

# Étude analytique du régime conductif des écoulements de convection dans un bain d'alliage

Agnès MAUREL<sup>a</sup>, Laure BLUMENFELD<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire ondes et acoustiques, ESPCI, 10, rue Vauquelin, 75231 Paris cedex 05, France

<sup>b</sup> Département des procédés d'enrichissement, service de physique, d'expérimentation et d'analyses, Commissariat à l'énergie atomique, Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

(Reçu le 26 novembre 1997, accepté après révision le 19 janvier 1998)

**Résumé.** Notre étude concerne les mouvements de convection dans un alliage fondu chauffé localement en sa surface libre par un faisceau d'électrons. Le chauffage provoque l'évaporation de l'alliage et majoritairement du composant le plus volatil. Des gradients de température et de concentration se développent donc dans le bain. On propose une résolution analytique du problème afin de déterminer le motif de l'écoulement induit par ce chauffage. La résolution est menée dans le cas d'un creuset de faible profondeur comparée à son rayon et pour des chauffages modérés. On montre qu'au premier ordre significatif, dans le régime conductif, le motif est déterminé par deux nombres sans dimensions, un nombre de Marangoni et un nombre de Rayleigh qui mesurent les importances relatives des effets thermiques et solutaux. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

*convection / alliage / Marangoni / Rayleigh*

## *Analytical study of the conductive regime of convection flows in molten alloy*

**Abstract.** We present an analytical study of the structure of the flow of a molten alloy. The alloy is contained in a cylindrical crucible and locally heated on its free surface by an electron beam. Due to the high temperature under the electron beam, local evaporation of alloy components occurs. The difference of volatility of the two components creates a concentration gradient in the melt. The study consists of determining analytically the structure of the flow with the following approximations: the aspect ratio height over diameter of the liquid layer is small and for moderate heat supply. We show that in the first significant order, the flow pattern in the conductive regime is governed by two dimensionless numbers, a Marangoni and a Rayleigh number that measure the relative strengths of the thermal and solutal effects. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

*convection / alloy / Marangoni / Rayleigh*

Note présentée par Robert DAUTRAY.

### Abridged English Version

The flow pattern in a pure liquid induced by buoyancy and thermocapillarity is physically well known. The thermocapillarity effect is due to the variation of surface tension with temperature and induces a fluid motion at the free surface in the opposite direction to the gradient of surface tension [1]. The buoyancy effect is related to the variation of density with temperature. In the case of a horizontal temperature gradient between two lateral walls differentially heated, it induces a fluid motion to the top along the hot wall and to the bottom along the cold one [2, 3].

In the case of a melted alloy, we should take into account the variation of the surface tension and of the density with the concentration of the solute [4]. In our study, the solute has the highest volatility. We show in the following that the thermal pattern can be modified by the solutal density and capillary effects. Our method consists of solving the system of the Navier–Stokes equations (2) and (3) with convection–diffusion equations for the temperature (4) and for the concentration of the solute (5) and boundary conditions (6)–(7) at the contact with the crucible and (8)–(10) at the free surface. The Boussinesq approximation extended to solutal effects is used. The variations of the density  $\rho$  and the surface tension  $\sigma$  with temperature and concentration are characterized by the coefficients  $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ ,  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial c}$ ,  $\gamma_t = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}$  and  $\gamma_s = -\frac{\partial \sigma}{\partial c}$ .  $\mu$  is the dynamic viscosity,  $\vec{g}$  the acceleration due to gravity,  $\kappa$  the thermal diffusivity,  $D$  the diffusion coefficient and  $\lambda$  the thermal conductivity. The heat and mass flux defined by the boundary conditions (7) have a gaussian distribution with a characteristic radius  $r_q$ ;  $q_0$ ,  $m_0$  correspond to the maximum heat and solute mass loss by evaporation flux; and  $T_0$ ,  $C_0$  define the temperature and the concentration at the walls of the crucible.

To solve the equations, we use a dimensionless system and then a perturbative method with a small value of the parameter  $\epsilon$ , which is the aspect ratio of the liquid layer.

The dimensionless coordinates  $(R, Z)$  are deduced from the usual cylindrical system  $(r, z)$  with the radial coordinate  $r = R_0 R$  and upward vertical coordinate  $z = hZ$ . A simplified geometry of a cylindrical crucible is adopted with the origin at the central point on the bottom of the crucible.  $a$  defines the beam spot:  $R_0 = ar_q$ .

The dimensionless velocities  $(U, W)$  are defined from the field  $(V_r, V_z)$  by  $V_r = \frac{\kappa}{h} U$  and  $V_z = \frac{\kappa}{R_0} W$ . For the concentration  $c$  and temperature  $T$ , the transformations are  $T - T_0 = \frac{q_0 h}{\lambda} \theta$  and  $c - c_0 = \frac{m_0 h}{\rho_0 D} C$ .

The solutal ( $Ma_s$  and  $Ra_s$ ) or thermal ( $Ma_t$  and  $Ra_t$ ) Marangoni and Rayleigh numbers characterize, respectively, density and capillary effects (1). We note the Prandtl and Schmidt numbers:  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$  and  $Sc = \frac{\nu}{D}$ . The system of equations is written with the parameter  $\epsilon = \frac{h}{R_0}$ .

The resolution concerns small values of the aspect ratio  $\epsilon$ . The dimensionless equations can then be solved by the method of multiscale expansion. The zero order of the velocity field is calculated before the zero order of temperature and concentration fields and gives  $U_0 = W_0 = 0$ . The non motion of the fluid is due to the equilibrium of the fluid in the case of no gradients of temperature and concentration. The lowest significant order corresponds to zero order for temperature and concentration and order 1 for the velocity field. It corresponds to the conductive regime.

The zero order for temperature and concentration fields are given in equation (11). The streamfunction calculated with the first order of the velocity field is given by equation (12). *Figure 2* shows the different patterns as a function of Marangoni and Rayleigh numbers defined as the difference between thermal and solutal effects:  $Ra = Ra_t - Ra_s$ ,  $Ma = Ma_t - Ma_s$  (on the figures, the aspect ratio has been adjusted for readability).

When no solutal effects occurs ( $Ra_s = Ma_s = 0$ ) a unique toroidal roll is recovered. The orientation of the velocity on the free surface is from the centre towards the cold walls. The pattern keeps the same structure until a solutal effect is opposite to the thermal one with a large intensity. When  $Ma$  increases (the onset is obtained for  $Ra = -20 Ma$ ), we observe the development of a roll near the surface contra-rotative, in competition with the initial roll in the depth of the cavity. With increasing further  $Ma$ , the roll invades progressively the whole cavity until the initial roll disappears. Following a similar point of view, the volume effect can be inverted when  $Ra$  increases. We observe then a contra-rotative roll in the volume pressing the initial roll to the free surface.

In conclusion, we have established by a perturbative method, the patterns of rolls due to competition between thermal and solutal effects in the conductive regime. The relevant control parameters to describe this competition are given by the difference between the thermal and solutal characteristic dimensionless numbers: the Marangoni number for the surface force and the Rayleigh number for the volume force. The higher orders, which are not tackled here, will give information on the influence of the flow pattern on the temperature and concentration field. Work is in progress to study this convective regime.

## 1. Introduction

Pour un liquide pur, la forme des écoulements induits par les effets de thermocapillarité et de thermogravité est physiquement bien compris. La force de thermocapillarité est liée à la variation de la tension de surface avec la température  $\sigma(T)$ . En général, cette dernière décroît lorsque la température augmente, conduisant à un mouvement du fluide dans le sens opposé au gradient de température [1].

La force de thermogravité est liée à la variation de la masse volumique avec la température  $\rho(T)$ . Dans le cas d'un gradient horizontal de température, par exemple entre deux plaques verticales différentiellement chauffées, on observe une remontée du fluide le long de la paroi chaude et une descente le long de la paroi froide [2, 3].

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide soumis à des gradients de température et de concentration [4]. Le problème concerne le chauffage local d'un bain cylindrique d'alliage, provenant de la fonte partielle d'un lingot, par un faisceau concentré d'électrons (*figure 1*). Ce chauffage est appliqué sur la surface libre, il induit donc un gradient de température vertical. D'autre part, il est appliqué localement sur une zone centrale et induit donc un gradient radial.

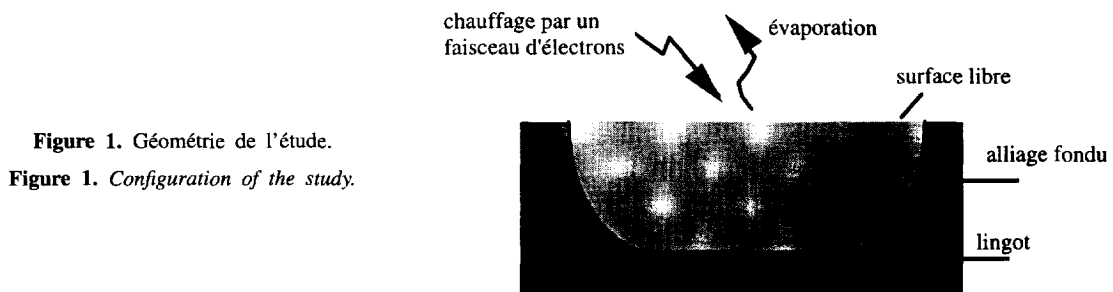


Figure 1. Géométrie de l'étude.

Figure 1. Configuration of the study.

Le chauffage provoque par ailleurs une évaporation qui peut être inhomogène lorsque l'un des constituants est plus volatil. On aura alors des gradients de concentration, également vertical et radial. Dans notre étude, on considère un alliage dans lequel le soluté est le plus volatil.

Dans un cas purement thermique, c'est-à-dire celui d'un liquide pur, l'écoulement est décrit par un rouleau toroïdal. En effet, en surface, les forces de thermogravité entraînent le fluide dans le sens inverse du gradient de température, c'est-à-dire du centre vers les bords du creuset. En volume, la stratification verticale de température est stable, mais le gradient horizontal provoque une remontée du fluide dans les zones plus chaudes (le centre du creuset) et une descente dans les zones plus froides (les bords verticaux du creuset). Dans le cas de l'alliage liquide, on inclut la variation de la tension de surface et de la masse volumique avec la concentration du soluté. Nous montrons dans la suite de cette note que ces effets solutaux peuvent inverser les effets thermiques et modifier le motif de l'écoulement.

## 2. Les équations à résoudre

On considère les équations de Navier–Stokes en régime stationnaire (2) et (3) avec des équations de convection–diffusion pour la température (4) et pour la concentration du soluté (5). On utilise l'approximation de Boussinesq avec une dépendance de  $\rho$  sur la température et la concentration. Ces dépendances sont données par les coefficients  $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  et  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial c}$ .

Aux bords du creuset, la vitesse est nulle (6), les valeurs de la température et de la concentration sont imposées à  $T_0$  et  $c_0$  (7). À la surface libre, la composante verticale de la vitesse est nulle (8). Deux autres conditions limites (9) sont données par les flux de chaleur et d'évaporation de forme gaussienne, avec une taille caractéristique  $r_q$ . Enfin, on écrit l'égalité des contraintes tangentielles (force capillaire) et visqueuses (10). Les variations de la tension de surface avec la température et la concentration sont données par les coefficients  $\gamma_t = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}$  et  $\gamma_s = -\frac{\partial \sigma}{\partial c}$ .

Enfin, on note  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\vec{g}$  l'accélération de pesanteur,  $\kappa$  la diffusivité thermique,  $\lambda$  la conductivité et  $D$  la diffusivité.

La résolution des équations s'effectue en deux temps, l'adimensionnalisation des équations et le développement multiéchelle suivant le paramètre  $\epsilon$ , qui mesure le rapport d'aspect de la profondeur  $h$  du creuset sur son rayon  $R_0$ .

Les coordonnées sans dimensions  $(R, Z)$  sont construites à partir du système cylindrique  $(r, z)$  usuel avec, dans la direction radiale  $r = R_0 R$  et suivant la verticale ascendante  $z = hZ$ . La géométrie simplifiée est celle d'un cylindre et l'origine est placée au point central au fond du cylindre.

On introduit les vitesses  $(U, W)$  sans dimension à partir du champ  $(V_r, V_z)$  :  $V_r = \frac{\kappa}{h} U$  et  $V_z = \frac{\kappa}{R_0} W$ . Enfin,  $T$  et  $c$  désignent respectivement la température du bain et la concentration en soluté et l'on pose  $T - T_0 = \frac{q_0 h}{\lambda} \theta$  et  $c - c_0 = \frac{m_0 h}{\rho_0 D} C$ . Les quantités  $\frac{q_0 h}{\lambda}$  et  $\frac{m_0 h}{\rho_0 D}$  sont les échelles des écarts de température et de concentration pour notre problème et servent à introduire les nombres de Marangoni et de Rayleigh solutaux et thermiques :

$$Ma_t = \frac{\gamma_t h^2 q_0}{\mu \kappa \lambda}, \quad Ma_s = \frac{\gamma_s h^2 m_0}{\mu \kappa \rho_0 D}, \quad Ra_t = \frac{g \alpha h^4 q_0}{\nu \kappa \lambda}, \quad Ra_s = \frac{g \beta h^4 m_0}{\nu \kappa \rho_0 D} \quad (1)$$

On introduit également le nombre de Schmidt  $Sc = \frac{\nu}{D}$ , et le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ .

Le rapport de la profondeur  $h$  de la fontaine sur son rayon  $R_0$  est noté  $\epsilon$ . Enfin, on définit la largeur du faisceau d'électron par le paramètre  $a$  tel que  $R_0 = a r_q$ .

On obtient donc le système :

$$\partial_R(RU) + \partial_Z(RW) = 0 \quad (2)$$

$$\epsilon \partial_Z[U \partial_R U + W \partial_Z U] - \epsilon^3 \partial_R[U \partial_R W + W \partial_Z W] = \quad (3)$$

$$Pr \left\{ \partial_Z \left[ \epsilon^2 \partial_R \left( \frac{1}{R} \partial_R(RU) \right) + \partial_Z^2 U \right] - \partial_R \left[ \epsilon^3 \frac{1}{R} \partial_R(R \partial_R W) + \epsilon \partial_Z^2 W \right] - \epsilon [Ra_t \partial_R \theta + Ra_s \partial_R C] \right\}$$

$$\epsilon (U \partial_R \theta + W \partial_Z \theta) = \epsilon^2 \frac{1}{R} \partial_R(R \partial_R \theta) + \partial_Z^2 \theta \quad (4)$$

$$\epsilon (U \partial_R C + W \partial_Z C) = Pr/Sc \left[ \epsilon^2 \frac{1}{R} \partial_R(R \partial_R C) + \partial_Z^2 C \right] \quad (5)$$

avec les conditions limites associées :

$$U(R, 0) = W(R, 0) = 0 \quad (6)$$

$$\theta(R, 0) = C(R, 0) = 0 \quad (7)$$

$$W(R, 1) = 0 \quad (8)$$

$$\partial_Z \theta(R, 1) = -\partial_Z C(R, 1) = \exp(-a^2 R^2) \quad (9)$$

$$\partial_Z U(R, 1) = -\epsilon (Ma_t \partial_R \theta + Ma_s \partial_R C) \quad (10)$$

La résolution concerne des creusets de faible profondeur comparée à leur rayon, de sorte qu'on peut effectuer un développement multiéchelle suivant le petit paramètre  $\epsilon$ .

La résolution à l'ordre zéro pour le champ de vitesse donne  $U_0 = W_0 = 0$ . La nullité du champ de vitesse à cet ordre traduit l'équilibre du fluide au repos en absence de gradients thermiques et solutaux.

### 3. Résultats en régime conductif

La résolution à l'ordre zéro pour les champs de température et de concentration donne :

$$\theta_0(R, Z) = -C_0(R, Z) = Z \exp(-a^2 R^2) \quad (11)$$

La fonction de courant du champ de vitesse induit par le chauffage est obtenue à l'ordre 1 :

$$\Psi_1(R, Z) = -\frac{1}{120} a^2 R^2 \exp(-a^2 R^2) (-60 Ma + Ra(2Z^2 + 2Z - 7)) \quad (12)$$

où  $Ma = Ma_t - Ma_s$  et  $Ra = Ra_t - Ra_s$ . La *figure 2* montre les différents motifs observés lorsqu'on fait varier les nombres de Marangoni et de Rayleigh thermiques et solutaux (sur les figures, le faible rapport d'aspect de la cellule n'a pas été respecté par soucis de lisibilité).

Dans le cas purement thermique ( $Ma_s = Ra_s = 0$ ), on retrouve un motif attendu : un rouleau toroïdal orienté en surface du centre vers les bords du creuset. Le motif est modifié lorsque l'un des effets solutaux est suffisamment important pour contrebalancer l'effet thermique. Les valeurs limites pour lesquelles le motif est modifié sont déterminées par les droites  $Ra = -60/7Ma$  et  $Ra = -20Ma$ .

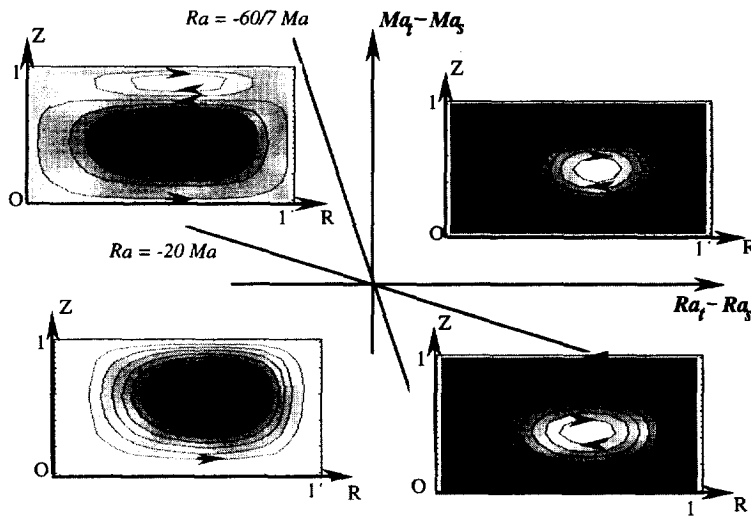


Figure 2. Motifs des rouleaux dans le régime conductif en fonction de  $Ma = Ma_1 - Ma_2$  et  $Ra = Ra_1 - Ra_2$  (représentation dans une demi-cavité).

Figure 2. Flow pattern in the conductive regime as a function  $Ma = Ma_1 - Ma_2$  and  $Ra = Ra_1 - Ra_2$  (representation of a half-cavity).

Ainsi, lorsque  $Ma$  augmente, à la limite où  $Ra = -20Ma$ , on voit se développer progressivement en surface un rouleau contra-rotatif en compétition avec le rouleau dans la profondeur du bain. À  $Ma$  croissant, ce rouleau de surface envahit progressivement la cellule jusqu'à la disparition du rouleau dans la profondeur du bain. De manière analogue, lorsque  $Ra$  augmente, on observe le développement en volume d'un rouleau contra-rotatif qui écrase le rouleau initial vers la surface libre.

#### 4. Conclusions

Nous avons établi, en régime conductif, le motif des rouleaux induits par des effets compétitifs thermiques et solutaux. Nous avons montré, sous réserve de la stabilité des motifs trouvés, qu'à cet ordre, les paramètres de contrôle pertinents pour décrire cette compétition sont donnés par la différence des nombres de Marangoni et celle des nombres de Rayleigh, qui décrivent les effets de surface et les effets de volume. Les ordres supérieurs perturbent faiblement les motifs des rouleaux, mais déterminent l'effet de ces rouleaux sur les cartes de température et de concentration. Des travaux sont en cours pour décrire ce régime convectif.

**Remerciements.** Nous remercions Jean-François Mercier, Christiane Normand et Sylvie Chatain pour de très intéressantes discussions.

#### Références bibliographiques

- [1] Smith M.K., Davis S.H., J. Fluid Mech., 132 (1983) 119-144.
- [2] Elder J.W., J. Fluid Mech. 23 (1965) 77-98.
- [3] Gill A.E., Davey A., J. Fluid Mech. 35 (1969) 775-798.
- [4] Couairon A., Soubbaramayer, Third International Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases, Wood H.G. (Ed.), University of Virginia, Charlottesville, 1992, pp. 99-114.