n a_m \delta_{mn} + [h' U_n S_m]_{-h}^h b_m. \end{aligned}$$

Nous obtenons un système différentiel vectoriel

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{N}_1 \mathbf{a} + \mathbf{N}_2 \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{N}_3 \mathbf{a} + \mathbf{N}_4 \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où les matrices  $\mathbf{N}_1$  à  $\mathbf{N}_4$  sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(n, m) &= -\frac{1}{J_n} (\partial_x X_m | Y_n), \\ \mathbf{N}_2(n, m) &= ik_n \delta_{mn} - \frac{1}{J_n} [h'(x)^2 V_n(h) S_m(h)], \\ \mathbf{N}_3(n, m) &= ik_n \delta_{mn}, \\ \mathbf{N}_4(n, m) &= \frac{1}{J_n} \{ -(\partial_x Y_m | X_n) + [h'(x) U_n(h) S_m(h)] \}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Des expressions de ces matrices, plus agréables au sens de la programmation, sont données en section 4.5.4.

### 4.3.2 Matrice impédance et solution en présence d'une source

Le système différentiel (4.18) établi dans la section précédente est numériquement instable à cause de la présence des modes évanescents. Une solution pour résoudre ce problème consiste à utiliser la matrice impédance [44]. En utilisant la définition de la matrice impédance  $Z(x)$ , il est facile de montrer, à partir de (4.18) que  $Z(x)$  obéit à une équation de Riccati matricielle

$$Z'(x) = \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_4 Z(x) - Z(x) \mathbf{N}_1 - Z(x) \mathbf{N}_2 Z(x). \tag{4.20}$$

Une fois  $Z$  calculée dans tout l'espace du guide, il est possible de prendre en compte la présence d'une source. Dans notre formalisme, il y a deux façons de définir une source. On peut envoyer une onde aller à partir de l'infini, ce qui correspond à poser  $\mathbf{A}(x_0)$  avec  $\mathbf{B}(x_0) = \mathbf{0}$ . On peut aussi choisir d'imposer une valeur du champ en  $x_0$ ; pour bénéficier de la relation de biorthogonalité, la valeur du champ doit correspondre à une condition mixte, *i.e.* la connaissance de  $\mathbf{X}$  ou de  $\mathbf{Y}$ . On doit alors poser la valeur de  $\mathbf{X}(x_0)$  [respectivement de  $\mathbf{Y}(x_0)$ ], ce qui permet de connaître  $\mathbf{A}(x_0)$ .

Dans le cas que nous considérons, où une onde est envoyée de l'infini, il est facile de voir que  $\mathbf{a}(x_0) = \mathbf{A}(x_0)$  [relation (4.10)]. On obtient alors, avec (4.18) et (4.20)

$$\mathbf{a}'(x) = [\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 Z(x)] \mathbf{a}(x). \quad (4.21)$$

En intégrant (4.21),  $\mathbf{a}(x)$  et  $\mathbf{b}(x) = Z(x)\mathbf{a}(x)$  sont connus dans tout l'espace du guide et par suite, les champs de contraintes et de déplacement sont également connus.

## 4.4 Quelques résultats

### 4.4.1 Méthode de résolution

On utilise deux méthodes de résolution. La première consiste simplement à intégrer l'équation de Riccati par une méthode de Runge-Kutta. Dans la seconde méthode, on utilise des exponentielles de matrice. Pour cela, on discrétise l'intervalle  $[x_i; x_f]$  avec un pas  $dx$ , aux points  $x_n$  et aux points  $X_n$  décalés de  $dx/2$  (Fig. 4.2).

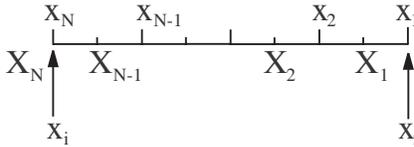


Figure 4.2: Double maillages.

L'équation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

peut être résolue de la façon suivante: on évalue  $\mathbf{N}(X_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1(X_n) & \mathbf{N}_2(X_n) \\ \mathbf{N}_3(X_n) & \mathbf{N}_4(X_n) \end{pmatrix}$  et  $\exp(-\mathbf{N} dx) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(X_n) & \mathbf{E}_2(X_n) \\ \mathbf{E}_3(X_n) & \mathbf{E}_4(X_n) \end{pmatrix}$  au point milieu  $X_n$  entre  $x_n$  et  $x_{n+1}$ . On a alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}(x_{n+1}) \\ \mathbf{b}(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(X_n) & \mathbf{E}_2(X_n) \\ \mathbf{E}_3(X_n) & \mathbf{E}_4(X_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(x_n) \\ \mathbf{b}(x_n) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

qui permet de calculer

$$\mathbf{Z}(x_{n+1}) = [\mathbf{E}_3(X_n) + \mathbf{E}_4(X_n)\mathbf{Z}(x_n)] [\mathbf{E}_1(X_n) + \mathbf{E}_2(X_n)\mathbf{Z}(x_n)]^{-1}, \quad (4.24)$$

avec  $\mathbf{Z}(x_1) = \mathbf{I}$ , et la matrice de réflexion

$$\mathbf{R}(x_n) = [\mathbf{Z}(x_n) + \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{Z}(x_n) - \mathbf{I}]. \quad (4.25)$$

Pour le calcul des flux d'énergie réfléchi  $F_r$  et transmis, donnés par [45]

$$F_r = \frac{\sum J_n(x_N) |B_n(x_N)|^2}{J_0(x_N) |A_0(x_N)|^2}, \quad (4.26)$$

$$F_t = \frac{\sum J_n(x_1) |A_n(x_1)|^2}{J_0(x_N) |A_0(x_N)|^2}, \quad (4.27)$$

où les sommes sont faites sur les modes propagatifs. On reprend pour cela les relations (4.23), écrites sous la forme

$$\mathbf{a}(x_n) = [\mathbf{E}_1(X_n) + \mathbf{E}_2(X_n) \mathbf{Z}(x_n)]^{-1} \mathbf{a}(x_{n+1}) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{b}(x_n) = [\mathbf{E}_3(X_n) + \mathbf{E}_4(X_n) \mathbf{Z}(x_n)]^{-1} \mathbf{a}(x_{n+1}), \quad (4.29)$$

où le calcul est effectué avec  $n$  décroissant, à partir de  $\mathbf{A}(x_N) = (1, \mathbf{0})$  (le vecteur nul  $\mathbf{0}$  est de dimension  $N_m - 1$ , où  $N_m$  est le nombre de modes),  $\mathbf{B}(x_N) = \mathbf{R}(x_N)\mathbf{A}(x_N)$ , soit  $\mathbf{a}(x_N) = \mathbf{A}(x_N) - \mathbf{B}(x_N)$  et  $\mathbf{b}(x_N) = \mathbf{A}(x_N) + \mathbf{B}(x_N)$ .

### 4.4.2 Première validation

Cette configuration est envisagée par Cho [49]. Elle correspond à un rétrécissement de section dans un guide (Fig. 4.3) dont la hauteur passe de  $2H = 2$  mm à  $2h = 1$  mm sur une longueur  $s$  variable ou pour une fréquence variable. Les caractéristiques du matériau envisagé sont  $v_s = 3100$  m/s,  $v_l = 6300$  m/s et  $\rho = 2690$  kg/m<sup>3</sup>.

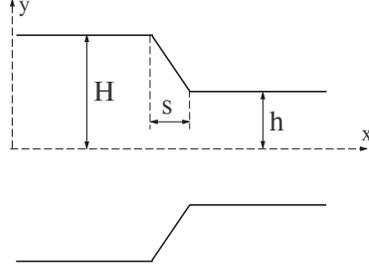


Figure 4.3: Géométrie envisagée dans [49].

Le premier résultat comparable concerne une géométrie fixe,  $s = 2$  mm. La fréquence varie alors entre 0.2 et 1.4 MHz pour une onde incidente  $S_0$ . Dans cette gamme de fréquences, un seul mode est propagatif ( $S_0$ ) dans tout le guide et Cho représente le coefficient  $R(1, 1)$  de la matrice de réflexion. Nous avons repris cette configuration et calculé le flux d'énergie réfléchi  $F_R = |R(1, 1)|^2$ . Le résultat est illustré en Fig. 4.4(a) et comparé à celui de Cho.

Un autre résultat donné par Cho concerne une configuration de guide à la fréquence de 1 MHz avec  $s$  variable. La Fig. 4.4(b) montre à nouveau le flux d'énergie  $F_R$  en fonction de  $s$  obtenu dans le calcul modal et comparé aux résultats de Cho.

Il apparaît que la méthode modale est plus longue à converger pour les faibles valeurs de  $s$ . Avec deux coins à gérer sur une distance  $s$ , la méthode modale n'est performante que si  $s$  est suffisamment grand. Pour de faibles valeurs de  $s$ , la taille des structures qu'elle fait apparaître en  $y$  correspond aux nombres d'onde des modes évanescents pris en compte (par exemple, pour  $N_m = 40$  modes,  $2\pi/k_{i,\max} = 0.1$  mm).

### 4.4.3 Seconde validation

Cette seconde validation concerne une des géométries envisagées par Koshiba [50] (Fig. 4.5). Il s'agit d'une encoche creusée dans un guide de hauteur  $H$ , d'angle d'ouverture  $2\theta$  et de

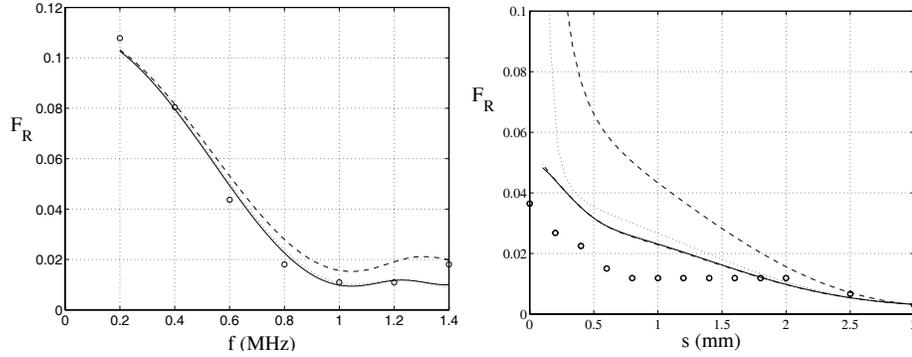


Figure 4.4: (a) Flux d'énergie réfléchi  $F_R$  en fonction de la fréquence pour la géométrie de la Fig. 4.3, avec  $s = 2$  mm. Le calcul modal est effectué avec (—) le seul mode propagatif  $S_0$ , (..) en incluant 2 modes evanescents et (-) en incluant 19 modes evanescents. (o) indiquent les résultats de Cho, issus de [49]. (b) Flux d'énergie réfléchi  $F_R$  en fonction de la longueur  $s$  du rétrécissement, à  $f = 1$  MHz. Le calcul modal est effectué avec (—) le seul mode propagatif  $S_0$ , (..) en incluant 2 modes evanescents, (-) en incluant 19 modes evanescents et (-.) en incluant 39 modes evanescents. (o) indiquent les résultats de Cho, issus de [49].

profondeur  $h$  (les unités ne sont pas précisées).

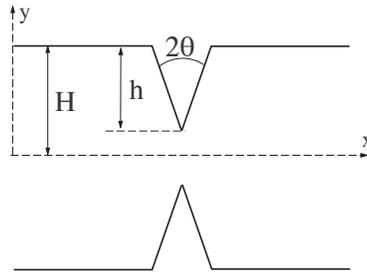


Figure 4.5: Géométrie envisagée dans [50].

Les auteurs donnent le coefficient de réflexions en fonction de  $\theta$  pour  $h/H = 0.5$  et  $0.8$  avec  $s = 0.31$ ,  $v_s = 2/\pi$  [ $v_l = 2\sqrt{2(1-s)/(1-2s)}/\pi$ ],  $\rho = 1$ ,  $H = 1$ , et  $\omega = 1$ . Dans cette géométrie, les auteurs calculent, comme dans la géométrie précédente, le coefficient  $R(1, 1)$  pour le seul mode propagatif à cette fréquence et pour les deux valeurs  $h/d = 0.5$  et  $0.8$  considérés. La valeur de  $\tan\theta$  est le paramètre de contrôle. Nous reportons en Fig. 4.6 la comparaison entre nos résultats et ceux issus de [50] (on choisit de représenter le flux d'énergie réfléchi  $F_R$ , ici égal à  $|R(1, 1)|^2$ ).

On s'attend à ce que des problèmes de convergence se pose pour les faibles valeurs de  $\tan\theta$ , comme dans la géométrie de la section précédente.

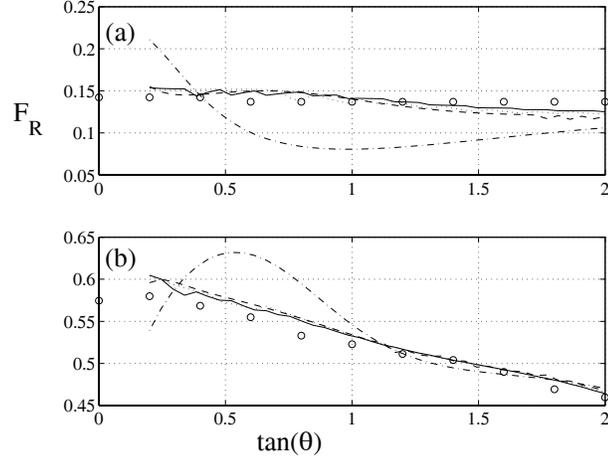


Figure 4.6: Flux d'énergie réfléchi  $F_R$  en fonction de l'angle  $\theta$  d'ouverture de l'encoche pour la géométrie de la Fig. 4.5, avec (a)  $h/d = 0.5$  et (b)  $h/d = 0.8$ . Le calcul modal est effectué avec le seul mode propagatif  $S_0$  et (-.-) 2 modes évanescents, (-) 10 modes évanescents, (..) 20 modes évanescents et (-) 40 modes évanescents. (o) indiquent les résultats de Cho, issus de [50].

## 4.5 En guise d'annexe

### 4.5.1 Relation de dispersion des modes de Lamb

La relation de dispersion pour les modes symétriques s'écrit [51]

$$(\alpha_n^2 + k_n^2)^2 \sinh(\alpha_n h) \cosh(\beta_n h) - 4k_n^2 \alpha_n \beta_n \sinh(\beta_n h) \cosh(\alpha_n h) = 0, \quad (4.30)$$

avec  $\alpha_n = \sqrt{k_n^2 - k_t^2}$  et  $\beta_n = \sqrt{k_n^2 - k_l^2}$ . Les vecteurs déplacement et contrainte axiale des modes de Lamb s'écrivent en fonction du potentiel scalaire  $\phi_n$  et du potentiel vecteur  $\psi_n$ , définis par

$$\begin{aligned} \phi_n(x, y) &= 4 \frac{k_n \alpha_n \beta_n}{\alpha_n^2 + k_n^2} \sqrt{\frac{k_n \sinh(\beta_n h) \cosh(\alpha_n h)}{f_n \cosh(\beta_n h)}} \cosh(\beta_n y), \\ \psi_n(x, y) &= -2i \beta_n \sqrt{\frac{k_n}{f_n}} \sinh(\beta_n h) \sinh(\alpha_n y). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
U_n &= ik_n \phi_n + \partial_y \psi_n = 2i \sqrt{\frac{k_n}{f_n}} \alpha_n \beta_n \sinh(\beta_n h) \left( \frac{2k_n^2 \cosh(\alpha_n h)}{k_n^2 + \alpha_n^2 \cosh(\beta_n h)} \cosh(\beta_n y) - \cosh(\alpha_n y) \right), \\
V_n &= \partial_y \phi_n - ik_n \psi_n = 2 \sqrt{\frac{k_n}{f_n}} k_n \beta_n \sinh(\beta_n h) \left( \frac{2\alpha_n \beta_n \cosh(\alpha_n h)}{k_n^2 + \alpha_n^2 \cosh(\beta_n h)} \sinh(\beta_n y) - \sinh(\alpha_n y) \right), \\
S_n &= \mu \left( -(k_n^2 + 2\beta_n^2 - \alpha_n^2) \phi_n + 2ik_n \partial_y \psi_n \right) \\
&= 4\mu \sqrt{\frac{k_n}{f_n}} k_n \alpha_n \beta_n \sinh(\beta_n h) \left( \frac{\alpha_n^2 - k_n^2 - 2\beta_n^2 \cosh(\alpha_n h)}{k_n^2 + \alpha_n^2 \cosh(\beta_n h)} \cosh(\beta_n y) + \cosh(\alpha_n y) \right), \\
T_n &= \mu \left( 2ik_n \partial_y \phi_n + (k_n^2 + \alpha_n^2) \psi_n \right) \\
&= 2i\mu \sqrt{\frac{k_n}{f_n}} \beta_n (k_n^2 + \alpha_n^2) \sinh(\beta_n h) \left( -\sinh(\alpha_n y) + \frac{4k_n^2 \alpha_n \beta_n}{(k_n^2 + \alpha_n^2)^2} \sinh(\beta_n y) \right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

#### 4.5.2 Relation de biorthogonalité et expression de $J_n$

La condition de biorthogonalité de Fraser [47] s'écrit

$$(X_n | Y_m) = \int_{-h}^h (-U_n S_m + V_m T_n) dy = J_n \delta_{nm}, \tag{4.33}$$

où  $J_n$  s'exprime en fonction de  $\phi_n$  et  $\psi_n$

$$\begin{aligned}
(X_n | Y_n) &= \mu \int_{-h}^h [ik_n (\alpha_n^2 - k_n^2) (\phi_n^2 - \psi_n^2) + 2(\alpha_n^2 - \beta_n^2) \phi_n \psi_n] dy \\
&\quad - \mu [2ik_n (\phi_n \phi_n' - \psi_n \psi_n') - (\alpha_n^2 + 3k_n^2) \phi_n \psi_n]_{-h}^h,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

et, pour les modes symétriques, on obtient l'expression de  $J_n$  sous la forme

$$\begin{aligned}
J_n &= \mu ik_n \alpha_n^2 (k_n^2 - \alpha_n^2) \left\{ \sinh^2(\alpha_n h) \sinh^2(\beta_n h) \left[ \frac{(k_n^2 + \alpha_n^2)(k_n^2 + \alpha_n^2 - 8\beta_n^2)}{\beta_n \tanh(\beta_n h)} + \frac{4\beta_n^2 (k_n^2 + 2\alpha_n^2)}{\alpha_n \tanh(\alpha_n h)} \right] \right. \\
&\quad \left. + h [-4k_n^2 \beta_n^2 \sinh^2(\beta_n h) + (k_n^2 + \alpha_n^2)^2 \sinh^2(\alpha_n h)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

### 4.5.3 Propriété des matrices $F$ et $G$

On donne dans cette section les propriétés des matrices  $F$  et  $G$  pour deux vecteurs  $\mathbf{Z}_1 = (z_{11}, z_{12})$  and  $\mathbf{Z}_2 = (z_{21}, z_{22})$ . On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} (F\mathbf{Z}_1|\mathbf{Z}_2) &= (\mathbf{Z}_1|F\mathbf{Z}_2) + f_1 [z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}]_{-h}^h + f_2 [z_{12}\partial_y z_{22} - \partial_y z_{12}z_{22}]_{-h}^h, \\ (G\mathbf{Z}_1|\mathbf{Z}_2) &= (\mathbf{Z}_1|G\mathbf{Z}_2) + [z_{12}z_{21} - z_{11}z_{22}]_{-h}^h. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Egalement, en utilisant (4.36), on a

$$\begin{aligned} (FG\mathbf{Z}_1|\mathbf{Z}_2) &= (\mathbf{Z}_1|GF\mathbf{Z}_2) + f_1 [(G\mathbf{Z}_1)_1 z_{22} - (G\mathbf{Z}_1)_2 z_{21}]_{-h}^h + \\ &\quad + f_2 [(G\mathbf{Z}_1)_2 \partial_y z_{22} - \partial_y (G\mathbf{Z}_1)_2 z_{22}]_{-h}^h + [z_{12}(F\mathbf{Z}_2)_1 - z_{11}(F\mathbf{Z}_2)_2]_{-h}^h. \end{aligned} \quad (4.37)$$

### 4.5.4 Expression des matrices $N_i$

Pour calculer  $(\mathbf{X}_n|\partial_x \mathbf{Y}_m)$ , on utilise (4.37) avec  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Z}_2 = \partial_x \mathbf{Y}_m$ . En prenant en compte les conditions limites  $T_n(\pm h) = R_n(\pm h) = 0$ , on obtient

$$(FG\mathbf{X}_n|\partial_x \mathbf{Y}_m) = (\mathbf{X}_n|GF\partial_x \mathbf{Y}_m) + i [k_n V_n \partial_x R_m - k_m U_n \partial_x T_m]_{-h}^h. \quad (4.38)$$

On utilise alors (4.8) pour établir

$$[\partial_x R_n]_{-h}^h = - [h' \partial_y R_n]_{-h}^h = [h' \rho \omega^2 V_n]_{-h}^h, \quad (4.39)$$

$$[\partial_x T_n]_{-h}^h = - [h' \partial_y T_n]_{-h}^h = [h' i k_n S_n + h' \rho \omega^2 U_n]_{-h}^h, \quad (4.40)$$

où  $[z]_{-h}^h$  désigne  $z(h) - z(-h)$ .

Avec (4.40), l'équation (4.38) devient

$$(k_m^2 - k_n^2)(\mathbf{X}_n|\partial_x \mathbf{Y}_m) = -2k_m k_m' J_n \delta_{mn} + [h' (k_m^2 U_n S_m - i \rho \omega^2 (k_m U_n U_m - k_n V_n V_m))]_{-h}^h. \quad (4.41)$$

La relation (4.41) est directement applicable pour le calcul de  $N_4$  avec  $m \neq n$ . Pour  $m = n$ , le calcul est différent. La relation (4.41) est d'abord écrite pour  $m = n$ , ce qui donne  $k_n'$  sous la forme

$$2k_n' J_n = [h' (k_n U_n S_n - i \rho \omega^2 (U_n^2 - V_n^2))]_{-h}^h. \quad (4.42)$$

On considère alors la forme dérivée

$$d_x(\mathbf{F}\mathbf{Y}_n|\mathbf{Y}_n) = ik_n' J_n + ik_n J_n', \quad (4.43)$$

avec

$$\begin{aligned} d_x(\mathbf{F}\mathbf{Y}_n|\mathbf{Y}_n) &= \left( (\partial_x \mathbf{Y}_n | \mathbf{F}\mathbf{Y}_n) - [V_n \partial_x R_n]_{-h}^h \right) + (\mathbf{F}\mathbf{Y}_n | \partial_x \mathbf{Y}_n) - [h' ik_n S_n U_n]_{-h}^h \\ &= 2ik_n (\mathbf{X}_n | \partial_x \mathbf{Y}_n) + [-h' (ik_n U_n S_n + \rho\omega^2 V_n^2)]_{-h}^h. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Il est maintenant suffisant de considérer (4.42), (4.43) et (4.44) pour obtenir

$$4k_n (\mathbf{X}_n | \partial_x \mathbf{Y}_n) = 2k_n J_n' + [h' ((3k_n U_n S_n - i\rho\omega^2 (U_n^2 + V_n^2)))]_{-h}^h. \quad (4.45)$$

Les équations (4.41) et (4.45) permettent de calculer  $(\mathbf{X}_n | \partial_x \mathbf{Y}_m)$ . Le terme  $(\partial_x \mathbf{X}_m | \mathbf{Y}_n)$  dans  $\mathbf{N}_1$  est déduit de  $(\mathbf{X}_n | \partial_x \mathbf{Y}_m)$  en utilisant (4.51). On obtient finalement  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_4$  sous la forme

$$\mathbf{N}_1(n, m) = \begin{cases} -\frac{1}{4J_n} \left\{ 2J_n' + \left[ h' \left( U_n S_n + \frac{i\rho\omega^2}{k_n} (U_n^2 + V_n^2) \right) \right]_{-h}^h \right\} & \text{pour } m = n, \\ \frac{1}{(k_m^2 - k_n^2) J_n} \left[ h' (-k_m^2 U_m S_m + i\rho\omega^2 (k_n U_n U_m - k_m V_n V_m)) \right]_{-h}^h & \text{pour } m \neq n, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{N}_4(n, m) = \begin{cases} -\frac{1}{4J_n} \left\{ 2J_n' - \left[ h' \left( U_n S_n + \frac{i\rho\omega^2}{k_n} (U_n^2 + V_n^2) \right) \right]_{-h}^h \right\} & \text{pour } m = n, \\ -\frac{1}{(k_m^2 - k_n^2) J_n} \left[ h' (-k_n^2 U_n S_m + i\rho\omega^2 (k_m U_n U_m - k_n V_n V_m)) \right]_{-h}^h & \text{pour } m \neq n. \end{cases} \quad (4.47)$$

#### 4.5.5 La condition de biorthogonalité et sa forme dérivée

L'équation (4.37) appliquée à  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Y}_m$  conduit à

$$(FG\mathbf{X}_n|\mathbf{Y}_m) = (\mathbf{X}_n|GF\mathbf{Y}_m) + ik_n [V_n R_m - R_n V_m]_{-h}^h + ik_m [T_n U_m - U_n T_m]_{-h}^h, \quad (4.48)$$

D'un autre côté, on a aussi  $FG\mathbf{X}_n = -k_n^2\mathbf{X}_n$  and  $GF\mathbf{Y}_m = -k_m^2\mathbf{Y}_m$ . Avec les conditions limites  $T_n(\pm h) = R_n(\pm h) = 0$ , on obtient

$$(k_n^2 - k_m^2)(\mathbf{X}_n|\mathbf{Y}_m) = 0. \quad (4.49)$$

Notre normalisation pour  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Y}_m$  donne

$$(\mathbf{X}_n|\mathbf{Y}_m) = J_n\delta_{nm}, \quad (4.50)$$

et sa forme dérivée

$$J'_n\delta_{nm} = (\partial_x\mathbf{X}_n|\mathbf{Y}_m) + (\mathbf{X}_n|\partial_x\mathbf{Y}_m) + [h'\mathbf{X}_n\mathbf{Y}_m]_{-h}^h. \quad (4.51)$$



## Chapter 5

# Interaction ondes élastiques/ dislocations

---

EN BREF:

Le dernier thème que je développe ici concerne l'étude de l'interaction d'une onde élastique avec une dislocation (défaut dans un réseau cristallin). Cette étude a démarré lors de mon séjour à Santiago du Chili en 2001 dans le cadre d'une collaboration avec Fernando Lund à la Universidad de Chile (collaboration franco-chilienne soutenue dans le cadre de l'accord CNRS/CONYCIT). En 2001, Jean-François Mercier (SMP/ENSTA, Paris) et Denis Boyer (UNAM, Mexique) et depuis 2002, Vincent Pagneux (LAUM, Le Mans) se sont joints à nous sur différents aspects de cette étude.

Il s'agit de comprendre la nature de l'interaction entre une onde élastique et une dislocation puis de développer un formalisme de multidiffusion pour décrire la propagation d'une onde dans un milieu contenant une distribution aléatoire de dislocations. Ce dernier permet de calculer les caractéristiques de l'onde cohérente transmise par le milieu disloqué (en terme de milieu effectif), ce qui permettra de proposer une méthode de diagnostic non destructif dans de tels milieux. Nous avons commencé par traiter le cas de l'interaction d'ondes élastiques avec une unique dislocation de façon à caractériser ce diffuseur [Publication *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(6): 2773-2780 (2004)]. Je développerai ce cas dans la section 5.2 de ce chapitre, qui permet de comprendre la nature de l'interaction dynamique, très particulière, de l'onde avec ce diffuseur. Nous avons poursuivi cette étude en caractérisant la multidiffusion d'une onde élastique par une distribution de dislocations [Publication *Phys. Rev. B*, **70**:024303 (2004), jointe en annexe G]. Finalement, nous avons étendu notre étude au cas où le diffuseur n'est plus une dislocation unique mais un segment contenant une densité linéique de dislocations, cette configuration modélisant un joint de grain dans un milieu polycristallin. Je présenterai cette étude, en cours de rédaction, dans la section 5.3 de ce chapitre.

Nous continuons actuellement de travailler sur ce sujet, notamment sur la généralisation 3D

de nos résultats 2D. Un autre aspect concerne l'étude numérique de l'interaction à l'échelle microscopique.

Ce travail s'inscrit dans la thématique "propagation en milieux complexes" du GdR US. C'est en constatant les analogies qui existent entre les dislocations et les tourbillons que j'ai été motivée pour organiser, avec Vincent Pagneux et Philippe Petitjeans, une école à l'Institut Scientifique de Cargèse sur le thème "Vortex: un concept général en physique" en Juillet 2004.

PUBLICATIONS SUR CE SUJET:

- A. Maurel, J.-F. Mercier & F. Lund, Scattering of an elastic wave by a single dislocation, *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(6): 2773-2780 (2004).
  - A. Maurel, J.-F. Mercier & F. Lund, Elastic wave propagation through a random array of dislocations, *Phys. Rev. B*, **70**:024303 (2004), **Publication jointe en annexe G**.
  - A. Maurel, V. Pagneux, D. Boyer & F. Lund, Elastic wave propagation through a distribution of dislocations, à paraître dans *Materials Science & Engineering: A*. (2004).
  - A. Maurel, V. Pagneux, D. Boyer & F. Lund, Propagation of elastic waves through polycrystals: the effect of scattering from dislocation arrays, soumis à *Proc. R. Soc. Lond. A* (2005).
-

## 5.1 Introduction

L'interaction d'une onde élastique avec des défauts de type inclusion a fait l'objet de nombreuses études, à partir des premiers travaux, dans les années 1950, concernant la diffusion d'ondes acoustiques par des défauts sphériques vides, remplis de fluide ou composés d'un matériau élastique [52, 53, 54]. Des études ultérieures ont permis de traiter le cas d'ondes en incidence quelconque pour des cavités bidimensionnelles cylindriques [55, 56] et des cavités tridimensionnelles sphériques [57, 58, 59] ainsi que pour des formes d'inclusions plus compliquées [60, 61, 62, 63].

Les inclusions sont des obstacles statiques et l'étude de leur interaction avec une onde élastique a ouvert des voies vers le contrôle non destructif [64, 65, 66, 67, 68]. Les dislocations sont également des défauts qui interagissent avec une onde élastique. Les dislocations coin ont été postulées par Orowan, Polanyi et Taylor [69, 70, 71], et les dislocations vis par Burgers [72] dans les années 30. Bien qu'elles jouent un rôle central dans la compréhension de la plasticité, il est très difficile de mesurer leurs propriétés, l'outil classique, mais assez lourd, restant la microscopie électronique. Est-il possible de développer une technique de diagnostic acoustique fondée sur l'interaction d'une onde avec les dislocations ? Un premier pas dans cette direction nécessite la compréhension de l'interaction onde/dislocation, sujet sur lequel on trouve, de façon surprenante, peu de littérature.

Dans les années 50, Nabarro [73] étudie l'interaction d'ondes élastiques avec une dislocation. Il est le premier à mentionner que la dislocation diffuse les ondes élastiques parce qu'elle est en mouvement et que ce mouvement est lui-même dû à la présence de l'onde incidente. Aussi, la description du mécanisme nécessite-t-elle deux étapes: le mouvement de la dislocation en présence d'une onde incidente doit être connu ainsi qu'une représentation du champ élastique généré par une dislocation en mouvement. Eshelby [74, 75] et Nabarro [73] utilisent l'analogie électromagnétique pour traiter le problème de la dislocation vis en deux dimensions, ce qui conduit à un problème scalaire pour l'interaction avec l'onde de cisaillement perpendiculaire au plan. Cependant, cette analogie n'est plus valide pour des dislocations coin puisque deux vitesses, pour l'onde de cisaillement et pour l'onde de compression, interviennent alors.

En 1961, Mura [76] obtient une représentation intégrale à partir des équations de l'élasticité pour l'onde diffusée par une dislocation. Dans cette représentation, le mouvement de la dislocation apparaît comme une inconnue et Mura présente, avec Kiusalaas

[77], un calcul pour les deux cas de dislocations coin et vis en supposant un mouvement sinusoïdal quelconque. En fait, on trouve, à la fin de ce papier, l'expression de la section totale de diffusion pour une onde élastique de cisaillement en incidence normale par rapport au vecteur de Burgers de la dislocation. Ce résultat suppose que les auteurs ont utilisé une équation du mouvement. Malheureusement, aucun détail de ce calcul n'est donné, notamment l'équation du mouvement utilisée, les auteurs indiquant qu'ils sont trop longs pour être reproduits.

Plus récemment, en 1989, Lund [78] a établi l'équation du mouvement d'une dislocation insonifiée. Ce travail permet de poser une formulation consistante pour la représentation intégrale de Mura. En utilisant cette formulation, nous avons calculé les fonctions de diffusion dans le cas 2D de dislocation vis et coin. Le premier cas conduit à un problème scalaire tandis que dans le second conduit à un problème vectoriel pour des ondes polarisées. Dans ce dernier cas, en tenant compte des conversions de modes, quatre fonctions de diffusion sont déterminées. Nous trouvons, dans les deux cas, que la force de diffusion croît avec la longueur d'onde. L'explication de ce comportement inusuel vient de la nature - également inusuelle - du mécanisme d'interaction de l'onde avec ce diffuseur. Ce mécanisme diffère de celui responsable de la diffusion d'onde avec des diffuseurs statiques, tels que les inclusions, pour lesquels on attend une force de diffusion tendant vers zéro à grande longueur d'onde. Comme je l'ai dit précédemment, la diffusion par une dislocation résulte de l'interaction dynamique avec l'onde incidente et il n'y a pas de raison d'attendre un résultat similaire ici. Plutôt, la force de la diffusion est liée à l'équation du mouvement en présence de l'onde incidente, un mouvement dont l'amplitude croît avec la longueur d'onde dans les modèles dynamiques de [75, 78].

On peut finalement mentionner une équation du mouvement souvent utilisée et qui correspond au modèle du ressort amorti [79, 80, 81, 82], basé sur la formulation de Koehler [83]. Ce modèle est très simple, ce qui permet de l'utiliser pour de nombreuses applications et il contient sans doute la physique de l'interaction onde-dislocation. Il a été utilisé avec succès pour l'interprétation de données expérimentales comme la mesure de l'atténuation dans les solides. Cependant, il ne prend pas en compte toute la complexité de cette interaction. Par exemple, il ne permet pas de différencier entre une dislocation vis ou coin, ni de prendre en compte les différentes polarisations de l'onde élastique. Le modèle du ressort décrit une seule dislocation, la présence de plusieurs dislocations étant simplement prise en compte par une multiplication. Cependant, la présence de plusieurs diffuseurs sur le chemin

de l'onde a un effet collectif en plus des effets cumulés d'un seul diffuseur: par exemple, une distribution de diffuseurs atténue l'onde (cohérente), même en absence de tout mécanisme de viscosité interne.

Je présente en section 5.2 les résultats obtenus pour l'interaction d'une onde vis ou coin avec une dislocation dans une configuration bidimensionnelle, à partir de la représentation intégrale de Mura et l'équation du mouvement de Lund. Ce travail a été publié dans [84]. Je vous renvoie à la publication [85], jointe en annexe G, pour l'étude de la propagation d'une onde élastique à travers une distribution aléatoire de dislocations. La section 5.3 concerne une extension de cette étude dans le cas où le diffuseur est constitué d'un segment contenant une densité linéique de dislocations coin. Cette configuration est d'intérêt puisqu'un tel diffuseur correspond à un joint de grain et a pour application la propagation d'ondes élastiques dans les milieux polycristallins.

## 5.2 Interaction d'une onde élastique avec une dislocation

### 5.2.1 Les équations de base

On considère une boucle de dislocation  $\mathbf{X}(\sigma, t)$ , où  $\sigma$  est la coordonnée le long de la boucle  $L$  dans l'espace à 3 dimensions avec les coordonnées courantes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .  $\mathbf{b}$  est le vecteur de Burgers qui définit la discontinuité du déplacement  $\mathbf{u}$ :  $\oint_C d\mathbf{u} \equiv -\mathbf{b}$ , écrit formellement  $[\mathbf{u}] = \mathbf{b}$ , où  $C$  est une courbe fermée autour de la dislocation, orientée directement par rapport à  $\tau = \partial\mathbf{X}/\partial\sigma$  (Fig. 5.1(a)).

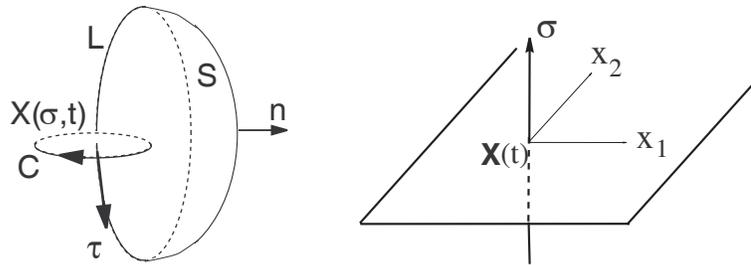


Figure 5.1: (a) Boucle  $L$  de dislocation; on observe un saut du déplacement lorsqu'on fait le tour de  $L$  le long de  $C$  au passage de  $S$  (b) Configuration du problème bidimensionnel; la ligne  $L$  est portée par  $\sigma$ .

Un solide homogène élastique contenant une boucle de dislocation  $L$  est décrit par le

déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et les équations de l'élastodynamique s'écrivent

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(\mathbf{x}, t) - c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_l(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{avec les C.L.} \quad [u_i]_{S(t)} = b_i, \quad \left[ c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} n_j \right]_{S(t)} = 0.$$

$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  sont les constantes élastiques, avec  $(\lambda, \mu)$  les coefficients de Lamé et  $\rho$  la densité. En utilisant la fonction de Green de l'espace libre à 3 dimensions  $G^{0(3D)}$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{im}^{0(3D)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} G_{lm}^{0(3D)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \delta_{im},$$

le déplacement  $u_m^s$  associé à l'onde diffusée est écrit sous forme d'une représentation intégrale

$$u_m(\mathbf{x}, t) = b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \right].$$

$$u_m^s(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl} \int \int_{S(t')} dt' dS \, b_l n_k \frac{\partial}{\partial x_j} G_{im}^{0(3D)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'). \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface de discontinuité pour le déplacement  $S(t)$  dépendant du temps puisque la ligne de dislocation que définit  $\mathbf{X}(\sigma, t)$  bouge. La dérivée temporelle de cette expression est prise par Mura [76] en utilisant  $\int_{\Delta S} dS \, n_k = \epsilon_{knh} \oint_L d\sigma \, \dot{X}_n \tau_h \Delta t'$ , où  $\Delta S$  est l'incrément de  $S(t')$  pour un incrément de temps  $\Delta t'$ . La vitesse  $v_m^s \equiv \dot{u}_m^s$  satisfait la représentation intégrale

$$\begin{aligned} v_m^s(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_m^s(\mathbf{x}, t) &= b_i \epsilon_{jnh} \int dt' \oint_{\partial S(t')} d\sigma \, \dot{X}_n \tau_h \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0 - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0 \right] \\ &= \epsilon_{jnh} c_{ijkl} b_i \int dt \oint_{\partial S(t)} d\sigma \, \dot{X}_n \tau_h \partial_k G_{lm}^0 \end{aligned}$$

$$v_m^s(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{knh} c_{ijkl} \int \oint_L dt' d\sigma \, b_l \dot{X}_n(\sigma, t') \tau_h(\sigma) \frac{\partial}{\partial x_j} G_{im}^{0(3D)}[\mathbf{x} - \mathbf{X}(\sigma, t'), t - t']. \quad (5.3)$$

L'obtention des équations (5.1-5.3) est détaillée dans la petite annexe en section (5.2.5).

En deux dimensions, la vitesse de l'onde diffusée par la dislocation  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  dans le plan

$(x_1, x_2)$  avec  $\tau_k = \delta_{k3}$  prend la forme

$$v_m^s(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{kn} c_{ijkl} \int dt' b_l \dot{X}_n(t') \frac{\partial}{\partial x_j} G_{im}^0[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'), t - t'],$$

où  $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{ij3}$  et  $G^0 \equiv \int dx_3 G^{0(3D)}$  est la fonction de Green en deux dimensions. Dans le domaine fréquentiel, on a finalement

$$v_m^s(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon_{kn} c_{ijkl} b_l \dot{X}_n(\omega) \frac{\partial}{\partial x_j} G_{im}^0(\mathbf{x}, \omega), \quad (5.4)$$

où  $G^0[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t'), t - t']$  a été pris, à l'ordre dominant par rapport à l'amplitude  $X(t)$ , égal à  $G^0(\mathbf{x}, t - t')$ .

Une méthode pour trouver l'équation du mouvement est donnée par Lund [78]. La méthode est basée sur une formulation Lagrangienne des équations d'élasticité. Dans la suite, on considère le cas bidimensionnel d'une ligne de dislocation le long de l'axe  $x_3$  et on suppose son mouvement subsonique  $\dot{X} \ll \alpha, \beta$ , où  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  et  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  sont les vitesses des ondes de cisaillement et de compression. Le principe variationnel s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_a} \right) = \epsilon_{ab} b_i \Sigma_{ib}, \quad (5.5)$$

où  $\Sigma_{ib} = c_{ibkl} \frac{\partial}{\partial x_l} u_k$  est le tenseur des contraintes ( $\Sigma_{ib}$  est pris à l'endroit de la dislocation) et  $\mathcal{L}$  est la densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{m\beta^2}{b^2} \left\{ b_{\parallel}^2 \left( 1 - \frac{\dot{X}^2}{2\beta^2} \right) + b_{\perp}^2 \left[ 2(1 - \gamma^{-2}) - \frac{\dot{X}^2}{2\beta^2} (1 + \gamma^{-4}) \right] + \frac{(b_{\perp} \wedge \dot{\mathbf{X}})^2}{\beta^2} (1 - \gamma^{-4}) \right\},$$

$m = \frac{\mu b^2}{4\pi\beta^2} \ln \frac{\delta}{\epsilon}$  est une masse effective par unité de longueur,  $b_{\parallel}$  et  $b_{\perp}$  indiquent les composantes de  $\mathbf{b}$  respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de dislocation et  $\gamma = \alpha/\beta$ ;  $\delta$  et  $\epsilon$  représentent respectivement une longueur intégrale et une longueur de coupure. L'équation (5.5) permet de relier le mouvement de la dislocation à l'onde se propageant dans le milieu élastique, de sorte que le système (5.4-5.5) est consistant.

### 5.2.2 Cas d'une dislocation vis

Une dislocation vis correspond à une configuration où le vecteur de Burgers est parallèle à la ligne de dislocation  $b_i = b\delta_{i3}$  [Fig. 5.2(a)]. L'équation (5.4) prend la forme

$$v^s(\mathbf{x}, \omega) = \mu b \epsilon_{ab} \dot{X}_b(\omega) \frac{\partial}{\partial x_a} G^0(\mathbf{x}, \omega), \quad (5.6)$$

où  $v$  désigne  $v_3$  et  $G^0 \equiv G_{33}^0$  est la fonction de Green scalaire pour l'onde de cisaillement. Notons que le cas anti-plan correspond au cas scalaire de l'interaction de l'onde de cisaillement parallèle anti-plane avec la dislocation vis. Comme nous l'avons dit, la représentation intégrale doit être complétée par une loi donnant le mouvement de la dislocation  $\dot{\mathbf{X}}(\omega)$ . Dans le cas de la dislocation vis, (5.5) s'écrit, dans la première approximation de Born

$$m \ddot{X}_b(t) = -\mu b \epsilon_{bc} \frac{\partial u^{inc}}{\partial x_c} [\mathbf{X}(t), t].$$

A l'ordre dominant par rapport à la petite amplitude  $\mathbf{X}(t)$ , cette expression devient, dans le domaine fréquentiel,

$$\dot{X}_b(\omega) = -\frac{\mu b}{m\omega^2} \epsilon_{bc} \frac{\partial v^{inc}}{\partial x_c}(\mathbf{0}, \omega). \quad (5.7)$$

Les équations (5.6) et (5.7) conduisent finalement à

$$v^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mu^2 b^2}{m\omega^2} \frac{\partial v^{inc}}{\partial x_a}(\mathbf{0}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_a} G^0(\mathbf{x}, \omega). \quad (5.8)$$

A la distance  $x$  loin de la dislocation, la fonction de diffusion  $f(\theta_x)$  est définie par la dépendance angulaire de l'onde diffusée  $v^s(\mathbf{x}, t) = f(\theta_x) \frac{e^{i\Omega(x/\beta-t)}}{\sqrt{x}}$  pour une onde incidente plane de pulsation  $\Omega$  et d'amplitude unité  $v^{inc}(\mathbf{x}, t) = e^{i\Omega(x_1/\beta-t)}$ , avec  $\theta_x = (\widehat{Ox_1}, \mathbf{x})$ . En utilisant le comportement asymptotique de la fonction de Green  $G^0(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(\omega x/\beta)$ , l'équation (5.8) permet de calculer

$$f(\theta_x) = -\frac{\mu b^2}{2m} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\Omega\beta^3}} \cos \theta_x. \quad (5.9)$$

La section de diffusion  $\sigma^s$  est le flux d'énergie de l'onde diffusée et la section totale  $\sigma^t$  est

la somme de  $\sigma^s$  et du flux d'énergie absorbé. On obtient

$$\sigma^s = \frac{\mu^2 b^4}{8m^2 \Omega \beta^3},$$

$$\sigma^t = 2\Im \left[ \sqrt{\frac{2\pi\beta}{\Omega}} f(0) e^{-i\pi/4} \right],$$

en accord avec Kiusalaa et Mura [77] ( $\Im$  désigne la partie imaginaire). Notons que le comportement de la fonction de diffusion en fonction de  $\Omega$ , déjà observé par Nabarro [73], n'est pas usuel puisqu'il indique que la force du diffuseur croît avec la longueur d'onde. Je reviendrai sur ce comportement dans la section 5.2.4.

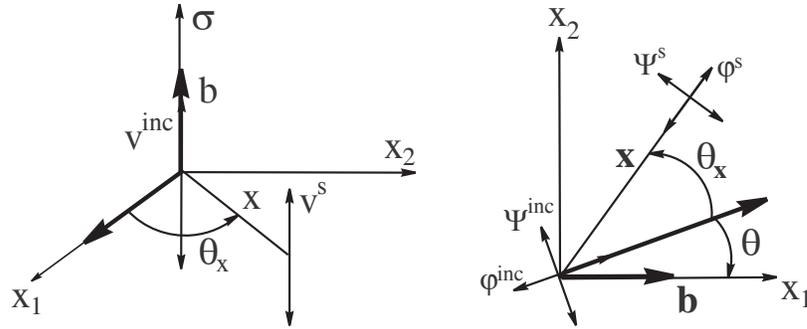


Figure 5.2: (a) Onde de cisaillement se propageant suivant l'axe  $x_1$  (vitesse  $v^{inc}$ ) sur une dislocation vis caractérisée par le vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  suivant  $\sigma$ ; (b) Onde acoustique (associée au potentiel scalaire  $\varphi^{inc}$ ) et onde de cisaillement (associée au potentiel vecteur  $\psi^{inc}$ ) se propageant sur une dislocation coin, caractérisée par le vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  dans le plan  $(x_1, x_2)$ .

### 5.2.3 Cas d'une dislocation coin

Dans le cas vectoriel de la dislocation coin, on choisit de travailler avec les potentiels scalaire ( $\varphi$ ) et vecteur ( $\boldsymbol{\psi}$ )

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (5.11)$$

avec  $\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi)$ . L'onde incidente est décrite par ses potentiels

$$\varphi^{inc}(\mathbf{x}, t) = A_\alpha e^{i\frac{\Omega}{\alpha}(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)} e^{-i\Omega t},$$

$$\psi^{inc}(\mathbf{x}, t) = A_\beta e^{i\frac{\Omega}{\beta}(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)} e^{-i\Omega t}. \quad (5.12)$$

Loin de la dislocation, les potentiels diffusés  $\varphi^s$  et  $\psi^s$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\varphi^s(\mathbf{x}, t) &= [f_{\alpha\alpha}(\theta_x)A_\alpha + f_{\alpha\beta}(\theta_x)A_\beta] \frac{e^{i\frac{\Omega}{\alpha}x}}{\sqrt{x}} e^{-i\Omega t}, \\ \psi^s(\mathbf{x}, t) &= [f_{\beta\alpha}(\theta_x)A_\alpha + f_{\beta\beta}(\theta_x)A_\beta] \frac{e^{i\frac{\Omega}{\beta}x}}{\sqrt{x}} e^{-i\Omega t},\end{aligned}\quad (5.13)$$

où la fonction de diffusion  $f_{ab}$ , avec  $a, b = \alpha, \beta$ , caractérise l'onde  $a$  résultant de l'onde incidente  $b$ .

Le cas plan correspond à l'interaction d'une dislocation coin avec les ondes dans le plan se propageant aux vitesses  $\alpha$  et  $\beta$  [Fig. 5.2(b)]. On se restreint au cas de la dislocation coin glissante (gliding edge), pour laquelle la ligne de dislocation bouge suivant la direction du vecteur de Burgers.

Le mouvement  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  de la dislocation le long de l'axe  $x_1$  lorsqu'elle est soumise au champ de déplacement de l'onde incidente est donnée par (5.5) dans [78]

$$m(1 + \gamma^{-4}) \ddot{\mathbf{X}}(t) = \Sigma_{12}^{inc} \mathbf{b}. \quad (5.14)$$

Dans la première approximation de Born,  $\dot{\mathbf{X}}(\omega)$  peut être exprimé comme une fonction des potentiels incidents, à l'ordre dominant, et on obtient dans le domaine fréquentiel

$$\dot{X}(\omega) = -\frac{b\mu\Omega^2}{m\omega^2} \left[ \frac{\sin 2\theta}{\alpha^2} \varphi^{inc}(\mathbf{0}, \omega) + \frac{\cos 2\theta}{\beta^2} \psi^{inc}(\mathbf{0}, \omega) \right]. \quad (5.15)$$

La vitesse de l'onde diffusée peut être exprimée en utilisant l'équation (5.4)

$$v_m^s(\mathbf{x}, \omega) = -b\mu\dot{X}(\omega) \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} G_{1m}^0(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_1} G_{2m}^0(\mathbf{x}, \omega) \right], \quad (5.16)$$

ou, de façon équivalente, en terme de potentiels diffusés, en utilisant

$$\begin{aligned}\varphi^s &= -i\frac{\alpha}{\Omega} [\cos(\theta_x - \theta)v_1^s(\mathbf{x}, \omega) + \sin(\theta_x - \theta)v_2^s(\mathbf{x}, \omega)], \\ \psi^s &= i\frac{\beta}{\Omega} [-\sin(\theta_x - \theta)v_1^s(\mathbf{x}, \omega) + \cos(\theta_x - \theta)v_2^s(\mathbf{x}, \omega)].\end{aligned}\quad (5.17)$$

Comme dans le cas scalaire, on utilise la forme asymptotique de  $G^0(\mathbf{x}, \omega)$  pour trouver les

expressions des potentiels diffusés loin des diffuseurs. Les fonctions de diffusion s'écrivent

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha\alpha}(\theta_x) &= \frac{\mu b^2}{2m} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\Omega\alpha^3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin 2\theta \sin(2\theta_x - 2\theta), \\
 f_{\alpha\beta}(\theta_x) &= \frac{\mu b^2}{2m} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\Omega\alpha^3}} \cos 2\theta \sin(2\theta_x - 2\theta), \\
 f_{\beta\alpha}(\theta_x) &= -\frac{\mu b^2}{2m} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\Omega\beta^3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin 2\theta \cos(2\theta_x - 2\theta), \\
 f_{\beta\beta}(\theta_x) &= -\frac{\mu b^2}{2m} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\Omega\beta^3}} \cos 2\theta \cos(2\theta_x - 2\theta).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Les formes des fonctions de diffusion sont données sur la Fig. 5.3.

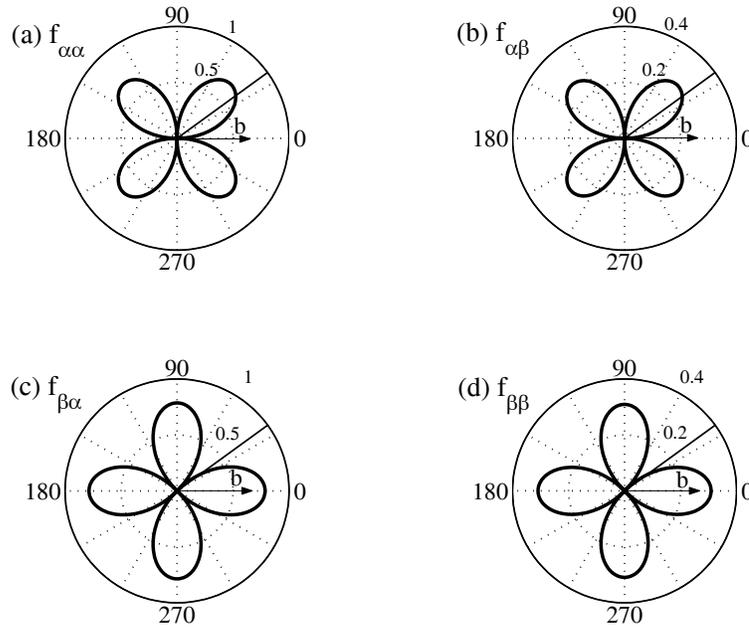


Figure 5.3: formes des fonctions de diffusion pour la diffusion par une dislocation coin; les flèches indiquent la direction du vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  et les traits pleins la direction de l'onde incidente.

Les sections de diffusion sont définies comme dans le cas scalaire

$$\sigma^s = \frac{1}{\frac{A_\alpha^2}{\alpha} + \frac{A_\beta^2}{\beta}} \left( \frac{\mu b^2}{2m} \right)^2 \frac{1}{2\Omega} \left( 1 + \frac{\beta^4}{\alpha^4} \right) \left( \sin 2\theta \frac{A_\alpha}{\alpha^2} + \cos 2\theta \frac{A_\beta}{\beta^2} \right)^2,$$

$$\sigma^t = \frac{1}{\frac{A_\alpha^2}{\alpha} + \frac{A_\beta^2}{\beta}} \left\{ 2\Im \left( \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\Omega}} f_{\alpha\alpha}(0) \frac{A_\alpha^2}{\alpha} e^{-i\pi/4} \right) + 2\Im \left( \sqrt{\frac{2\pi\beta}{\Omega}} f_{\beta\beta}(0) \frac{A_\beta^2}{\beta} e^{-i\pi/4} \right) \right.$$

$$\left. + 2\Im \left[ A_\alpha A_\beta \left( \frac{f_{\alpha\beta}(0)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{f_{\beta\alpha}(0)}{\sqrt{\beta}} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega}} e^{-i\pi/4} \right] \right\} = 0.$$

L'expression de  $\sigma^s$  est en accord avec [77], où les auteurs effectuent le calcul dans le cas particulier  $A_\alpha = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ .

#### 5.2.4 Une petite conclusion

La diffusion par une dislocation est le résultat de l'interaction très particulière d'une onde élastique avec une dislocation. En plus de la diffusion par le cœur de la dislocation, l'onde incidente provoque le mouvement de la dislocation, ce qui produit l'émission d'une onde secondaire. C'est ce mécanisme que nous étudions. La dislocation bougeant avec une amplitude proportionnelle à la fréquence de l'onde incidente, on trouve que la force de diffusion croît avec la longueur d'onde (la section de diffusion est proportionnelle à  $\Omega^{-1}$ ). Nous avons pu traiter le cas vectoriel de l'interaction des ondes élastiques avec une dislocation coin et c'est la première fois, à notre connaissance, que le calcul complet est mené.

Très récemment, des travaux expérimentaux [88, 89, 90] montrent des images d'une onde diffusée par une dislocation dans le  $\text{LiNbO}_3$  grâce à des images par rayons X. Une comparaison avec ces résultats expérimentaux serait très instructive mais elle nécessite d'en extraire des informations quantitatives qui ne sont pas disponibles à ce jour.

L'extension naturelle de cette étude porte sur la modification des caractéristiques de la propagation d'onde en présence de nombreuses dislocations. Cette étude théorique est présentée dans la publication jointe en annexe G. Nous envisageons également de mettre au point une expérience dans laquelle on mesurerait les modifications des fréquences de résonance en présence de tels diffuseurs afin de confronter nos calculs à la réalité expérimentale.

Finalement, on s'intéresse à la diffusion par le cœur de la dislocation, *i.e.* la diffusion due à la microstructure au voisinage de la dislocation. On a déjà dit que cette diffusion tend

vers zéro à grandes longueurs d'onde (une discussion sur ce mécanisme peut être trouvée dans [73] qui évalue la section de diffusion de l'ordre de  $b^2\Omega/\beta$ ). Parce que grande signifie grande comparée à la taille du cœur - de l'ordre de  $b$  -, les situations usuelles sont toujours dans une gamme  $\lambda \gg b$ . Cependant, si l'intérêt est dans cette description, on doit faire attention à une description, à cette échelle, en terme de milieu continu et une meilleure description est probablement à chercher dans un modèle atomique, comme cela est fait, par exemple numériquement, dans [91, 92]. Nous travaillons actuellement à cet aspect.

### 5.2.5 Une petite annexe

Je reporte ici l'obtention des représentations intégrales (5.1) pour le déplacement  $u_m^s(\mathbf{x}, t)$  et (5.3) pour la vitesse  $v_m^s(\mathbf{x}, t)$ . Le paragraphe est probablement plus long qu'il ne le mérite mais il me permet de consigner des relations qui, si elles sont évidentes parfois, me sont précieuses à garder au propre....

#### Quelques relations géométriques pour les nuls...

Mon problème ici est d'établir les relations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV h(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} dV \frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial V(t)} dS_i w_i h(\mathbf{x}, t), \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} dS_i h_i(\mathbf{x}, t) = \int_{S(t)} dS_i \frac{\partial}{\partial t} h_i(\mathbf{x}, t) + \epsilon_{inh} \oint_{\partial S(t)} d\sigma w_n \tau_h h_i(\mathbf{x}, t). \quad (5.20)$$

Commençons par la première relation. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV h(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)} dV h(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \int_{V(t)} dV h(\mathbf{x}, t) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V(t)} dV [h(\mathbf{x}, t + \Delta t) - h(\mathbf{x}, t)] + \int_{\Delta V} dV h(\mathbf{x}, t) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} dV h(\mathbf{x}, t) + \int_{V(t)} dV \frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

où  $\Delta V$  est la variation de volume  $V(t)$  pendant  $\Delta t$  [Fig. 5.4(a)]. Considérons l'élément de surface  $dS$  sur le bord de  $V(t)$ . Le volume qu'il décrit lorsqu'il se déplace de  $\mathbf{w}\Delta t$  pendant  $\Delta t$  [Fig. 5.4(b)] est un cylindre de volume  $dh dS$ , avec  $dh = w_i n_i \Delta t$ . Sommer sur ces volumes, c'est donc sommer sur  $\int_{\Delta V} dV = \int_{S(t)} dS w_i n_i \Delta t$ , d'où on tire la première relation

souhaitée.

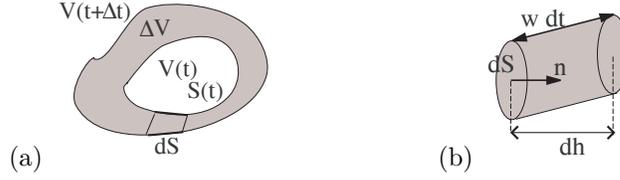


Figure 5.4: (a) Volume décrit par la surface  $S(t)$  pendant  $\Delta t$  à la vitesse  $\mathbf{w}$ , (b) Volume élémentaire décrit par la surface  $dS$  pendant  $\Delta t$  à la vitesse  $\mathbf{w}$ .

Faisons de même pour la seconde relation. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} dS_i h_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{S(t+\Delta t)} dS_i h_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \int_{S(t)} dS_i h_i(\mathbf{x}, t) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta S} dS_i h_i(\mathbf{x}, t) + \int_{S(t)} dS_i \frac{\partial}{\partial t} h_i(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

où  $\Delta S$  est la variation de surface  $S(t)$  pendant  $\Delta t$  [Fig. 5.5(a)]. Considérons le segment  $d\sigma$  sur le bord de  $S(t)$ , orienté par le vecteur unitaire  $\tau$ . La surface qu'il décrit lorsqu'il se déplace de  $\mathbf{w}\Delta t$  pendant  $\Delta t$  [Fig. 5.5(b)] est un parallélogramme de surface  $dh d\sigma$ , avec  $dh n_i = \epsilon_{ijk} w_j \tau_k \Delta t$ , avec  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal au plan du parallélogramme. Sommer sur ces surfaces, c'est donc sommer sur  $\int_{\Delta S} dS_i = \oint_{C(t)} d\sigma \epsilon_{ijk} w_j \tau_k \Delta t$ , d'où on tire la relation souhaitée.

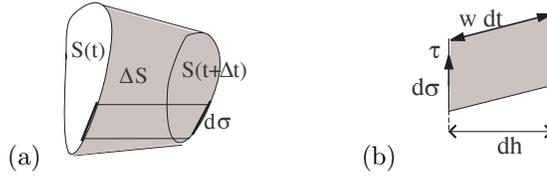


Figure 5.5: (a) Surface décrit par le contour pendant  $\Delta t$  à la vitesse  $\mathbf{w}$ , (b) Surface élémentaire décrite par le segment  $d\sigma$  pendant  $\Delta t$  à la vitesse  $\mathbf{w}$ .

En intégrant les relations (5.20) en temps (entre  $-\infty$  et  $\infty$ ), et si la fonction  $h(\mathbf{x}, t)$  [ou  $h_i(\mathbf{x}, t)$ ] s'annule aux temps infinis, on a

$$0 = \int dt \int_{V(t)} dV \frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, t) + \int dt \int_{\partial V(t)} dS_i w_i h(\mathbf{x}, t), \quad (5.23)$$

$$0 = \int dt \int_{S(t)} dS_i \frac{\partial}{\partial t} h_i(\mathbf{x}, t) + \epsilon_{inh} \int dt \oint_{\partial S(t)} d\sigma w_n \tau_h h_i(\mathbf{x}, t). \quad (5.24)$$

### Représentation intégrale pour le déplacement

Revenons à nos représentations intégrales. Je reprends les équations d'onde

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(\mathbf{x}, t) - c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_l(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{avec les C.L.} \quad \llbracket u_i \rrbracket_{S(t)} = b_i, \quad \llbracket c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} n_j \rrbracket_{S(t)} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{im}^{0(3D)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \delta_{im},$$

où, par simplicité d'écriture, j'ai remplacé  $G^{0(3D)}$  par  $G^0$ . On multiplie la première équation par  $G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  et la seconde par  $u_i(\mathbf{x}', t')$  et on intègre en temps et en espace sur un volume  $\mathcal{V}(t')$  tel que  $\partial\mathcal{V}(t') = S_\infty \cup S(t')$ , où  $S_\infty$  est le bord extérieur renvoyé à l'infini et  $S(t')$  la surface qui s'appuie sur la boucle de dislocation. Plus correctement, on peut définir  $S^+(t')$  et  $S^-(t')$  deux surfaces qui prennent en sandwich  $S(t')$ ,  $S_T$  qui entoure la ligne de dislocation comme le bord de  $\mathcal{V}$ . Le lien entre ces surfaces porte sur la condition de saut, à savoir

$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} dS_i h(\mathbf{x}) = \int_{S^+(t) \cup S^-(t)} dS_i h(\mathbf{x}) = \int_{S(t)} dS_i \llbracket h(\mathbf{x}) \rrbracket \quad (5.25)$$

pour une fonction qui s'annule sur  $S_\infty$ , ce qui sera toujours le cas. On obtient la représentation intégrale

$$u_m^s(\mathbf{x}, t) = \rho \int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV [\partial_{t'^2} u_i(\mathbf{x}', t') G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - \partial_{t'^2} G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') u_i(\mathbf{x}', t')] \\ - c_{ijkl} \int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV [\partial_{j'k'} u_l(\mathbf{x}, t) G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - \partial_{j'k'} G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') u_i(\mathbf{x}', t')].$$

Deux intégrales à traiter.... c'est parti ! La seconde est plus simple, il suffit d'utiliser  $\int_V dV \partial_i f = \int_{\partial V} dS_i f$ . Allons-y

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}(t')} dV [\partial_{j'k'} u_l G_{im}^0 - \partial_{j'k'} G_{lm}^0 u_i] &= \int_{\mathcal{V}(t')} dV \partial_{j'} [\partial_{k'} u_l G_{im}^0 - \partial_{k'} G_{lm}^0 u_i] \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}(t')} dS_j [\partial_{k'} u_l G_{im}^0 - \partial_{k'} G_{lm}^0 u_i] \\ &= -b_i \int_{S(t')} dS_j \partial_{k'} G_{lm}^0 = b_i \int_{S(t')} dS_j \partial_k G_{lm}^0. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on utilise la relation (5.23) avec  $h = \partial_{t'} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'} G_{im}^0 u_i$  (c'est la fonction de Green et sa dérivée temporelle qui s'annulent aux temps infinis). On a alors

$$\begin{aligned} \int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV \frac{\partial}{\partial t'} [\partial_{t'} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'} G_{im}^0 u_i] &= - \int dt' \int_{\partial\mathcal{V}(t')} dS_j \dot{X}_j [\partial_{t'} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'} G_{im}^0 u_i] \\ &= b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0. \end{aligned}$$

Avec, par ailleurs,

$$\int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV \frac{\partial}{\partial t'} [\partial_{t'} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'} G_{im}^0 u_i] = \int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV [\partial_{t'^2} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'^2} G_{im}^0 u_i],$$

on a finalement

$$\int dt' \int_{\mathcal{V}(t')} dV [\partial_{t'^2} u_i G_{im}^0 - \partial_{t'^2} G_{im}^0 u_i] = b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0.$$

La représentation intégrale s'écrit donc

$$u_m^s(\mathbf{x}, t) = b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \right].$$

### Représentation intégrale pour $v_m^s$

On dérive simplement par rapport au temps la représentation intégrale précédente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_m^s(\mathbf{x}, t) &= b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \partial_t \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \right] \\ &= -b_i \int dt' \int_{S(t')} dS_j \partial_{t'} \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \right]. \end{aligned}$$

On utilise alors simplement la relation (5.24), avec  $h_j = \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0 - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0 \right]$

$$\begin{aligned} v_m^s(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_m^s(\mathbf{x}, t) &= b_i \epsilon_{jnh} \int dt' \oint_{\partial S(t')} d\sigma \dot{X}_n \tau_h \left[ \rho \dot{X}_j \partial_{t'} G_{im}^0 - c_{ijkl} \partial_k G_{lm}^0 \right] \\ &= \epsilon_{jnh} c_{ijkl} b_i \int dt \oint_{\partial S(t)} d\sigma \dot{X}_n \tau_h \partial_k G_{lm}^0 \end{aligned}$$

### 5.3 Propagation d'une onde élastique dans un polycristal

L'objectif de notre travail en cours est de décrire la propagation cohérente d'une onde élastique à travers un polycristal. On se limite au cas où le polycristal est composé d'un seul type d'atomes, c'est-à-dire que les grains présentent les mêmes caractéristiques élastiques mais ont des orientations cristallines différentes. Dans ce cas, le joint de grain, c'est-à-dire la frontière entre deux grains, peut être vue comme un segment  $\mathcal{L}$ , de longueur  $L$ , portant une densité linéique  $\rho_L$  de dislocation. Le joint de grain est représenté sur la Fig. 5.6. En deux dimensions, les vecteurs de Burgers  $\mathbf{b}$  sur  $\mathcal{L}$  sont dans le plan perpendiculaire à leur ligne de dislocation [en pointillé sur la Fig. 5.6(a) et (b)] et dans ce plan, ils sont perpendiculaires à  $\mathcal{L}$ .

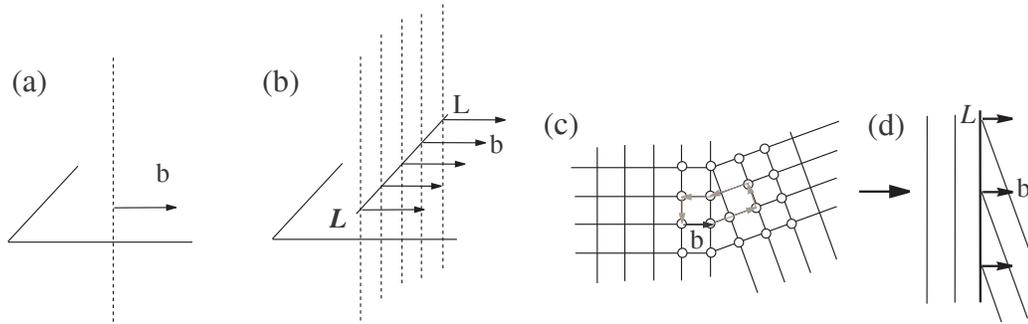


Figure 5.6: (a) dislocation coin caractérisée par son vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  et sa ligne de dislocation en pointillé. L'étude 2D se fait dans le plan perpendiculaire à la ligne de dislocation. (b) frontière  $\mathcal{L}$  portant une densité  $\rho_L$  de dislocations coin caractérisées par leur vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  et leurs lignes de dislocation en pointillé. (c) Configuration typique du joint de grain et détermination du vecteur de Burgers  $\rightarrow$  (d) joint de grain décrit dans le cadre de notre étude.

#### 5.3.1 Le formalisme employé

Nous avons, pour cette étude, modifié le mode de calcul et développé une technique beaucoup plus simple à manipuler. L'idée est d'écrire les fonctions de Green  $\langle G \rangle(\mathbf{k})$ , dans le milieu contenant une distribution aléatoire de diffuseurs dans le référentiel local lié au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Dans ce référentiel  $\langle G \rangle(\mathbf{k})$  s'écrit  $\langle G \rangle_0(k)$ , où  $\langle G \rangle_0(k)$  est diagonal et ne dépend que du module  $k$  de  $\mathbf{k}$ . Ainsi, si  $\alpha$  désigne l'angle que fait le vecteur  $\mathbf{e}_1$  avec  $\mathbf{k}$ , on a  $\langle G \rangle(\mathbf{k}) = R_\alpha \langle G \rangle_0(k) R_{-\alpha}$ , où  $R_a$  désigne la matrice rotation d'angle  $a$ .

Cela se fait pour la fonction de Green en milieu libre

$$G^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(k^2 - k_0^2)(\gamma^2 k^2 - k_0^2)} \begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 + (\gamma^2 - 1)k^2 \sin^2 \alpha & -(\gamma^2 - 1)k^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -(\gamma^2 - 1)k^2 \sin \alpha \cos \alpha & k^2 - k_0^2 + (\gamma^2 - 1)k^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$= R_\alpha G_0^0(k) R_{-\alpha},$$

avec

$$G_0^0(k) = [g_1(q)I + g_2(q)P_2],$$

et  $g_1(q) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{q^2 - k_0^2/\gamma^2}$ ,  $g_2(q) = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{q^2}{(q^2 - k_0^2/\gamma^2)(q^2 - k_0^2)}$  et  $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est le projecteur sur  $\mathbf{e}_2$ . Avec

$$\langle G \rangle(\mathbf{k}) = [(G^0)^{-1}(\mathbf{k}) - \Sigma(\mathbf{k})]^{-1},$$

où  $\Sigma(\mathbf{k})$  est l'opérateur de masse qui décrit l'influence des diffuseurs, notre objectif est de mettre la fonction de Green modifiée sous la forme

$$\langle G \rangle(\mathbf{k}) = R_\alpha [(G_0^0)^{-1}(k) - \Sigma_0(k)]^{-1} R_{-\alpha}. \quad (5.35)$$

Ceci étant fait, on est assuré que  $\langle G \rangle_0(k)$  est diagonal, le premier terme de la diagonale décrivant le comportement de l'onde  $\alpha$  et le second terme de la diagonale décrivant le comportement de l'onde  $\beta$ . Il suffit alors de calculer les vecteurs d'onde modifiés correspondant.

### 5.3.2 Le potentiel associé à un joint de grain

Dans une étude précédente (Publication [85], jointe en annexe G), on a exprimé le potentiel  $V^1$  associé à une dislocation coin dans le référentiel local lié au vecteur de Burgers d'une dislocation. On rappelle que le potentiel apparaît dans le terme de droite de l'équation d'onde pour les deux ondes longitudinale  $\alpha$  et transverse  $\beta$  dans le plan d'étude. Soit  $\mathbf{v}$  la dérivée du vecteur déplacement de l'onde, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_i(\mathbf{x}, t) - c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} v_l(\mathbf{x}, t) = \beta^2 V_{ij}^1(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}, t), \quad (5.36)$$

et, dans le référentiel local lié à la dislocation  $(O, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  (avec  $\mathbf{b} = b \mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  la direction perpendiculaire), l'opérateur  $V^1$  s'écrit simplement

$$(V^1 \mathbf{v})_L = \frac{\mu b^2}{m\omega^2} (\partial_n v_t + \partial_t v_n)|_{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} \partial_n \\ \partial_t \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}), \quad (5.37)$$

où la notation  $\partial_a v|_{\mathbf{X}}$  désigne  $\frac{\partial v}{\partial a}(\mathbf{X})$ . On introduit la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ceci permet d'écrire l'opérateur  $V_L^1$  dans le référentiel local, avec  $(V^1 \mathbf{v})_L = V_L^1 \mathbf{v}_L$  sous la forme

$$V_L^1 = \frac{\mu b^2}{m\omega^2} J \nabla_L \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) {}^t \nabla_{L|\mathbf{X}} J. \quad (5.38)$$

Ici,  ${}^t \nabla_{L|\mathbf{X}}$  désigne l'opérateur qui agit sur une fonction  $f$  de  $\mathbf{x}$  de la façon suivante:  ${}^t \nabla_{L|\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) = ({}^t \nabla_L f)(\mathbf{X})$ .

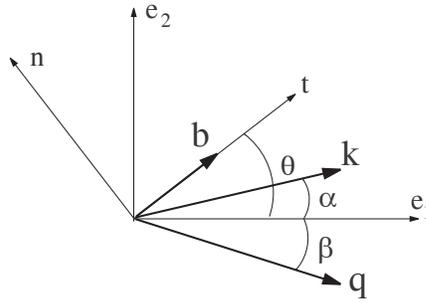


Figure 5.7: Définition des angles et des deux référentiels, le référentiel local lié à la dislocation  $(O, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  et le référentiel absolu  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

Dans un référentiel fixe  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , tel que  $\theta = \widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{b})}$ , on obtient simplement, par changement de référentiel,

$$V^1 = \frac{\mu b^2}{m\omega^2} F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) {}^t \nabla_{|\mathbf{X}} F_\theta, \quad (5.39)$$

où  $V^1$  désigne le potentiel dans le référentiel fixe et avec  $F_\theta = R_\theta J R_{-\theta} = R_{2\theta} J = J R_{-2\theta}$ .

Pour le segment  $\mathcal{L}$ , formé de  $N = \rho_L L$  dislocations, on a

$$V = \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int_{\mathcal{L}} dX F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) {}^t \nabla_{|\mathbf{Y}} F_\theta, \quad (5.40)$$

où  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}$ , avec  $\mathbf{X}_c$  le centre de  $\mathcal{L}$  et  $\mathbf{X}$  orienté suivant  $\mathcal{L}$  (Fig. 5.8).

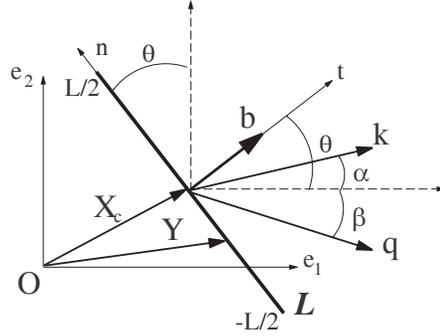


Figure 5.8: Définition des angles et des référentiels pour le segment  $\mathcal{L}$

### 5.3.3 Calcul de l'opérateur de masse

Pour calculer l'opérateur de masse  $\Sigma$ , on part de sa définition [85]

$$\Sigma(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (5.41)$$

avec

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle V^t(\mathbf{x}) \rangle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \langle V^t(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V^t(\mathbf{x}') \rangle - \langle V^t(\mathbf{x}) \rangle G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle V^t(\mathbf{x}') \rangle$$

$V^t$  est le potentiel total pour la distribution de diffuseurs (ici les segments  $\mathcal{L}$ ). On peut montrer qu'à l'ordre 1 et 2 (pour une faible diffusion), on a

$$\Sigma_1(\mathbf{k}) = \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\theta d\mathbf{X} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (5.43)$$

$$\Sigma_2(\mathbf{k}) = \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}$$

On cherche maintenant à exprimer l'opérateur de masse sous la forme

$$\Sigma(\mathbf{k}) = R_\alpha \Sigma_0(k) R_{-\alpha}. \quad (5.44)$$

Je donne en guise d'annexe dans la section 5.3.7 les calculs de l'opérateur de masse à l'ordre 1 et à l'ordre 2. On obtient, avec les relations (5.72) et (5.84), finalement

$$\Sigma^0(k) = -\frac{1}{2} \frac{\mu n B^2}{M \omega^2} k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{16} \left( \frac{\mu n B^2}{M \omega^2} \right)^2 \frac{1 + \gamma^4}{\gamma^4} \frac{k_0^2}{n} k^2 \begin{pmatrix} I_1(k_0/\gamma) & 0 \\ 0 & I_2(k_0) \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

où

$$I_1(k) = \frac{1}{\pi^2(1 + \gamma^4)} \int d\theta d\beta \sin^2 2\theta [\cos^2 2\beta f(k_0 L/\gamma, kL, \theta, \beta) + \gamma^4 \sin^2 2\beta f(k_0 L, kL, \theta, \beta)],$$

$$I_2(k) = \frac{1}{\pi^2(1 + \gamma^4)} \int d\theta d\beta \cos^2 2\theta [\cos^2 2\beta f(k_0 L/\gamma, kL, \theta, \beta) + \gamma^4 \sin^2 2\beta f(k_0 L, kL, \theta, \beta)],$$

sont des facteurs de forme pour  $\mathcal{L}$ , avec

$$f(qL, kL, \theta, \beta) = \text{sinc}^2 [(kL \sin \theta - qL \sin \beta)/2],$$

et où on a posé  $M = N b$  ( $N = \rho_L L$  est le nombre de dislocations portées par un joint de grain  $\mathcal{L}$ ), qui correspond au vecteur de Burgers total porté par la ligne  $\mathcal{L}$  et  $M = N m$ , qui correspond à sa masse totale. On remarque que

- A l'ordre 1, la réponse du joint de grain est la même que celle d'une dislocation de vecteur de Burgers  $B$  et de masse  $M$ , c'est-à-dire que l'onde cohérente se comporte comme si la ligne  $\mathcal{L}$  était une unique dislocation.
- A l'ordre 2, l'organisation en ligne des dislocations apparaît, *via* les fonctions de forme  $I_1$ , relative à l'onde de compression  $\alpha$ , et  $I_2$ , relative à l'onde de cisaillement  $\beta$ . A grandes longueurs d'onde ( $k_0 \rightarrow 0$ ), les fonctions de forme  $I_1(k_0/\gamma)$  et  $I_2(k_0)$  tendent vers 1 et on retrouve le résultat obtenu pour une seule dislocation, à condition à nouveau de considérer le vecteur de Burgers  $B = Nb$  total porté par la ligne  $\mathcal{L}$  et sa masse totale  $M = Nb$ .

### 5.3.4 Calculs des nombres d'onde effectifs

Les nombres d'onde effectifs sont les pôles de la fonction de Green modifiée

$$\langle G \rangle_0(k) = ((G_0^0)^{-1}(k) - \Sigma_0(k))^{-1}. \quad (5.48)$$

Avec

$$(G_0^0)^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \gamma^2 k^2 - k_0^2 & 0 \\ 0 & k^2 - k_0^2 \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

et en utilisant (5.45), on obtient les nombres d'onde effectifs  $k_0/\gamma \rightarrow K_\alpha$  et  $k_0 \rightarrow K_\beta$

$$K_\alpha = \frac{k_0}{\gamma} \left[ 1 + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} - i \frac{1 + \gamma^4}{32\gamma^6} \left( \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} \right)^2 \frac{k_0^2}{n} I_1(k_0/\gamma) \right], \quad (5.50)$$

$$K_\beta = k_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} - i \frac{1 + \gamma^4}{32\gamma^4} \left( \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} \right)^2 \frac{k_0^2}{n} I_2(k_0) \right].$$

### 5.3.5 Comportement de la vitesse et de l'atténuation

On pose pour simplifier  $\epsilon = \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} \simeq (k_0 L_c)^{-2} \ll 1$  le petit paramètre, avec  $m \simeq \rho b^2$  et  $L_c = 1/\sqrt{nN}$ . La modification de la vitesse  $v = \omega/K$  est donnée par

$$v_\alpha \simeq v_\alpha^0 \left[ 1 + \frac{1}{(2\gamma k_0 L_c)^2} \right], \quad (5.51)$$

$$v_\beta \simeq v_\beta^0 \left[ 1 + \frac{1}{(2k_0 L_c)^2} \right],$$

c'est-à-dire que la vitesse est d'autant plus modifiée que la longueur d'onde est grande, ce qu'on avait déjà pour une distribution de dislocations coin. La longueur d'atténuation est donnée par la partie imaginaire du nombre d'onde

$$\Lambda_\alpha = \frac{32\gamma^7}{1 + \gamma^4} \frac{k_0 L_c}{I_1(k_0 L/\gamma)} L_c, \quad (5.52)$$

$$\Lambda_\beta = \frac{32\gamma^5}{1 + \gamma^4} \frac{k_0 L_c}{I_2(k_0 L)} L_c.$$

Les comportements des longueurs d'atténuation sont donnés sur la Fig. 5.9.

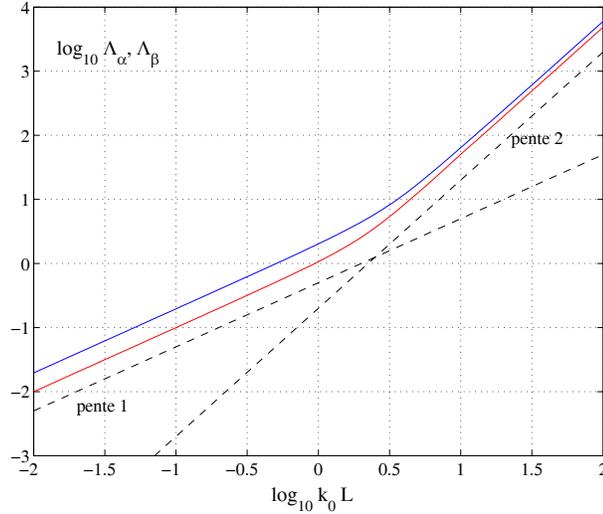


Figure 5.9: Variations de  $\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta$  (on a pris  $\gamma = 1.4$ ) en fonction de  $k_0 L$ .

### 5.3.6 Fonctions de diffusion d'un joint de grain

Pour le calcul des fonctions de diffusion, on reprend l'expression du potentiel

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\mu B^2}{M\omega^2} \rho_L \int_{\mathcal{L}} dX F_{\theta_0} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) {}^t \nabla_{|\mathbf{X}} F_{\theta_0},$$

Si  $\mathbf{v}^s$  désigne le champ diffusé par  $\mathcal{L}$ , on a, dans la première approximation de Born,

$$\mathbf{v}^s(\mathbf{x}, t) = \mu \int dt' d\mathbf{x}' G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') V(\mathbf{x}') \mathbf{v}^{inc}(\mathbf{x}', t').$$

Soit une onde incidente, composée d'une onde de compression d'amplitude  $A_\alpha$  et d'une onde de cisaillement d'amplitude  $A_\beta$ . Dans le cas fluide, on prend usuellement une amplitude unité. Ici, avec deux directions de polarisation, on doit introduire ces coefficients d'amplitude pour rester en toute généralité. On écrit donc la vitesse de l'onde incidente

$$\mathbf{v}^{inc} = \left( A_\alpha \mathbf{e}_1 e^{ik_0 x_1 / \gamma} + A_\beta \mathbf{e}_2 e^{ik_0 x_1} \right) e^{-i\Omega t},$$

et on cherche la forme de l'onde diffusée par le joint de grain. On traite la partie en  $A_\alpha$ , c'est-à-dire la réponse du joint à une onde incidente de compression et on étendra le résultat

à la partie en  $A_\beta$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha^s(\mathbf{x}, t) &= \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int d\mathbf{x}' \int_{\mathcal{L}} dX G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_{\theta_0} \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}) \\ &\quad \times \left( {}^t \nabla'_{|\mathbf{X}} F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 x'_1 / \gamma} \right) \\ &= \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int d\mathbf{x}' \int_{\mathcal{L}} dX G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_{\theta_0} \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}) \\ &\quad \times \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèse est un scalaire. Par ailleurs, le terme  $\int d\mathbf{x}' G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_{\theta_0} \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X})$  est intégré en utilisant la propriété  $\int M \nabla f = - \int {}^t \nabla {}^t M f$  (pour une matrice  $M$  et un scalaire  $f$ ), ce qui donne

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{v}_\alpha^s(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int_{\mathcal{L}} dX \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) \\ &\quad \times \int d\mathbf{x}' {}^t \nabla' {}^t (G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_{\theta_0}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}) \\ {}^t \mathbf{v}_\alpha^s(\mathbf{x}, t) &= \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int_{\mathcal{L}} dX \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) \\ &\quad \times {}^t \nabla \int d\mathbf{x}' {}^t (G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_{\theta_0}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}) \\ &= \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int_{\mathcal{L}} dX \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) \\ &\quad \times {}^t \nabla {}^t (G^0(\mathbf{x} - \mathbf{X}, t - t') F_{\theta_0}) \\ &= \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int dt' e^{-i\Omega t'} \int_{\mathcal{L}} dX \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) \\ &\quad \times {}^t \nabla F_{\theta_0} {}^t G^0(\mathbf{x} - \mathbf{X}, t - t'). \end{aligned}$$

A l'ordre dominant, on a  $\mathbf{X} \simeq X R_{\theta_0} \mathbf{e}_2$ , indépendant du temps. On reconnaît un produit de convolution, soit  $f(t) = \int dt' g(t - t') f(t') \rightarrow f(\omega) = g(\omega) f(\omega)$  et

$${}^t \mathbf{v}_\alpha^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m \omega^2} A_\alpha \int_{\mathcal{L}} dX \left( \frac{ik_0}{\gamma} {}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 e^{ik_0 X_1 / \gamma} \right) {}^t \nabla F_{\theta_0} {}^t G^0(\mathbf{x} - \mathbf{X}, \omega) \delta(\omega - \Omega).$$

On passe dans le référentiel local lié à  $\mathbf{x}$  avec  $\theta = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{x}})$ , c'est-à-dire qu'on a  $G^0(\mathbf{x}, \omega) = R_\theta G_0^0(x, \omega) R_{-\theta}$  avec  $G_0^0(x, \omega)$  diagonale (donc égale à sa transposée) et indépendant de  $\theta$ . On a par ailleurs  $\mathbf{v}^s = R_\theta \mathbf{v}_L^s$  et  ${}^t\nabla = {}^t\nabla_L R_{-\theta}$ . Dans le référentiel local, on a simplement  ${}^t\mathbf{v}_L^s = (v_\alpha^s; v_\beta^s)$  suivant la tangente et la normale à la direction d'observation. Avec  ${}^t\mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_1 = -\sin 2\theta_0$ , il vient

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, \omega) R_{-\theta} &= -\frac{ik_0}{\gamma} \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m\omega^2} A_\alpha \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} {}^t\nabla_L R_{-\theta} F_{\theta_0} \\ &\quad \times {}^t(R_\theta G_0^0(|\mathbf{x} - \mathbf{X}|, \omega) R_{-\theta}) \delta(\omega - \Omega) \\ &= -\frac{ik_0}{\gamma} \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m\omega^2} A_\alpha \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} {}^t\nabla_L R_{-\theta} F_{\theta_0} \\ &\quad \times R_\theta G_0^0(|\mathbf{x} - \mathbf{X}|, \omega) \delta(\omega - \Omega) R_{-\theta}, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{ik_0}{\gamma} \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m\omega^2} A_\alpha \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} {}^t\nabla_L \left( R_{-\theta} F_{\theta_0} R_\theta \right) \\ &\quad \times G_0^0(|\mathbf{x} - \mathbf{X}|, \omega) \delta(\omega - \Omega). \end{aligned}$$

On remarque maintenant que le gradient est appliqué à une fonction qui ne dépend que du module de  $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ , donc  ${}^t\nabla = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|} \left( (x_1 - X_1); (x_2 - X_2) \right) \partial_{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|}$ . Dans le référentiel local, on est dans la direction de la tangente  $\mathbf{t}$  (référentiel local  $(0, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ ). Aussi, on considère  $x \gg X$  et on ne garde des termes en  $\epsilon = x/X$  que dans le terme de phase (la phase de  $G_0^0$ ) car on veut l'ordre dominant en  $x$ . On a donc  ${}^t\nabla_L \simeq (1; 0) \partial_{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|} = \mathbf{t} \partial_{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|}$ . On obtient  $\mathbf{v}_{\alpha,L}^s$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{ik_0}{\gamma} \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m\omega^2} A_\alpha \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} \left( {}^t\mathbf{t} R_{2(\theta_0 - \theta)} J \right) \\ &\quad \times \partial_{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|} G_0^0(|\mathbf{x} - \mathbf{X}|, \omega) \delta(\omega - \Omega) \\ &= -\frac{ik_0}{\gamma} \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{m\omega^2} A_\alpha \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} \left( -\sin 2(\theta_0 - \theta); \cos 2(\theta_0 - \theta) \right) \\ &\quad \times \partial_{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|} G_0^0(|\mathbf{x} - \mathbf{X}|, \omega) \delta(\omega - \Omega). \end{aligned}$$

En repassant en temporel, on obtient

$$\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, t) = i \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{M \Omega^2} A_\alpha \frac{k_0}{\gamma} \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} \begin{pmatrix} \sin 2(\theta_0 - \theta) \partial_{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} G_{0,1}^0(|\mathbf{x}-\mathbf{X}|, \Omega) \\ -\cos 2(\theta_0 - \theta) \partial_{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} G_{0,2}^0(|\mathbf{x}-\mathbf{X}|, \Omega) \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}.$$

On recupère l'autre morceau (en  $A_\beta$ ). Les différences sont: • le scalaire est cette fois  ${}^t \mathbf{e}_1 F_{\theta_0} \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_0$  (au lieu de  $-\sin 2\theta_0$ ) et • le premier gradient fait sortir un  $ik_0$ . On a donc

$$\mathbf{v}_{\beta,L}^s(\mathbf{x}, t) = i \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{M \Omega^2} A_\beta k_0 \cos 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0} \begin{pmatrix} -\sin 2(\theta_0 - \theta) \partial_{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} G_{0,1}^0(|\mathbf{x}-\mathbf{X}|, \Omega) \\ \cos 2(\theta_0 - \theta) \partial_{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} G_{0,2}^0(|\mathbf{x}-\mathbf{X}|, \Omega) \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}.$$

Reprenons la forme de  $\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, t)$ . On prend maintenant les formes asymptotiques de fonctions de Green.

$$\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, t) = i \frac{\rho_L \mu^2 b^2}{M \Omega^2} A_\alpha \frac{k_0}{\gamma} \sin 2\theta_0 \int_{\mathcal{L}} dX e^{-ik_0 X \sin \theta_0 / \gamma} \begin{pmatrix} \sin 2(\theta_0 - \theta) \frac{ik_0 / \gamma}{2\mu} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 \gamma^3}} \frac{e^{ik_0 |\mathbf{x}-\mathbf{X}| / \gamma}}{\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}} \\ -\cos 2(\theta_0 - \theta) \frac{ik_0}{2\mu} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0}} \frac{e^{ik_0 |\mathbf{x}-\mathbf{X}|}}{\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}} \end{pmatrix} e^{-i\Omega t}$$

Avec  $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{X} = R_{\theta_0} \mathbf{e}_2$ , on a  $|\mathbf{x}-\mathbf{X}|^2 = (x {}^t \mathbf{e}_1 R_{-\theta} - X {}^t \mathbf{e}_2 R_{-\theta_0}) (x R_\theta \mathbf{e}_1 - X R_{\theta_0} \mathbf{e}_2) = x^2 + X^2 - xX ({}^t \mathbf{e}_1 R_{\theta_0-\theta} \mathbf{e}_2 + {}^t \mathbf{e}_2 R_{-(\theta_0-\theta)} \mathbf{e}_1) = x^2 + X^2 + 2 \sin(\theta_0 - \theta)$ . Avec  $X/x \ll 1$ , on a  $|\mathbf{x}-\mathbf{X}| \simeq x + X \sin(\theta_0 - \theta)$  et

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} \simeq \frac{e^{ikx} e^{ikX \sin(\theta_0-\theta)}}{x}.$$

Avec, par ailleurs,  $\int_{-L/2}^{L/2} dX e^{iax} = L \operatorname{sinc}(aL/2)$ , on obtient finalement

$$\mathbf{v}_{\alpha,L}^s(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} A_\alpha \frac{k_0}{\gamma} \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} e^{i\pi/4} \sin 2\theta_0 \times \left( \begin{array}{l} -\gamma^{-5/2} \sin 2(\theta_0 - \theta) \frac{e^{ik_0x/\gamma - i\Omega t}}{\sqrt{x}} \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))/\gamma] \\ \cos 2(\theta_0 - \theta) \frac{e^{ik_0x - i\Omega t}}{\sqrt{x}} \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0/\gamma - \sin(\theta_0 - \theta))] \end{array} \right),$$

$$\mathbf{v}_{\beta,L}^s(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} A_\beta k_0 \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} e^{i\pi/4} \cos 2\theta_0 \times \left( \begin{array}{l} \gamma^{-5/2} \sin 2(\theta_0 - \theta) \frac{e^{ik_0x/\gamma - i\Omega t}}{\sqrt{x}} \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))/\gamma] \\ -\cos 2(\theta_0 - \theta) \frac{e^{ik_0x - i\Omega t}}{\sqrt{x}} \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))] \end{array} \right).$$

On en déduit les fonctions de diffusion

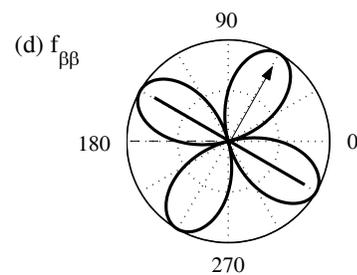
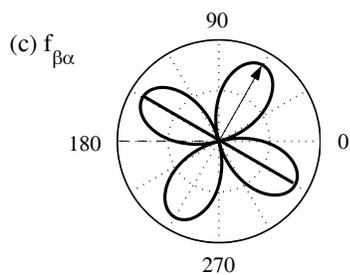
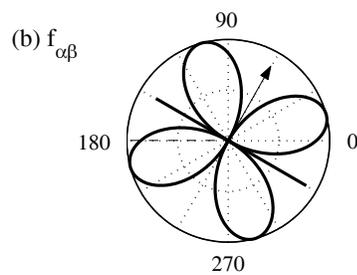
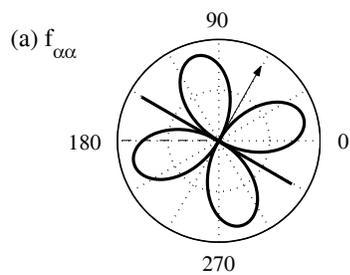
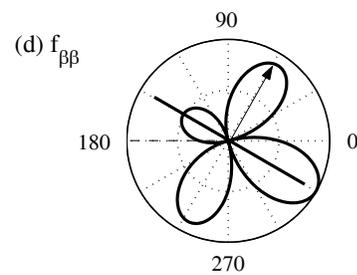
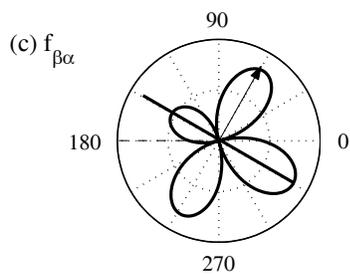
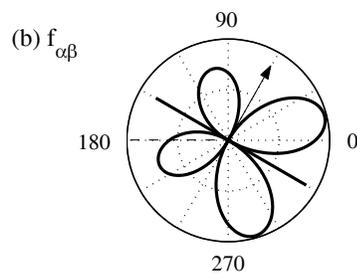
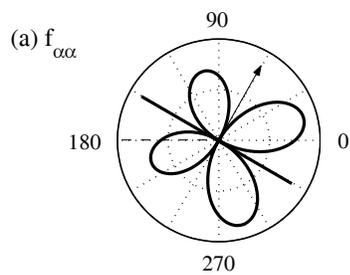
$$f_{\alpha\alpha}(\theta) = -\frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} \frac{k_0}{\gamma} \frac{1}{\gamma^2} \sin 2(\theta_0 - \theta) \sin 2\theta_0 \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))/\gamma] \sqrt{\frac{k_0/\gamma}{2\pi}} e^{i\pi/4},$$

$$f_{\beta\alpha}(\theta) = \frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} \frac{k_0}{\gamma} \cos 2(\theta_0 - \theta) \sin 2\theta_0 \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0/\gamma - \sin(\theta_0 - \theta))] \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} e^{i\pi/4},$$

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} k_0 \frac{1}{\gamma^2} \sin 2(\theta_0 - \theta) \cos 2\theta_0 \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))/\gamma] \sqrt{\frac{k_0/\gamma}{2\pi}} e^{i\pi/4},$$

$$f_{\beta\beta}(\theta) = -\frac{\mu b^2}{2M\Omega^2} k_0 \cos 2(\theta_0 - \theta) \cos 2\theta_0 \operatorname{sinc}[k_0L/2(\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \theta))] \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} e^{i\pi/4}. \quad (5.68)$$

dont les formes sont données, pour différentes valeurs de  $k_0L$  sur la Fig. 5.3.6.

(a)  $k_0L = 10^{-1}$ (b)  $k_0L = 2$ 

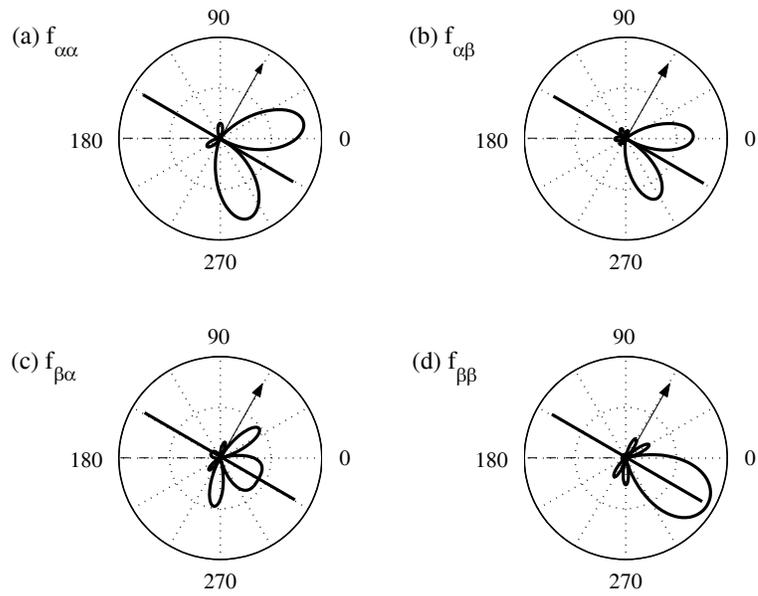
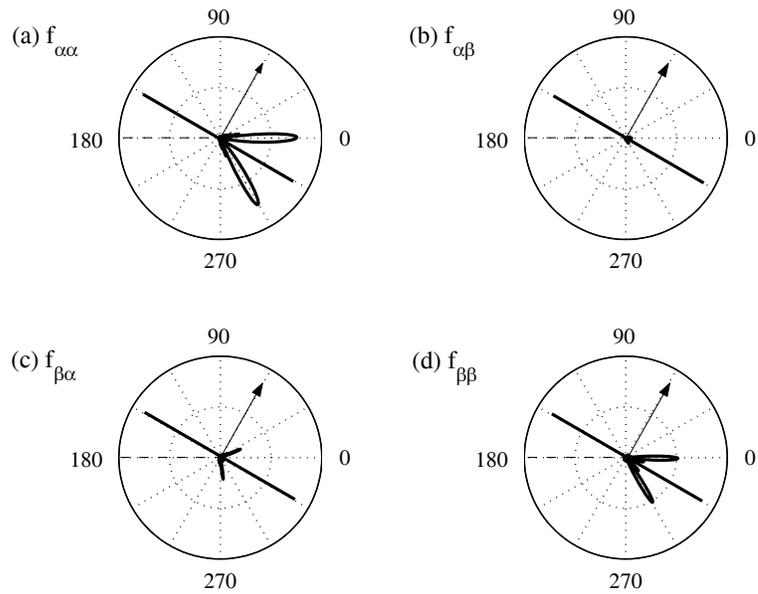
(c)  $k_0L = 10$ (d)  $k_0L = 100$ 

Figure 5.10: Formes des fonctions de diffusion d'un joint de grain (représenté en trait plein) portant une densité linéique de dislocations coin (toutes les dislocations sont orientées comme indiquées par la flèche). L'onde incidente est orientée suivant la direction  $\theta = 0$ .

### 5.3.7 En guise d'annexes

#### Calcul de l'opérateur de masse à l'ordre 1

On reprend l'expression de  $\Sigma_1$

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\mathbf{k}) &= \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\theta d\mathbf{X}_c e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int d\mathbf{x} d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta \left( \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) \right)^t \nabla_{|\mathbf{Y}} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int d\mathbf{x} d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX \left( e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) \right) i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}} \\
&= \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int d\mathbf{x} d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta i \mathbf{k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}} \\
&= -\frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}} F_\theta \mathbf{k}^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}} \\
&= -\frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \rho_L \int d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX F_\theta \mathbf{k}^t \mathbf{k} F_\theta = -\frac{n\rho_L L}{2\pi} \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \int d\theta F_\theta \mathbf{k}^t \mathbf{k} F_\theta.
\end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{k} = k R_\alpha \mathbf{e}_1$ , on a

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\mathbf{k}) &= -\frac{\mu b^2}{m\omega^2} \frac{n\rho_L L}{2\pi} k^2 \int d\theta F_\theta R_\alpha \mathbf{e}_1^t \mathbf{e}_1 R_{-\alpha} F_\theta \\
&= -\frac{\mu b^2}{m\omega^2} \frac{n\rho_L L}{2\pi} k^2 \int d\theta R_{(2\theta-\alpha)} J P_1 J R_{-(2\theta-\alpha)} \\
&= -\frac{\mu b^2}{m\omega^2} \frac{n\rho_L L}{2\pi} k^2 \int d\theta R_{(2\theta-\alpha)} P_2 R_{-(2\theta-\alpha)}
\end{aligned}$$

En changeant de variable  $\theta \rightarrow \theta - \alpha$ , on obtient

$$\Sigma_1(\mathbf{k}) = R_\alpha \left( -\frac{\mu b^2}{m\omega^2} \frac{n\rho_L L}{2\pi} k^2 \int d\theta R_{2\theta} P_2 R_{-2\theta} \right) R_{-\alpha} = R_\alpha \left( -\frac{\mu b^2}{m\omega^2} \frac{n\rho_L L}{2} k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) R_{-\alpha}$$

Posons  $M = \rho_L L b$ , le vecteur de Burgers total porté par la ligne  $\mathcal{L}$  et  $M = \rho_L L m$ , sa

masse totale. On écrit  $\Sigma_1^0$  sous la forme

$$\Sigma_1^0(k) = -\frac{1}{2} \frac{\mu n B^2}{M \omega^2} k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

A l'ordre 1, l'opérateur de masse pour un joint de grain a la même expression que celle qu'on aurait pour une seule dislocation de vecteur de Burgers  $B$  et de masse  $M$ .

### Calcul de l'opérateur de masse à l'ordre 2

Reprenons de même l'expression de l'opérateur de masse à l'ordre 2

$$\Sigma_2(\mathbf{k}) = \frac{n}{2\pi\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X}_c e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}$$

Développons le calcul

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\mathbf{k}) &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{2\pi\mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X}_c \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' \\ &\times e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) {}^t \nabla_{|\mathbf{Y}} F_\theta G^0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F_\theta \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{Y}') \left( {}^t \nabla_{|\mathbf{Y}'} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \right) \\ &\times F_\theta \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{Y}') i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}'} \\ &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3 \mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X}_c d\mathbf{q} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' \\ &\times e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) \left( i^t \mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{Y} - \mathbf{x}')} \right) F_\theta \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{Y}') i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}'} \\ &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3 \mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X}_c d\mathbf{q} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' \\ &\times \left( e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) \right) i^t \mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Y}} \left( e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} F_\theta \nabla' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{Y}') \right) i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}'} \\ &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3 \mathcal{V}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\theta d\mathbf{X}_c d\mathbf{q} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' \\ &\times \left( e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_\theta i\mathbf{k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) \right) i^t \mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Y}} \left( e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} F_\theta i\mathbf{q} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{Y}') \right) i^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}'} \\ &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3 \mathcal{V}} \int d\theta d\mathbf{X}_c d\mathbf{q} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}} F_\theta \mathbf{k} {}^t \mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Y}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Y}'} \\ &\times F_\theta \mathbf{q} {}^t \mathbf{k} F_\theta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{Y}'} \end{aligned}$$

$$\Sigma_2(\mathbf{k}) = \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3 \mathcal{V}} \int d\theta d\mathbf{X}_c d\mathbf{q} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' F_\theta \mathbf{k} \{ {}^t\mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) F_\theta \mathbf{q} \} {}^t\mathbf{k} F_\theta e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})(\mathbf{Y}'-\mathbf{Y})}$$

On remarque que ce qui est entre accolade est un scalaire, que  $\mathbf{Y} - \mathbf{Y}' = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$  est independant de  $X_c$ , ce qui donne

$$\Sigma_2(\mathbf{k}) = \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n\rho_L^2}{(2\pi)^3} \int d\theta d\mathbf{q} F_\theta \mathbf{k} {}^t\mathbf{k} F_\theta \{ {}^t\mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) F_\theta \mathbf{q} \} \int_{\mathcal{L}} dX \int_{\mathcal{L}} dX' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})(\mathbf{X}'-\mathbf{X})}$$

On utilise alors les égalités suivantes

- $F_\theta \mathbf{k} {}^t\mathbf{k} F_\theta = R_\alpha \{ k^2 R_{2(\theta-\alpha)} P_2 R_{-2(\theta-\alpha)} \} R_{-\alpha}$ ,
- ${}^t\mathbf{q} F_\theta G^0(\mathbf{q}) F_\theta \mathbf{q} = q^2 {}^t\mathbf{e}_1 R_{-2(\beta-\theta)} [g_1(q)I + g_2(q)P_2] R_{2(\beta-\theta)} \mathbf{e}_1$ ,
- $(\mathbf{k} - \mathbf{q})(\mathbf{X}' - \mathbf{X}) = k(X - X') {}^t\mathbf{e}_1 R_{\theta-\alpha} \mathbf{e}_2 - q(X - X') {}^t\mathbf{e}_1 R_{-(\beta-\theta)} \mathbf{e}_2$ .

On pose alors les changements de variables  $\theta \rightarrow \theta - \alpha$  et  $\beta \rightarrow \beta - \theta$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\mathbf{k}) &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n(\rho_L L)^2}{(2\pi)^3} \int d\theta q dq d\beta \\ &\times R_\alpha \{ k^2 R_{2\theta} P_2 R_{-2\theta} \} R_{-\alpha} q^2 {}^t\mathbf{e}_1 R_{-2\beta} [g_1(q)I + g_2(q)P_2] R_{2\beta} \mathbf{e}_1 f(kL, qL, \theta, \beta), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f(qL, kL, \theta, \beta) &= \int_{\mathcal{L}} \frac{dX}{L} \int_{\mathcal{L}} \frac{dX'}{L} \exp(ik(X - X') {}^t\mathbf{e}_1 R_\theta \mathbf{e}_2 - iq(X - X') {}^t\mathbf{e}_1 R_{-\beta} \mathbf{e}_2) \\ &= \text{sinc}^2((kL \sin \theta - qL \sin \beta)/2). \end{aligned}$$

Posons momentanément  $h(qL) = f(qL, kL, \theta, \beta)$ , on a

$$\begin{aligned} \Sigma_2^0(k) &= \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n(\rho_L L)^2 k^2}{(2\pi)^3} \int d\theta d\beta \{ R_{2\theta} P_2 R_{-2\theta} \} \\ &\times {}^t\mathbf{e}_1 R_{-2\beta} \left\{ \int dq q^3 h(qL) [g_1(q)I + g_2(q)P_2] \right\} R_{2\beta} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

La matrice entre accolade est évaluée de la façon suivante: on prend la partie imaginaire des intégrales de la forme  $\int dq q^3 h(qL)g_1(q)$ , où la fonction  $g_1(q)$  comporte une fonction de coupure pour  $q > 1/b$  [85]. On obtient  $M = \int dq q^3 h(qL) [g_1(q)I + g_2(q)P_2] =$

$\frac{i\pi k_0^2}{2\gamma^4} \begin{pmatrix} h(k_0L/\gamma) & 0 \\ 0 & \gamma^4 h(k_0L) \end{pmatrix}$ . Le terme encadré par  ${}^t\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_1$  est un scalaire et le terme entre accolade est une matrice. On peut les calculer, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \Sigma_2^0(k) &= i \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n(\rho_L L)^2}{16\gamma^4\pi^2} k^2 k_0^2 \int d\theta d\beta \begin{pmatrix} \sin^2 2\theta & -\sin 2\theta \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \cos 2\theta & \cos^2 2\theta \end{pmatrix} \\ &\quad \times (h(k_0L/\gamma) \cos^2 2\beta + \gamma^4 h(k_0L) \sin^2 2\beta). \end{aligned}$$

On a

$$\Sigma_2^0(k) = i \left( \frac{\mu b^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{n(\rho_L L)^2}{16} \frac{1+\gamma^4}{\gamma^4} k^2 k_0^2 \begin{pmatrix} I_1(k) & J(k) \\ J(k) & I_2(k) \end{pmatrix},$$

avec

$$I_1(k) = \frac{1}{\pi^2(1+\gamma^4)} \int d\theta d\beta \sin^2 2\theta \{ \cos^2 2\beta f(k_0L/\gamma, kL, \theta, \beta) + \gamma^4 \sin^2 2\beta f(k_0L, kL, \theta, \beta) \},$$

$$I_2(k) = \frac{1}{\pi^2(1+\gamma^4)} \int d\theta d\beta \cos^2 2\theta \{ \cos^2 2\beta f(k_0L/\gamma, kL, \theta, \beta) + \gamma^4 \sin^2 2\beta f(k_0L, kL, \theta, \beta) \},$$

$$J(k) = -\frac{1}{\pi^2(1+\gamma^4)} \int d\theta d\beta \cos 2\theta \sin 2\theta (\cos^2 2\beta h(k_0L/\gamma) + \gamma^4 \sin^2 2\beta h(k_0L)).$$

$J$  est nul par parité. Alors, les intégrales de  $I_1$  renvoie à la modification de  $k_0/\gamma$  et on prend  $k = k_0/\gamma$ .  $I_2$  renvoie à la modification de  $k_0$  et on prend  $k = k_0$ . Finalement, en reprenant les expressions de  $M$  et  $B$ , on obtient l'expression de l'opérateur de masse à l'ordre 2

$$\Sigma_2^0(k) = \frac{i}{16} \left( \frac{\mu n B^2}{M\omega^2} \right)^2 \frac{1+\gamma^4}{\gamma^4} \frac{k_0^2}{n} k^2 \begin{pmatrix} I_1(k_0/\gamma) & 0 \\ 0 & I_2(k_0) \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$



# Appendix A

S. Manneville, A. Maurel, P. Roux & M. Fink, “Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors”, *Eur. Phys. J. B*, 9: 545-549 (1999).



## Appendix B

S. Manneville, P. Roux, M. Tanter, A. Maurel, M. Fink, F. Bottausci & P. Petitjeans, “Scattering of sound by a vorticity filament: an experimental and numerical investigation”, *Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001).



# Appendix C

Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, “Vortex burst as a source of turbulence”,  
*Journal of Turbulence*, 5:030 (2004)



## Appendix D

V. Pagneux & A. Maurel, “Determination of Lamb modes eigenvalues”, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(3): 1307-1314 (2001).



# Appendix E

V. Pagneux & A. Maurel, “Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 458: 1913-1930, (2002).



# Appendix F

V. Pagneux & A. Maurel, “Scattering Matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids”, *J. Acoust. Soc. Am.*, 116:1913 (2004).



# Appendix G

A. Maurel, J.F Mercier & F. Lund, “Elastic wave propagation through a random array of dislocations”, *Phys. Rev. B*, 70:024303 (2004).



# Bibliography

- [1] F. Lund, C. Rojas, “*Ultrasound as a probe of turbulence*”, *Physica D*, **37**, 508-514 (1989)
- [2] H. Contreras, F. Lund, “*Ultrasound as a probe of turbulence. II, Temperature inhomogeneities*”, *Phys. Lett., Sect. B.* , **149**, 127 - 130 (1990)
- [3] R. Berthet, F. Lund, “*The forward scattering of sound by vorticity*”, *Phys. Fluids*, **7**, 2522 - 2524 (1995)
- [4] C. Baudet, S. Ciliberto, J.F. Pinton, “*Spectral analysis of the Von Kármán flow using ultrasound scattering*”, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 193 (1991)
- [5] J.F. Pinton, C. Laroche, S. Fauve, C. Baudet, “*Ultrasound scattering by buoyancy driven flows*”, *J. Phys., II.*, **3**(6), 767 - 773 (1993)
- [6] M. Oljaca, X. Gu, A. Glezer, M. Baffico, F. Lund, “*Ultrasound scattering by a swirling jet*”, *Phys. Fluids*, **10**, 886 - 898 (1998)
- [7] S. Manneville, A. Maurel, P. Roux & M. Fink, “*Characterization of a large vortex using time-reversal mirrors*”, *Eur. Phys. J. B*, **9**: 545-549 (1999)
- [8] S. Manneville, J.H. Robres, A. Maurel, P. Petitjeans & M. Fink, A new acoustic technique for vortex dynamics investigation, *Phys. of Fluids*, **11**(11): 3380 - 3389 (1999).
- [9] S. Manneville, A. Maurel, F. Bottausci & P. Petitjeans, Acoustic characterization of a stretched vortex in an infinite medium, dans “*Structure and dynamics of vortices*”, Springer-Verlag, ed. A. Maurel & P. Petitjeans, 231-240 (2000).

- [10] S. Manneville, P. Roux, M. Tanter, A. Maurel, M. Fink, F. Bottausci & P. Petitjeans, Scattering of sound by a vorticity filament: an experimental and numerical investigation, *Phys. Rev. E*, **63**: 036607 (2001).
- [11] Labbé R., Pinton J.-F., et Fauve S., "Study of the von Krmn flow between coaxial corotating disks," *Phys. Fluids* **8**914 (1996).
- [12] M. V. Berry, R. G. Chambers, M. D. Large, C. Upstill, et J. C. Walmsley, "Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue", *Eur. J. Phys.* **1**, 154 (1980).
- [13] Y. Aharonov et D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory", *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [14] M. J. Lighthill, "On sound generated aerodynamically I. General theory" *Proc. R. Soc. London A* **211**, 564 (1952); A. L. Fetter, "Scattering of sound by a classical vortex" *Phys. Rev. A* **136**, 1488 (1964); S. O'Shea, "Sound scattering by a potential vortex" *J. Sound Vib.* **43**, 106 (1975); A. L. Fabrikant, "Sound scattering by a vortex" *Sov. Phys. Acoust.* **28**, 410 (1982); P. V. Sakov, "Sound scattering by a vortex filament", *Acoust. Phys.* **39**, 280 (1993).
- [15] J. Reinschke, W. Mhring, et F. Obermeier, "Scattering of sound waves by a cylindrical vortex: a semi-analytical theory", *J. Fluid Mech.* **333**, 273 (1997); R. Ford et S. G. Llewellyn Smith, "Scattering of acoustic waves by a vortex", *J. Fluid Mech.* **386**, 305 (1999).
- [16] F. Vivanco, F. Melo, C. Coste, et F. Lund, "Surface wave scattering by a vertical vortex and the symmetry of the Aharonov-Bohm wave function", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1966 (1999); C. Coste, F. Lund et M. Umeki, "Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect", *Phys. Rev. E* **60**, 4908 (1999); P. Roux, J. de Rosny, M. Tanter et M. Fink, "The Aharonov-Bohm effect revisited by an acoustic time-reversal mirror", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3170 (1997).
- [17] Frédéric Bottausci, Thèse de doctorat,
- [18] O. Cadot, Ph.D. Thesis University Paris VII, 19 December (1995).

- [19] P.H.J. Van Dam, Ph.D. Thesis (1993).
- [20] G. Zocchi, P. Tabeling, J. Maurer & H. Willaime, *Phys. Rev. E*, **50**(5) 3693-3700 (1984).
- [21] M. Mory et N. Yurchenko, “*Vortex generation by suction in a rotating tank*”, *Eur. J. Mech. B* **6**, 729 (1993).
- [22] B. Andreotti, “*Action et réaction entre tirement et rotation, du laminaire au turbulent*”, Ph. D. Thesis, University Paris 7 (1999).
- [23] N. Mordant, J.-F. Pinton et F. Chillà, “*Characterization of turbulence in a closed flow*” *J. Phys. II France* **7**, 1729 (1997).
- [24] T.S. Lundgren, *Phys. Fluids*, **25**: 2193-2203 (1982).
- [25] H.K. Moffat, in *Proceedings of the I.M.A. Conference*, ed. M. Farge, J.C.R. Hunt and J.C. Vassilicos (Oxford University Press, London, 1993).
- [26] A.D. Gilbert, *Phys. Fluids*, **5**(11), 2831-2834 (1993).
- [27] P. Petitjeans, J.E. Wesfreid and J.C. Attiach, *Exp. in Fluids*, **22**, 351-353 (1997).
- [28] P. Petitjeans & al., *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17**, 549-560 (1998).
- [29] M. Rossi & al., à paraître dans *Phys. Rev. Lett.* (2003).
- [30] Reference a Taylor local, J.-F. Pinton and R. Labbe, *J. Phys. II* **4**(9): 1461-1468 (1994).
- [31] D.I. Pullin and P.G. Saffman, *Phys. Fluids*, **5**(1), 126-145 (1992).
- [32] D.I. Pullin, J.D. Buntine and P.G. Saffman, *Phys. Fluids*, **6**(9), 3010-3027 (1994).
- [33] A.D. Gilbert, *J. Fluid Mech.* **193**: 475-497 (1988).
- [34] Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Vortex burst as a source of turbulence, soumis *Journal of Turbulence*, (2004)
- [35] Y. Cuypers, A. Maurel & P. Petitjeans, Vortex burst as a source of turbulence, *Phys. Rev. Lett*, **91**: 194502 (2003).
- [36] T.S. Lundgren, *Phys. Fluids A* **5**(6), 1472-1483 (1993).

- [37] Z. Yin, H.J.H. Clercx & D.C. Montgomery, *Computers & Fluids*, **33**: 509-520 (2004).
- [38] T.S. Lundgren and N.N. Mansour, *J. Fluid Mech.*, **307**: 43-62 (1996).
- [39] A. A. Townsend, *Proc. R. Soc. A* **208**: 534 (1951).
- 
- [40] Morse, P. & Ingard, U. 1952 *Theoretical acoustics*, (McGraw Hill, 1952)
- [41] Auld, B.A. 1973 *Acoustic fields and waves in solids*, volume II, (J. Wiley & Sons, 1973), p.198.
- [42] Folguera, A. & Harris, G.H. 1999 Coupled Rayleigh surface in a slowly varying elastic waveguide, *Proc. R. Soc. Lond. A* **455**, 917-931
- [43] Gregory, R.D. & Gladwell, I. 1983 The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at a fixed or free edge of a plate. *J. Elast.* **13**(2), 185-206.
- [44] Pagneux, V., Amir, N. & Kergomard, J. 1996 A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part i. theory and validation, *J. Acoust. Soc. Am.* **100**(4), 2034-2048.
- [45] V. Pagneux & A. Maurel, “*Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguide*”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **458**: 1913-1930, (2002).
- [46] Kirrmann, P. 1995 On the completeness of Lamb modes, *J. Elasticity* **37**, 39-69
- [47] Fraser, W.B. 1976 Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate, *J. Acoust. Soc. Am.* **59**, 215-216
- [48] V. Pagneux & A. Maurel, “*Scattering Matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids*”, soumis à *J. Acoust. Soc. Am.* (2004).
- [49] Y. Cho, “*Estimation of Ultrasonic Guided Wave Mode Conversion in a Plate with Thickness Variation*”, *IEEE Trans. Ultrason., Ferro. and Freq. Control*, **47**(3): 591-603 (2000).
- [50] M. Koshiha, S. Karakida et M. Suzuki, “*Finite-element Analysis of Lamb Wave Scattering in an Elastic Plate Waveguide*”, *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, **SU-311**:18-25 (1984).

- [51] Viktorov, I.A. 1967 *Rayleigh and Lamb waves: Physical Theory and Applications* (Plenum, New-York, 1967), Ch.2
- 
- [52] C.F. Ying, R. Truell, "Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid", J. Appl. Phys. **27**(9): 1086-1097 (1956).
- [53] N.G. Einspruch and R. Truell, "Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical fluid obstacle in an elastic medium", J. Acoust. Soc. Am. **32**(2): 214-220 (1960).
- [54] Y.H. Pao and C.C. Mow, "Scattering of plane compressional waves by a spherical obstacle", J. Appl. Phys. **34**(3): 493 (1963).
- [55] R.M. White, "Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid", J. Acoust. Soc. Am. **30**(8): 771-785 (1958).
- [56] T.S. Lewis and D.W. Kraft, "Mode conversion relation for elastic wave scattered by a cylindrical obstacle in a solid", J. Acoust. Soc. Am. **56**(6): 1899-1901 (1974).
- [57] N.G. Einspruch, E.J. Witterholt and R. Truell, "Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium", J. Appl. Phys. **31**(5): 806-818 (1960).
- [58] D.W. Kraft and M.C. Franzblau, "Scattering of elastic waves from a spherical cavity in a solid medium", J. Appl. Phys. **42**(8): 3019-3024 (1971).
- [59] R.J. McBride and D.W. Kraft, "Scattering of a transverse elastic wave by an elastic sphere in a solid medium", J. Appl. Phys. **43**(12): 4853-4861 (1972).
- [60] S.K. Datta, "Propagation of SH-waves through a fiber-reinforced composite-elliptic cylindrical fibers", J. Appl. Mech. **42**: 165-170 (1975).
- [61] V.K. Varadan, V.V. Varadan and Y.A. Pao, "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section", J. Acoust. Soc. Am. **63**: 1310-1319 (1978).
- [62] V.K. Varadan, "Scattering of elastic waves by randomly distributed and oriented scatterers", J. Acoust. Soc. Am. **65**(3): 655-657 (1979).
- [63] B. Peterson, V.K. Varadan and V.V. Varadan, "Scattering of elastic waves by a fluid inclusion", J. Acoust. Soc. Am. **73**(5): 1487-1493 (1983).
- [64] L.W. Schmerr Jr, *Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation : a modelling approach*, Plenum Press, New York, 1996.

- [65] R. K. Ing and M. Fink, "Time recompression of dispersive Lamb wave using a time reversal mirror applications to flaw detection in thin plates", IEEE Ultrason. Symp. Proc. (San Antonio, 1996) 659-664.
- [66] M. Fink, Ultrasound puts material to the test, Physics World, Fev. 1998.
- [67] J.C. Aldrin and J.D. Achenbach, "Model and methodology for crack detection on a cylindrical hole containing an elastic insert", AIP-Conference-Proceedings (615A) (2002) 181-188.
- [68] J.D. Achenbach, "Modeling for quantitative non-destructive evaluation", Ultrasonics **40**(1-8): 1-10 (2002).
- [69] E. Orowan, "Zür Kristallplastizität I-III", Z. Phys. **89**: 605-634 (1934).
- [70] M. Polanyi, "Über eine Art Gitterstörung, die einem Kristall plastisch machen könnte", Z. Phys. **89**: 660 (1934).
- [71] G.I. Taylor, "The mechanism of plastic deformation of crystals I-II", Proc. Roy. Soc. A **145**: 362-388 (1934).
- [72] J.M. Burgers, "Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice", Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap **42**: 293-378 (1939).
- [73] F.R.N. Nabarro, "The interaction of screw dislocations and sound wave", Proc. Roy. Soc. A. **209**: 278-290 (1951).
- [74] J.D. Eshelby, "Dislocation as a cause of mechanical damping in metals", Proc. Roy. Soc. A. **197**(1050): 396-416 (1949).
- [75] J.D. Eshelby, "The equation of motion of a dislocation", Phys. Rev. **90**(2): 248-255 (1953).
- [76] T. Mura, "Continuous distribution of moving dislocations", Phil. Mag. **8**, 843-857 (1963).
- [77] J. Kiusalaas & T. Mura, "On the elastic field around an edge Dislocation with application to dislocation vibration", Phil. Mag. **9**: 1-7 (1963).

- [78] F. Lund, "Response of a stringlike dislocation loop to an external stress", *J. Mat. Res.* **3**(2), 280-297 (1988).
- [79] A. V. Granato and K. Lücke, in "Physical Acoustics", Vol 4A, edited by W. P. Mason (Academic, 1966).
- [80] A. V. Granato and K. Lücke, *J. Appl. Phys.* **27**, 583 (1956); *J. Appl. Phys.* **27**, 789 (1956).
- [81] K. Lücke and A. V. Granato, *Phys. Rev. B* **24**, 6991 (1981); A. V. Granato and K. Lücke, *Phys. Rev. B* **24**, 7007 (1981).
- [82] G. A. Kneezel and Granato, *Phys. Rev. B* **25**, 2851 (1982).
- [83] J. S. Koehler, in "Imperfections in Nearly Perfect Crystals", edited by W. Shockley et al. (Wiley, 1952).
- [84] A. Maurel, J.F Mercier & F. Lund, Scattering of an elastic wave by a dislocation point, à paraître dans *J. Acoust. Soc. Am.*, (2004).
- [85] A. Maurel, J.-F. Mercier et F. Lund, "Elastic wave propagation through a random array of dislocations", submitted to *Phys. Rev. B.* (2003).
- [86] A. C. Anderson, in "Dislocations in Solids", edited by F. R. N. Nabarro, Ch. 29 (North Holland, 1983).
- [87] M.O. Peach and J.S. Koehler, "The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them", *Phys. Rev.* **80**, 436- 439 (1950).
- [88] Zolotoyabko E., Shilo D and Lakin E., "X-ray imaging of acoustic wave interaction with dislocations", *Mat. Sci. Eng. A-Struct* **309**:23-27 (2001).
- [89] D. Shilo and E. Zolotoyabko, "Visualization of acoustic wave scattering by dislocations", *Ultrasonics* **40**: 921-925 (2002).
- [90] D. Shilo and E. Zolotoyabko, "Stroboscopic X-Ray Imaging of Vibrating Dislocations Excited by 0.58 GHz Phonons", *Phys. Rev. Lett.* **91**(11): 115506/1-4 (2003).
- [91] H. Koizumi and H.O.K. Kirchner, "Lattice wave emission from a moving dislocation", *Phys. Rev. B* **65** 214104 (2002).

- [92] P. Gumbsh and H. Gao, "Dislocations Faster than the Speed of sound", *Science* **283**: 965-968 (1999).